

# Procena $P/W$ i $W/S$

## Konstrukcija i tehnologija proizvodnje letelica

Zlatko Petrović & Aleksandar Grbović & Jelena Svorcan &  
Miloš Petrašinović

2019/2020.



## Uvod – 1/5

- Do sada smo definisali moguću količinu goriva u letelici  $W_F$  i poletnu težinu letelice  $W_o$ .
- (Na primeru ultralake letelice  $W_o = 4630$  N i  $W_F/W_o = 0.109$ ).
- Jedini parametar koji ozbiljno utiče na rezultat je finesa  $(L/D)_{\max}$ .
- Literatura obiluje statističkim trendovima na osnovu kojih se mogu proceniti osobine letelice bez da se ona “nacrtá”.
- Osnovni parametri koji kompletno diktiraju konstrukciju letelice su specifična snaga  $P/W$  i specifično opterećenje krila (nosivost)  $W/S$ .



## Uvod – 2/5



## Uvod – 3/5

- Potrebna količina goriva može se proceniti i na osnovu trendova izvedenih konstrukcija:

$$\frac{W_F}{W_o} = \frac{R + 0.5 \cdot V_{\infty}}{800 \cdot (L/D)_{\max}}$$

gde je  $R$  u [km], a brzina krstarenja  $V_{\infty}$  u [km/h].

- Maksimalnu finesu letelice usvojiti na osnovu donje tabele.

**Tabela:** Maksimalna finesa

Kvalitet oblika	$(L/D)_{\max}$
Otvorena kabina, prljava forma	$6 \div 7$
Srednje dobar aerod. oblik	$8 \div 9$
Vrlo dobar aerod. oblik	$10 \div 11$
Izvrstan aerod. oblik	$12 \div 14$



## Uvod – 4/5

- Procenimo količinu goriva na osnovu datog trenda za  $R = 1000$  [km],  $V_\infty = 170$  [km/h],  $(L/D)_{\max} = 9$ :

$$\frac{W_F}{W_o} = \frac{1000 + 0.5 \cdot 170}{800 \cdot 9} = 0.151$$

- Mi smo u prethodnim primerima usvojili izvrsni kvalitet aerodinamičkog oblika, tako da za taj kvalitet:

$$\frac{W_F}{W_o} = \frac{R + 0.5 \cdot V_\infty}{800 \cdot (L/D)_{\max}} = \frac{1000 + 0.5 \cdot 170}{800 \cdot 11.5} \approx 0.118$$

- Na osnovu prethodne analize (proračuna masenog udela) dobijeno je da je udeo goriva u ukupnoj masi letelice  $W_F/W_o = 0.109$ .



## Uvod – 5/5

- Na osnovu trend linije odredićemo dolet za  $W_F/W_o$ :

$$\frac{W_F}{W_o} = 0.109 = \frac{R + 0.5 \cdot 170}{800 \cdot 9} \Rightarrow R \approx 700 \text{ [km]}$$

- Za odličan aerodinamički oblik trend daje:

$$\frac{W_F}{W_o} = 0.109 = \frac{R + 0.5 \cdot 170}{800 \cdot 11.5} \Rightarrow R \approx 918 \text{ [km]}$$

- Možemo zaključiti da trend i analiza sa prethodnog časa daju rezultate sa prihvatljivim razilaženjem.



## Snaga motora – 1/6

- Analiza izvedenih konstrukcija pokazuje slabu korelaciju izmedju specifične snage i težine letelice, ali znatno bolju izmedju snage letelice  $P$  [kW] i njene težine  $W_o$  [N]:

$$P = \begin{cases} 0.0133 \cdot W_o - 18 & \text{sa jednim motorom} \\ 0.0124 \cdot W_o + 91 & \text{sa dva motora} \\ 0.0167 \cdot W_o - 48 & \text{bez obzira na broj motora} \end{cases}$$

- Pogledajmo šta ovi trendovi daju za težinu letelice  $W_o = 4630$  [N]:

$$P = 0.0133 \cdot 4630 - 18 \approx 43.6 \text{ [kW]},$$

$$P = 0.0167 \cdot 4630 - 48 \approx 29.3 \text{ [kW]}$$

- Optimalna snaga motora prema ovim formulama je izmedju 40 i 60 [hp].



