Fizička veličina koja opisuje stepen, odnosno meru naelektrisanosti nekog tela, zove se ***količina elektriciteta***, ***količina naelektrisanja***, **ili** ***električno opterećenje*.** Količina elektriciteta je skalarna, algebarska veličina, čija numerička vrednost govori, ili o višku, ili o manjku elektrona na nekom telu i označava se sa Q kada je vremenski konstantna, a sa q ako je vremenski promenljiva. Jedinica za količinu elektriciteta je *Kulon* [C]. Danas je poznato da je svaka količina elektriciteta celobrojni umnožak *elementarne količine elektriciteta*, koja se zove *električni kvant* i brojčano je jednaka modulu naelektrisanja elektrona $|e|$, a samo naelektrisanje elektrona je negativno i iznosi $e \approx -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ [C].

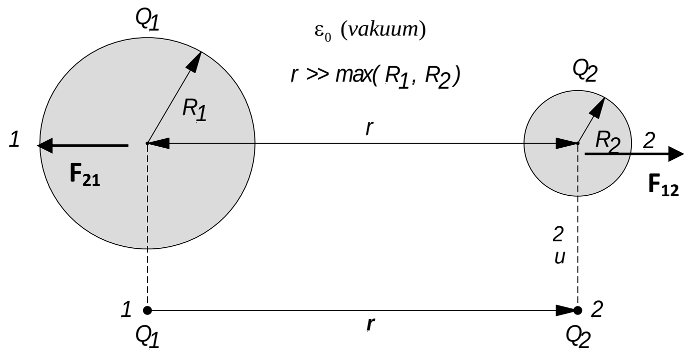
Sva tela se mogu nealektrisati na jedan od sledeća dva načina:

- *Dodirom (trenjem)*
- *Elektrostatičkom indukcijom.*

Zakon o konzervaciji elektriciteta: *Algebarska suma pozitivnih i negativnih naelektrisanja u prirodi je nepromenljiva. Elektricitet u prirodi nije moguće trajno niti stvoriti, a ni uništiti, već se on jedino može razdvajati u okviru tela i premeštati sa jednog tela na drugo.*

Tačkasta ili punktualna *naelektrisanja su naelektrisana tela čije su dimenzije mnogo manje od rastojanja između njih.*

Kulonov zakon: Ako se punktualna naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze u vakuumu i ako je vektor položaja drugog naelektrisanja u odnosu na prvo $\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}$, tada se sile mehaničkog dejstva $\boldsymbol{F}_{12}$ i $\boldsymbol{F}_{21}$ mogu predstaviti sledećim relacijama:



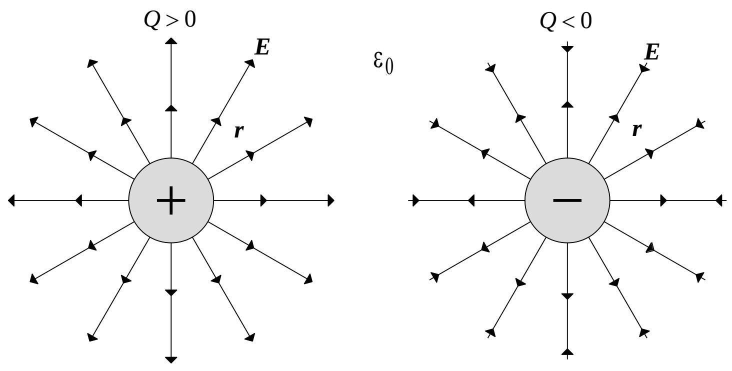
$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \boldsymbol{r}_{012}, \quad \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}, \quad r = |\boldsymbol{r}|, \ \boldsymbol{r}_{012} \text{ je jedinični, ort vektor } \boldsymbol{r}_{012} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}_{12}|}.$$

Permitivnost vakuuma (a približno i vazduha kao dielektrika) iznosi $\varepsilon_0 \approx 10^{-9}/(36\pi)$ [$C^2/(Nm^2)$].

Vektor jačine elektrostatičkog, odnosno električnog polja E *u nekoj tački u prostoru definisan je količnikom vektora elektrostatičke (Kulonove) sile* ***F*** *koja deluje na uneto malo* (*probno*) *pozitivno punktualno naelektrisanje* ΔQ ($\Delta Q \neq 0$) *i samog naelektrisanja* ΔQ:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{\Delta Q} \quad .$$

Posmatrajmo sada usamljeno punktualno naelektrisanje Q u vakuumu. Tada su *vektor jačine električnog polja* ***E*** i njegov intenzitet E, određeni izrazima:



(a) (b)

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{\Delta Q}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0,\quad E=|\boldsymbol{E}|\;=\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad r=|\boldsymbol{r}|.$$

Raspodela naelektrisanja u prirodi:

- površinska gustina naelektrisanja: σ=dQ/dS
- zapreminska gustina naelektrisanja: ρ=dQ/dV
- podužna gustina naelektrisanja: Q'=dQ/dl

Električni potencijal bilo koje tačke *A* u električnom polju ***E*** u odnosu na referentnu tačku *R* je relativna, skalarna fizička veličina, definisana na sledeći način*:*

$$V_{\mathrm{A}}=\int_{A}^{R}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad\leftarrow\ \text{po bilo kojoj putanji integracije !}$$

Referentna tačka sistema R, ili *tačka nultog potencijala*, može se izabrati proizvoljno, ali se u velikom broju praktičnih slučajeva referentna tačka nalazi u beskonačnosti (tj. $R\to\infty$):

$$V_{\mathrm{A}}=\int_{A}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad\leftarrow\ \text{(po bilo kojoj putanji integracije).}$$

Električni napon $\boldsymbol{U_{\mathrm{AB}}}$ između tačaka *A* i *B* u polju definiše se kao razlika potencijala tih tačaka. Napon je *apsolutna*, *algebarska, fizička veličina* i njegova jedinica je kao za potencijal [V]-*Volt*:

$$U_{\mathrm{AB}}=V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}}=\int_{A}^{R}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{B}^{R}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{A}^{R}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R}^{B}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{A}^{B}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},\quad U_{\mathrm{AB}}=-U_{\mathrm{BA}}\,.$$

Putanja integracije u prethodnoj relaciji je proizvoljna.

Potencijal tačke *X* u električnom polju usamljenog punktualnog naelektrisanja *Q* u vakuumu:

$$V_{\mathrm{X}}=\int_{X}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{X}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{X}^{\infty}\frac{\mathrm{d}l\cdot\cos\measuredangle(\boldsymbol{r}_0,\mathrm{d}\boldsymbol{l})}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r_{\mathrm{X}}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{X}}}$$

Elektrostatičko polje je konzervativno fizičko polje, pa je rad *A* Kulonovih sila ***F*** pri *jednom* obrtu unetog probnog punktualnog naelektrisanja ΔQ, *po proizvoljno odabranoj konturi C* u polju, jednak nuli:

$$A=\oint\boldsymbol{F}d\boldsymbol{l}=\Delta Q\oint\boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}=0\,,\ (\boldsymbol{F}=\Delta Q\cdot\boldsymbol{E}).$$

Rad pri premeštanju količine naelektrisanja *Q* iz tačke *A* u tačku *B* u električnom polju je:

$$A = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q \cdot \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q \cdot U_{\mathrm{AB}} = Q \cdot (V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}),$$

ako je *A*>0 sile polja vrše rad,

ako je A<0 rad vrše strane sile protiv sila polja.

1. Zadatak: Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 10^{-10}$[C] i $Q_3 = -20 \cdot 10^{-10}$[C], nalaze se u vazduhu, u temenima jednakostraničnog trougla stranice *a*=1[cm]. Odrediti vektor jačine elektrostatičke sile koja deluje na telo naelektrisanja Q_3.

2. Zadatak: Dva punktualna naelektrisanja Q_1 =1.2[pC] i Q_2 = -2.844[pC] nalaze se na rastojanju *d* = 5[cm]. Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja ***E*** u tački A koja se nalazi na rastojanju r_1=3[cm] od Q_1 i r_2=4[cm] od Q_2.

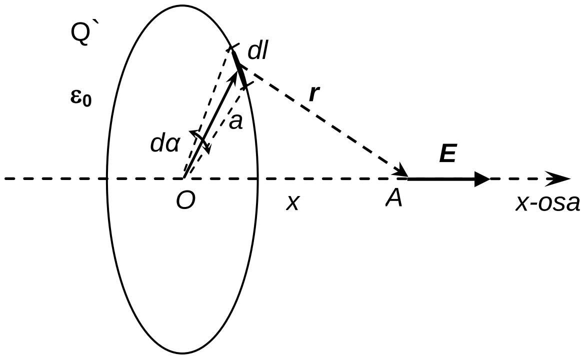
3. Zadatak: Tanka kružna provodna kontura poluprečnika *a* ravnomerno je naelektrisana naelektrisanjem podužne gustine *Q'* i nalazi se u vazduhu. Odrediti potencijal i vektor jačine električnog polja ***E*** u tačkama na osi konture.

Rešenje:

Posmatrajmo elementarni delić konture dužine *dl* koji je naelektrisan količinom naelektrisanja $Q'dl$. Odredimo elementarni potencijal dV_{A} u tački *A* na *x*-osi koji stvara ovaj mali delić konture.

Rastojanje *r* tačke *A* od delića konture mnogo je veće od dimenzije samog delića *dl,* pa se može smatrati da se tačka *A* nalazi u polju tačkastog naelektrisanja $Q'dl$. Za referentnu tačku u beskonačnosti, elementarni potencijal tačke *A* iznosi:

$$dV_A = \frac{Q`dl}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$



Kako je $dl = ad\alpha$, gde je dα elementarni ugao pod kojim se element *dl* „vidi“ iz centra konture i $r = \sqrt{x^2 + a^2}$, to je $dV_A = \dfrac{Q`ad\alpha}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Ukupan potencijal tačke *A* u polju naelektrisane kružne konture dobija se sabiranjem, tj. integracijom svih elementarnih doprinosa duž konture. Integraciju je pogodno izvršiti po uglu *α*:

$$V_A = \int_0^{2\pi} \frac{Q`ad\alpha}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{Q`a}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Q`a}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}} \cdot 2\pi = \frac{Q`a}{2\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Tačka *A* naravno može biti bilo koja tačka na *x*-osi, pa se za potencijal tačaka na osi konture dobija:

$$V(x) = \frac{Q`a}{2\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Primetimo da je potencijal skalarna veličina i da opada sa udaljavanjem od centra konture.

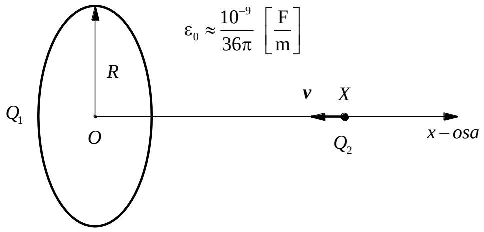
Vektor jačine električnog polja možemo sada jednostavno odrediti kao prvi izvod potencijala polja po promenljivoj koordinati:

$\boldsymbol{E}(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx}\boldsymbol{x}_0$, gde je $\boldsymbol{x}_0$ jedinični vektor *x*-ose. Diferenciranjem se dobija:

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx}\boldsymbol{x}_0 = -\frac{Q`a}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right]\cdot\boldsymbol{x}_0 = \frac{Q`ax}{2\varepsilon_0(a^2+x^2)^{3/2}}\cdot\boldsymbol{x}_0 .$$

Zbog simetrije jačina električnog polja u centru nelektrisane konture je 0.

4. Zadatak: Vrlo tanak i usamljen metalni prsten poluprečnika *R* nalazi se u vakuumu i ravnomerno je naelektrisan količinom elektriciteta Q_1. Iz veoma udaljene tačke *X* na *x*-osi (praktično na nultom potencijalu), pušteno je da iz mirovanja krene punktualno naelektrisanje Q_2 mase *m*. Odrediti njegovu brzinu pri prolasku kroz centar prstena *O*. Usvojiti da je potencijal tačaka u beskonačnosti ravan nuli.



Podaci: Q_1=0.2[nC], Q_2= -0.1[nC], *m*=1.8[g] i *R*=20[cm].

Rešenje:

Kako su naelektrisanja prstena Q_1=+0.2[nC] i punktualnog naelektrisanja Q_2= -0.1[nC] suprotnog znaka, to će pozitivno naelektrisani prsten privlačiti negativno naelektrisano malo telo mase *m*. Rad sila električnog polja se transformiše u povećanje kinetičke energije naelektrisane čestice.

Na putu od veoma udaljene tačke *X* na *x*-osi, do centra konture sile električnog polja izvrše rad $A = Q_2(V_X - V_0)$, gde je V_X potencijal tačke *X*, a V_0 potencijal centra prstena. Dalje je $A = Q_2(V_X - V_0) = \dfrac{1}{2}m(v_0^2 - v_X^2)$. Kako je $V_X = 0$ i $v_X = 0$ dobija se $-Q_2V_0 = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, gde je v_0 brzina čestice pri prolasku kroz centar prstena. Rešavanjem se dobija:

$v_0 = \sqrt{\dfrac{2|Q_2|V_0}{m}}$. Koristeći se rešenjem prethodnog zadatka, $V(x) = \dfrac{Q`a}{2\varepsilon_0\sqrt{(a^2+x^2)}}$, za potencijal centra prstena dobijamo $V(x=0) = \dfrac{Q`a}{2\varepsilon_0\sqrt{(a^2)}} = \dfrac{Q`}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{2\pi R}$, jer je *a*=*R* (poluprečnik prstena) i $Q' = \dfrac{Q_1}{2\pi R}$. Zamenom konačno dobijamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|Q_2|V_0}{m}} = \sqrt{\frac{2|Q_2|}{m}\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_1}{2\pi R}} = \sqrt{\frac{Q_1|Q_2|}{2\pi\varepsilon_0 Rm}},\ v_0 = \sqrt{\frac{Q_1|Q_2|}{2\pi\varepsilon_0 Rm}} = 10^{-3}[\text{m/s}]$$

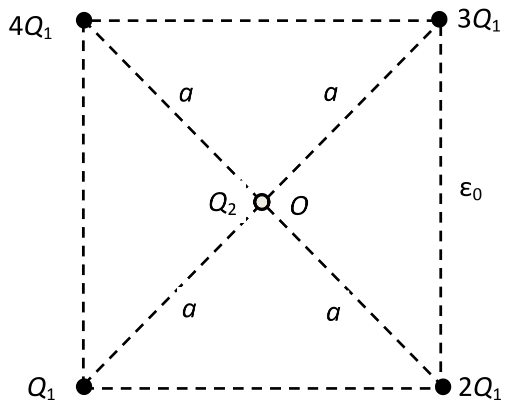
5. Zadatak: Četiri punktualna naelektrisanja leže u temenima kvadrata dijagonale 2*a*, kao na slici. Sredina je vakuum. Odrediti:

a) Potencijal električnog polja u centru kvadrata u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

b) Brzinu v koju u centru kvadrata ima mala uljna kapljica mase m i naelektrisanja Q_2, koja dolazi iz beskonačnosti polazeći iz stanja mirovanja. Uticaj gravitacije zanemariti.

c) Odrediti Kulonovu silu ***F*** koja deluje na uljnu kapljicu kada se ova nađe u centru kvadrata.

Podaci: Q_1 = -Q_2 = 0.1 [nC], m = 0.4 [g], a=4.5 [cm] i $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi[\mathrm{F/m}]$.



Rešenje:

a) Potencijal električnog polja u centru kvadrata možemo odrediti primenom principa superpozicije.

$V_0 = V_0(Q_1) + V_0(2Q_1) + V_0(3Q_1) + V_0(4Q_1)$, gde su

$V_0(Q_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{a}$,$V_0(2Q_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Q_1}{a}$, $V_0(3Q_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3Q_1}{a}$ i $V_0(4Q_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4Q_1}{a}$ potencijali tačke O u poljima svakog od punktualnih naelektrisanja u temenima kvadrata ponaosob.

Sada je $V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{10\cdot Q_1}{a} = 200[\mathrm{V}]$.

b) Analogno prethodnom zadatku, rad sila električnog polja pri premeštanju tačkastog naelektrisanja Q_2 iz beskonačnosti u centar kvadrata, pretvara se u promenu kinetičke energije uljne kapljice.

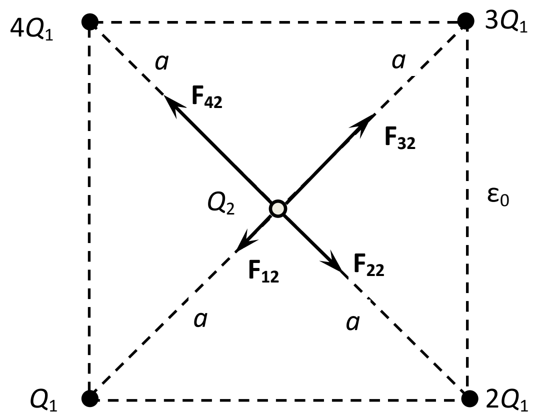
$$A = Q_2(V_\infty - V_0) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_\infty^2)\ .$$

Kako je $V_\infty = 0$ i $v_\infty = 0$, jer kapljica kreće iz stanja mirovanja, dobija se

$-Q_2 V_0 = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, gde je v_0 brzina kapljice u centru kvadrata.

Konačno dobijamo: $v_0 = \sqrt{\dfrac{2|Q_2|V_0}{m}} = 10^{-2}[\mathrm{m/s}]$.

c) Rezultantna Kulonova sila koja deluje na kapljicu u centru kvadrata određuje se vektorskim sabiranjem sila kojima naelektrisanja u temenima kvadrata deluju na kapljicu. Kako su nelektrisanja u temenima kvadrata pozitivna, a uljna kapljica negativno naelektrisana, to su sve 4 sile privlačne, sa pravcima i smerovima kao na slici.

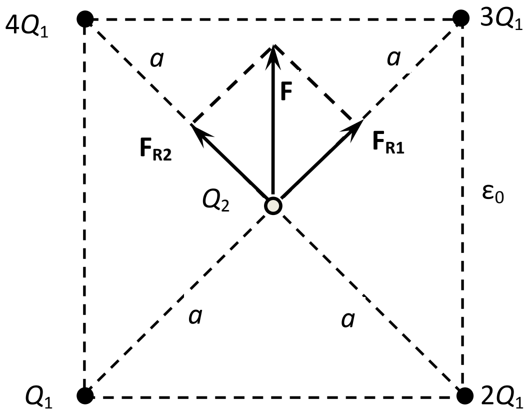


Intenziteti ovih sila su:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot|Q_2|}{a^2},\ F_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1\cdot|Q_2|}{a^2},$$

$$F_{32} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3Q_1\cdot|Q_2|}{a^2},\ F_{42} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4Q_1\cdot|Q_2|}{a^2}.$$

Ako vektorski saberemo sile duž dijagonala kvadrata dobijamo



$$F_{R1} = F_{32} - F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2}$$ i

$$F_{R2} = F_{42} - F_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2}$$ sa pravcima i smerovima kao na slici.

Očigledno je $F_{R1} = F_{R2}$ pa je intenzitet rezultujuće sile

$$F = \sqrt{2} \cdot F_{R1} = \sqrt{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2}$$, odnosno

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2} = 125.7[\mathrm{nN}]$$ sa pravcem i smerom kao na slici.

Gausov zakon (*integralni oblik*): *Izlazni fluks vektora jačine električnog polja u vakuumu, kroz bilo koju zatvorenu površ S jednak je količniku ukupne količine elektriciteta ΣQ obuhvaćene tom površi i dielektrične konstante vakuuma ε*$_0$. *Veličina tog fluksa ne zavisi od usvojenog oblika površi i položaja njome obuhvaćenih naelektrisanja.*

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

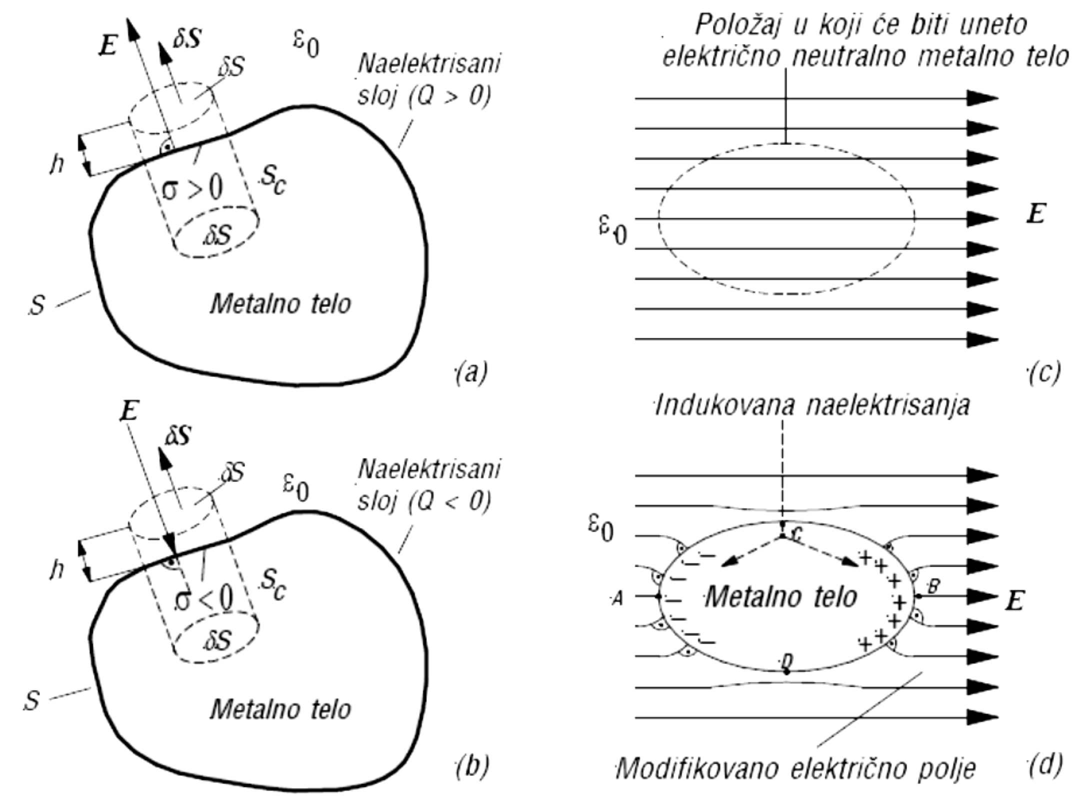
Gausov zakon (*lokalni, ili diferencijalni oblik*): $div\boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0$.

Iz lokalnog oblika Gausovog zakona zaključuje se da linije električnog polja *izviru iz tačaka* u kojima je zapreminska gustina naelektrisanja $\rho>0$ ($\Leftrightarrow div\boldsymbol{E} > 0$), a da poniru u tačkama gde je ta gustina $\rho<0$ ($\Leftrightarrow div\boldsymbol{E} < 0$). Izvori i ponori su tačke *prekida* linija električnog polja. Ako je u nekoj tački polja $\rho=0$ ($\Leftrightarrow div\boldsymbol{E} = 0$), u njoj je linija polja *neprekidna*.

Principi raspodele opterećenja na metalnim (provodnim) telima: Kod metalnih tela (provodnika) u stanju elektrostatičke ravnoteže, naelektrisanja se uvek raspoređuju na površima tih tela u skladu sa sledeća četiri principa:

- U unutrašnjosti provodnog tela ne postoji elektrostatičko polje, kao ni slobodno naelektrisanje.
- Ne postoji tangencijalna komponenta vektora jačine elektrostatičkog polja na površini tela, već samo normalna komponenta.
- Površina provodnog tela ili sistema provodnih tela spojenih provodnikom je ekvipotencijalna površ.
- Naelektrisanja se na površima raspoređuju tako da je energija rezultantnog elektrostatičkog polja minimalna (*Tomsonova* teorema).

Sada ćemo pomoću Gausovog zakona odrediti intenzitet **električnog polja na površi metalnog tela u vakuumu** kod koga je *poznata raspodela* površinske gustine naelektrisanja σ (sl. 1a i 1b).



Sl. 1

Neka je *S*c *izabrana* cilindrična Gausova površ sa osnovicom vrlo male površine δ*S* i izvodnicom upravnom na graničnu površ *S* tela, čiji deo dužine *h* koji se nalazi u vakuumu, u graničnom procesu teži nuli (*h* → 0). Iz Gausovog zakona tada sledi:

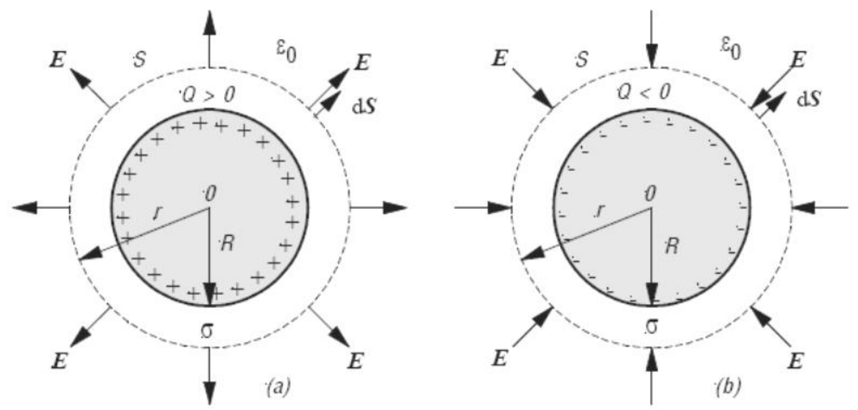
$$\lim_{h\to 0}\oint_{S_C} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} +E\cdot\delta S \text{ , kada je } \sigma>0 \\ -E\cdot\delta S \text{ ,kada je } \sigma<0 \end{cases} = \frac{\sigma\cdot\delta S}{\varepsilon_0}$$

Iz prethodne relacije sledi da je u oba slučaja jačina električnog polja *E* u vakuumu u tačkama na graničnoj površi metalnog tela određena kao $E = |\sigma| / \varepsilon_0$.

Elektrostatička indukcija. Posmatrajmo *usamljeno, električno neutralno* metalno telo proizvoljnog oblika (na sl. 1c prikazano crtkastim linijama), koje je uneto u homogeno električno polje ***E*** u vakuumu (sl. 1d) *ili bilo kojem idealnom dielektriku.* Posle unošenja posmatrano telo i dalje ostaje električno neutralno, ali usled elektrostatičke indukcije u njemu dolazi do razdvajanja opterećenja koja se *neravnomerno* raspoređuju po površi tela. Površinska gustina *indukovanih opterećenja* σ_i takva je da indukovano polje $\boldsymbol{E}_i$ koje ona stvaraju *u metalnom telu* uvek poništava spoljašnje (strano) polje ***E*** (tj. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{0}$). *Rezultujuće polje izvan tela dobija se superpozicijom polja* ***E*** *i* $\boldsymbol{E}_i$, *usled čega se modifikuje spektar spoljašnjeg polja* ***E*** (sl. 1d). Tangencijalna komponenta polja na površi tela ne postoji.

Električno polje i potencijal usamljene naelektrisane metalne sfere u vakuumu

Na sl. 2a i 2b prikazane su usamljene metalne sfere poluprečnika *R* koje se nalaze u vakuumu i naelektrisane su količinama elektriciteta *Q*>0, odnosno *Q*<0, respektivno. Zbog sferne simetrije sistema, elektricitet se u oba slučaja raspoređuje po površinama sfera *ravnomerno* sa površinskom gustinom naelektrisanja $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Električno polje ne postoji unutar sfera, a izvan njih ono je zbog sferne simetrije sistema *radijalnog* karaktera. Neka je *S* sferna Gausova površ poluprečnika *r*≥*R* koncentrična sa datom sferom i orijentisana prema spoljašnosti.



Sl. 2

Pošto su u svakoj tački površi *S* vektori ***E*** i **d*S*** istog pravca i smera (sl. 2a), fluks električnog polja ***E*** kroz površ *S* i njegov intenzitet *E*=|***E***| u tačkama na toj površi su:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S E\cdot dS = E\oint_S dS = E\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\text{ , te je } E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \text{ , } r \geq R\,.$$

Zaključuje se da je električno polje u vakuumu $\boldsymbol{E} = Q/(4\pi\varepsilon_0\cdot r^2)\boldsymbol{r}_0,\ r\geq R$, isto kao da ga generiše usamljeno punktualno naelektrisanje *Q* postavljeno u centar sfere.

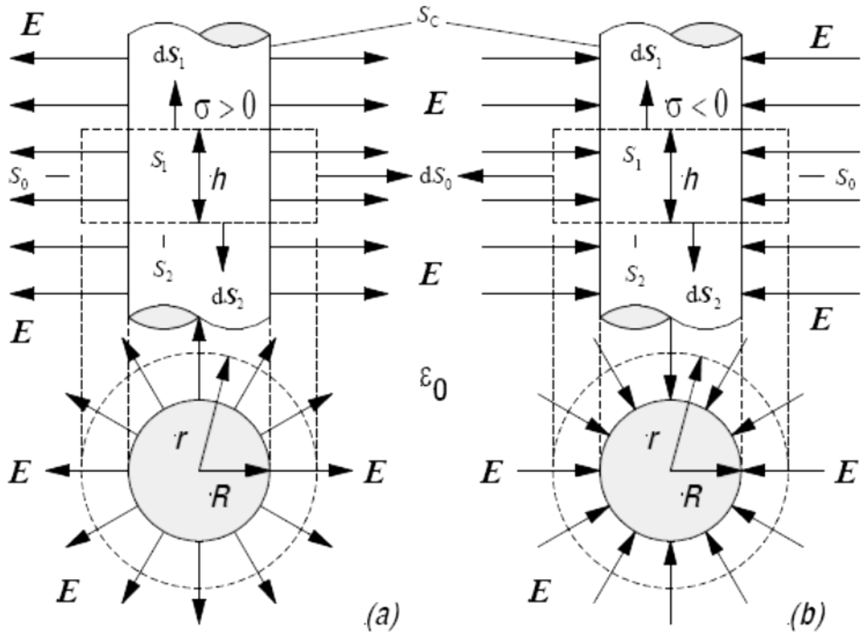
Potencijal tačke *X* sa vektorom položaja $\boldsymbol{r}_X$ u odnosu na centar sfere ($r_X=|\boldsymbol{r}_X|\geq R$) i *referentnu tačku* usvojenu u beskonačnosti, dat je izrazom:

$$V_X = \int_X^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_X^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_X^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_X}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_X} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r_X}\text{ , } r_X \geq R$$

Električno polje i potencijal usamljenog neograničenog metalnog cilindra u vakuumu *kružnog preseka naelektrisanog konstantnom podužnom gustinom elektriciteta Q'.*

Na sl. 5a i 5b prikazan je naelektrisan metalni cilindar kružnog poprečnog preseka zajedno sa linijama električnog polja, u slučajevim kada je *Q'* pozitivno i kada je *Q' negativno*, respektivno. U unutrašnjosti cilindra ne postoji električno polje, dok u vakuumu linije tog polja moraju biti upravne na graničnu površ S_c cilindra. Posledica aksijalne simetrije sistema jeste i aksijalna simetričnost linija električnog polja. Tada se Gausova površ $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ može usvojiti u obliku koaksijalnog cilindra kružne osnovice poluprečnika *r* (*r* ≥*R*) i visine *h*.

Primenom Gausovog zakona na cilindar prikazan na sl. 5a (*Q'* >0) dobija se



Sl. 5

$$\oint_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_0} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \,,$$

pošto su fluksevi vektora ***E*** kroz osnovice cilindra, površi S_1 i S_2 jednaki nuli, jer su vektori ***E*** i **d*S*** međusobno upravni na ovim površima.

$$\int_{S_0} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_0} E \cdot dS_0 = E \int_{S_0} dS_0 = ES_0 = E \cdot 2\pi rh = \frac{Q'h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \begin{cases} \dfrac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} & , r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases} ,$$

jer u unutrašnjosti metalnog cilindra nema električnog polja.

Potencijal *bilo koje tačke X* na omotaču neograničene cilindrične površi kružnog preseka i radijusa r_X, koaksijalne sa metalnim cilindrom – u slučaju kada se *referentna tačka* (npr. *Y*) nalazi na rastojanju $r_Y \geq r_X$ od ose cilindra – određen je u oba slučaja sa sl. 5a i 5b izrazima:

$$V_X = \int_X^Y \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_X}^{r_Y} \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_Y}{r_X} \;, r_X \geq R$$

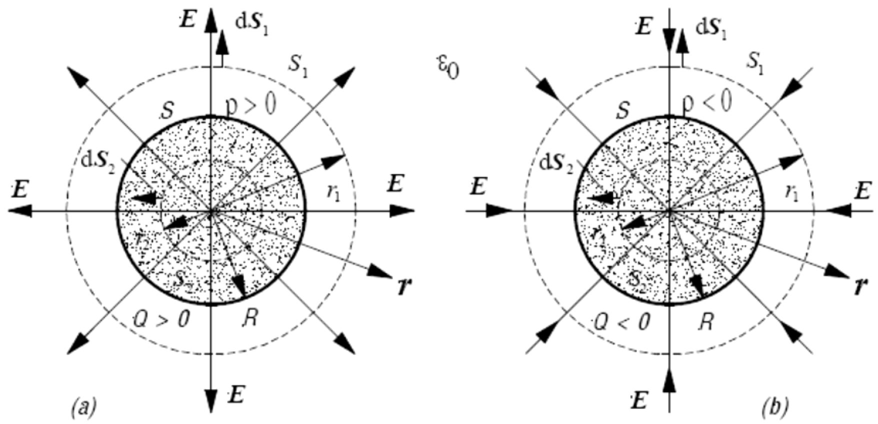
$$V_X = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_Y}{R} \;, r_X < R \,.$$

Iz prethodnih relacija zaključujemo da se referentna tačka *Y ne može nalaziti u beskonačnosti*, jer bi tada $r_Y \to \infty$, pa bi i potencijal težio beskonačnosti, što je fizički apsurdno.

Jačina polja i potencijal u odnosu na referentnu tačku na površini štapa ($r_Y = R$) su onda:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} & , r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases} , \quad V = \begin{cases} \dfrac{Q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{R}{r} & , r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases} .$$

Električno polje i potencijal usamljenog sfernog domena *(sačinjenog od dielektričnog materijala) u vakuumu homogeno naelektrisanog zapreminskom gustinom elektriciteta ρ.*



Sl. 8

Pretpostavićemo da je naelektrisanje *Q* homogeno raspoređeno (sl. 8) unutar sferne površi poluprečnika *R* sa konstantnom zapreminskom gustinom elektriciteta $\rho = \dfrac{Q}{(4/3)\pi R^3}$.

Za tačke unutar domena, $r \le R$, primenom Gausovog zakona $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ sledi $\oint_S E(r)\cdot dS = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, jer su vektori ***E*** i **d*S*** kolinearni na površi sfere poluprečnika *r*.

Leva strana Gausovog zakona je onda: $\oint_S E(r)\cdot dS = E(r)\cdot\oint_S dS = E(r)\cdot 4\pi r^2$.

Gausovom sferom poluprečnika *r* obuhvaćena je količina naelektrisanja $Q(r) = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$, pa iz $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ sledi $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$, tj. $E(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad , \quad r < R$.

Za tačke izvan sfernog domena, $r > R$, analognim postupkom se dobija:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \quad\Rightarrow\quad E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2},\ r > R.$$

Linijskom integracijom vektora jačine polja po putanji kolinearnoj vektoru ***E*** za potencijal tačaka unutar sfernog domena, $r \le R$, dobija se:

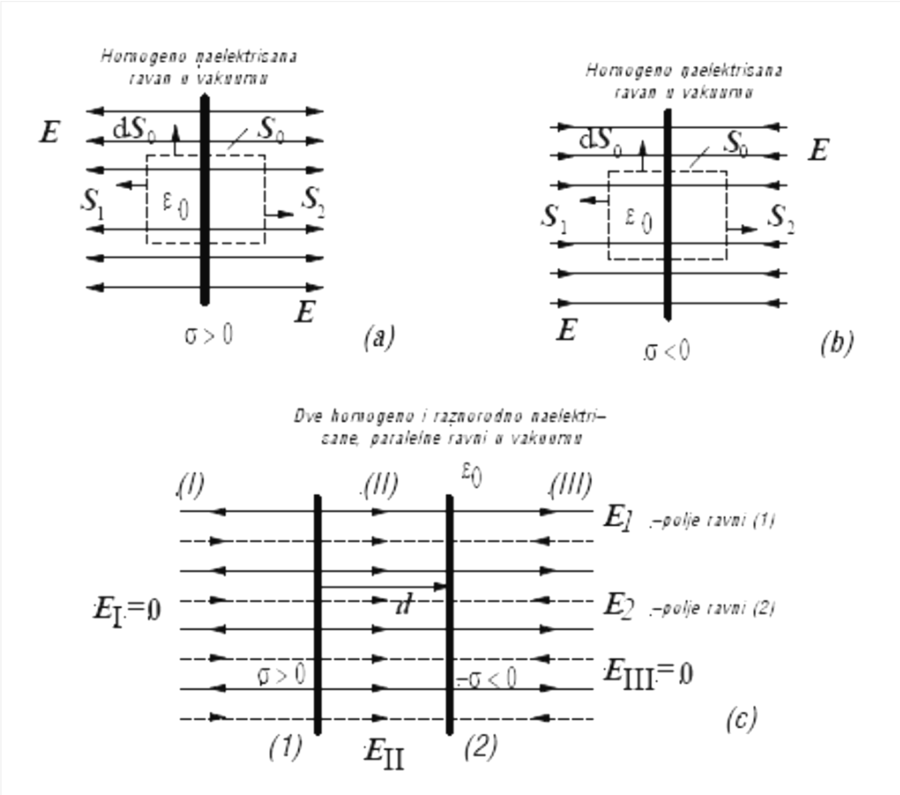
$V(r) = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_r^R \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_R^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$, odnosno $V(r) = \int_r^R E\cdot dr + \int_R^\infty E\cdot dr = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_r^R r\cdot dr + \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_R^\infty \dfrac{dr}{r^2}$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2}\bigg|_r^R + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_R^\infty = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2),\ r \le R.$$

$$V(r) = \int_r^\infty E\cdot dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_r^\infty = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad , \quad r > R.$$

Električno polje homogeno naelektrisanih ravni u vakuumu

Linije električnog polja usamljenih homogeno naelektrisanih ravni u vakuumu (sl. 11a i 11b) moraju biti normalne na te ravni, odakle se zaključuje da svaka od ravni predstavlja jednu ekvipotencijalnu površ. Na sl. 11a i 11b crtkastim linijama predstavljene su *cilindrične* površi $S_C = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ sa osnovicama jednakih površina S=S_1=S_2 i izvodnicama konačne dužine, koje su paralelne linijama polja i upravne na odgovarajuću naelektrisanu ravan. Intenzitet električnog polja E isti je u svim tačkama na osnovicama cilindara, tj. E=E_1=E_2. Pošto su vektorski elementi $\mathbf{d}\boldsymbol{S}_0$ površi omotača S_0 cilindra upravni na linije električnog polja, to je *fluks* polja kroz taj omotač nula.



Sl. 11

U slučaju kada je $\sigma > 0$, primenom Gausovog zakona na površ Sc (sl. 11a), pokazuje se da je intenzitet električnog polja E ove naelektrisane ravni isti u svim tačkama polja:

$$\oint_{S_C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \underbrace{\int_{S_0} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_0}_{=0} + \int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_1 + \int_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_1 + \int_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_2$$

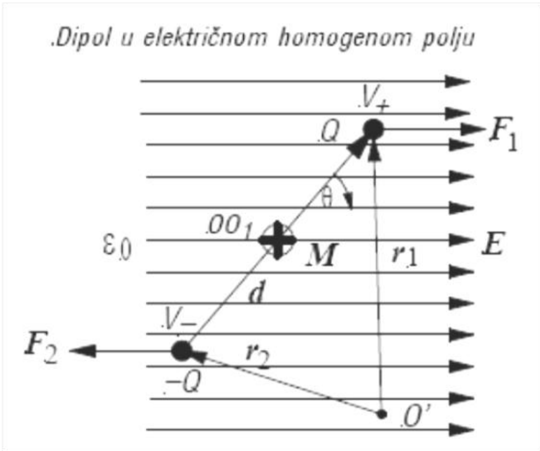
$$\oint_{S_C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_1} E \cdot dS_1 + \int_{S_2} E \cdot dS_2 = E_1 S_1 + E_2 S_2 = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$, pa je polje naelektrisane ravni:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$, sa pravcem i smerom kao na slikama 11.a i 11.b.

Za *homogeno* i *raznorodno* naelektrisane paralelne ravni (1) i (2) u vakuumu (sl. 11c) sa površinskim gustinama naelektrisanja $\pm\sigma$, na osnovu principa superpozicije zaključujemo da se polja tih ravni poništavaju u oblastima I i III, tj. da je $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$=$\boldsymbol{E}_{\mathrm{III}}$=$\mathbf{0}$, dok je u oblasti II rezultantno polje

homogeno i orijentisano od pozitivno prema negativno naelektrisanoj ravni. Intenzitet polja u oblasti II je $E_{II}=2E=\sigma/\varepsilon_0$.
Neka je *d* normalno rastojanje između homogeno naelektrisanih paralelnih ravni (1) i (2) na potencijalima V_1 i V_2 (sl. 11c). Napon između ovih ravni je $U_{12}=V_1-V_2=E_{II}\cdot d$. Dakle, intenzitet *homogenog* električnog polja E_{II} jednak je količniku napona i rastojanja između ravni.

***Električni dipol** je sistem od dva punktualna naelektrisanja Q* (*Q* > 0) *i -Q koja se nalaze na rastojanju d. Dipol karakteriše električni moment **p**=Q·**d**, gde je **d** vektor položaja pozitivnog naelektrisanja Q u odnosu na negativno –Q.*



Kulonove sile koje deluju na naelektrisanja *Q* i -*Q* redom su $\boldsymbol{F}_1=Q\cdot\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{F}_2=-Q\cdot\boldsymbol{E}$, a njihovi momenti u odnosu na *bilo koju* tačku *O*' u polju su $\boldsymbol{M}_1=Q(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{E})$ i $\boldsymbol{M}_2=-Q(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{E})$. Kako je $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2=Q\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{E}=Q\cdot\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$, to je $M=|\boldsymbol{M}|=p\cdot E\cdot\sin\theta$, gde je $p=|\boldsymbol{p}|=Q\cdot d$. Odatle se zaključuje da ako se dipol nađe u stranom *homogenom* električnom polju ***E*** na njega neće delovati nikakva mehanička sila, ali će se pojaviti mehanički moment $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$ koji teži da dipol postavi u pravcu i smeru polja.
Međutim, ako je dipol u stranom *nehomogenom* električnom polju ***E*** na njega pored mehaničkog momenta deluje i električna sila.

Električna kapacitivnost metalnih provodnika u vakuumu

Kada se posmatra *usamljeno metalno telo u vakuumu* naelektrisano količinom elektriciteta *Q*, tada znamo da u njemu ne postoji električno polje, a da je u tačkama na njegovoj površi polje upravno na tu površ i da ima intenzitet $E=|\sigma|/\varepsilon_0$. Sve tačke tela pripadaju ekvipotencijalnoj površi potencijala *V*.
Pozitivna veličina *C*=*Q*/*V*, koja ne zavisi ni od *Q*, ni od *V*, već jedino od oblika i dimenzija tela, zove se ***električna kapacitivnost*** tela. Jedinica za *kapacitivnost* je *Farad* [F]. Kada se naelektrisano metalno telo nalazi u dielektriku, njegova kapacitivnost zavisi i od osobina dielektrika.

*Sistem od dva provodna (metalna) tela naelektrisana jednakim količinama naelektrisanja suprotnog znaka naziva se **električni kondenzator**. Metalna tela se nazivaju obloge ili elektrode kondenzatora i mogu se nalaziti u vakuumu ili nekom drugom dielektriku.*

Električna kapacitivnost kondenzatora definiše se kao:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{Q}{\int_{X_1}^{X_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}$$

Kod kondenzatora sa elektrodama jednostavne geometrije (pločasti, sferni i cilindrični – najčešće se sreću u praksi), kapacitivnost je moguće odrediti analitičkim putem.