## Snaga motora – 2/6

- Specifična snaga za  $P = 43.6$  [kW]:

$$\frac{P}{W} = \frac{43.6 \text{ kW}}{4630 \text{ N}} \approx 9.4 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$

- Specifična snaga za  $P = 29.3$  [kW]:

$$\frac{P}{W} = \frac{29.3 \text{ kW}}{4630 \text{ N}} \approx 6.3 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$

- Kako postoji razilaženje u podacima usvojicemo veću vrednost  $P/W = 9.4$  [W/N].
- Ukoliko se podaci bolje poklapaju moguće je za dalji proračun usvojiti aritmetičku sredinu (srednju specifičnu snagu), ovde:

$$\frac{P}{W} = \frac{9.42 + 6.3}{2} \cdot 10^{-3} \approx 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$





## Snaga motora – 3/6

**Tabela:** Rajmerovi trendovi za  $W/P$ , brzina  $V_{\max}$  u [km/h].

Tip letelice	Trend jednačina [N/W]
Neuvlačivi ST, normalna izvedba	$W/P = 1.87 \cdot V_{\max}^{-0.61}$
Uvlačivi ST, normalna izvedba	$W/P = 2.46 \cdot V_{\max}^{-0.65}$
Neuvlačivi ST, glatka površina	$W/P = 2.15 \cdot V_{\max}^{-0.61}$
Uvlačivi ST, glatka površina	$W/P = 6.60 \cdot V_{\max}^{-0.79}$
Akrobatski	$W/P = 1.49 \cdot V_{\max}^{-0.61}$
"Platneni avioni"	$W/P = 4.84 \cdot V_{\max}^{-0.75}$
Ultralaki	$W/P = 3.08 \cdot V_{\max}^{-0.75}$

## Snaga motora – 4/6

Za  $V_{\max} = 200$  [km/h] i neuvlačivi stajni trap formula glasi:

$$W/P = 1.87 \cdot V_{\max}^{-0.61} = 1.87 \cdot 200^{-0.61} \approx 0.0738 \text{ [N/W]},$$

što odgovara recipročnoj vrednosti:

$$\frac{P}{W} = 13.55 \left[ \frac{W}{N} \right] = 13.6 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$

Za neuvlačivi stajni trap i glatku površinu:

$$W/P = 2.15 \cdot V_{\max}^{-0.61} \approx 0.0849 \text{ [N/W]} \Rightarrow \frac{P}{W} \approx 11.8 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$

što se uklapa sa vrednošću dobijenom iz statističkih trend jednačina:

$$\frac{P}{W} \approx 9.4 \cdot 10^{-3} \text{ [kW/N]}$$



# Snaga motora – 5/6

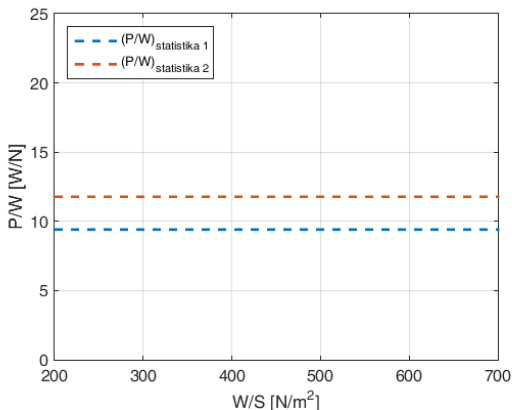
```
% ulazni podaci
Wo = 4630;      % poletna tezina [N]
R = 1000;      % dolet [km]
V = 170;      % brzina krstarenja [km/h]
Vmax = 200;    % max brzina [km/h]
L_Dmax = 9;    % max finesa
f = 1.34102209; % skalirajuci faktor [kW -> hp]

% snaga, statisticki
P1 = 0.0133*Wo - 18; % jedan motor
P_Wo1 = P1/Wo;
P2 = 0.0167*Wo - 48; % uopste
P_Wo2 = P2/Wo;
P_Wo = max(P_Wo1, P_Wo2); % P_Wo = (P_Wo1 + P_Wo2)/2;
% Rejmerovi trendovi
W_P = 2.15*Vmax^(-0.61); % neuvlacivi ST, glatka površina
P_W = 1/W_P/1e3;      % [kW/N]

% skupni grafik P/W = f(W/S)
n = 101; ws = linspace(200, 700, n);
figure
plot(ws, P_Wo*ones(1,n)*1e3, '--', ws, P_W*ones(1,n)*1e3, '--', 'linewidth', 2)
xlabel('W/S [N/m^2]'), ylabel('P/W [W/N]')
box on, grid on, axis([200 700 0 25])
legend('(P/W)_{statistika 1}', '(P/W)_{statistika 2}', 'location', 'northwest')
set(gca, 'fontsize', 12)
```



## Snaga motora – 6/6



Slika: Grafik mogućih specifičnih opterećenja  $W/S$  i snaga  $P/W$ .



## Opterećenje krila – 1/4

- Trend površine krila  $S$  u  $[\text{m}^2]$ , gde je  $W_o$  u  $[\text{N}]$ :

$$S = \begin{cases} S = 10.1 + 0.419 \cdot 10^{-3} \cdot W_o & \text{za jednomotorni avion} \\ S = 9.48 + 0.352 \cdot 10^{-3} \cdot W_o & \text{za dvomotorni avion} \\ S = 11.4 + 0.297 \cdot 10^{-3} \cdot W_o & \text{opšti trend} \end{cases}$$

- Za  $W_o = 4630$   $[\text{N}]$  dobijamo:

$$S = 10.1 + 0.419 \cdot 4.63 \approx 12.04 \text{ } [\text{m}^2],$$

$$S = 11.4 + 0.297 \cdot 4.63 \approx 12.78 \text{ } [\text{m}^2]$$

- Dobijene površine krila ( $S = 12.04 \div 12.78$   $[\text{m}^2]$ ) se dobro uklapaju u površine već izvedenih letelica.



## Opterećenje krila – 2/4

- Opterećenje krila za  $S = 12.04 \text{ [m}^2\text{]}$ :

$$\frac{W}{S} = \frac{4630}{12.04} \approx 385 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

- Opterećenje krila za  $S = 12.78 \text{ [m}^2\text{]}$ :

$$\frac{W}{S} = \frac{4630}{12.78} \approx 362 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

- Srednja vrednost opterećenja krila:

$$\frac{W}{S} = \frac{362 + 385}{2} \approx 374 \text{ [N/m}^2\text{]} \Rightarrow S = \frac{W_o}{374} = \frac{4630}{374} \approx 12.4 \text{ [m}^2\text{]}$$



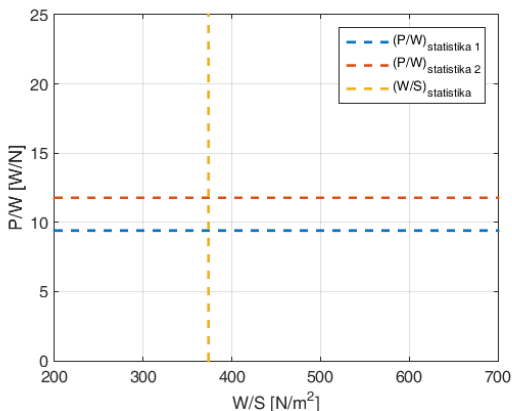
## Opterećenje krila – 3/4

### Nastavak skripta ...

```
% opterecenje krila, statisticki
S1 = 10.1 + 0.419e-3*Wo;      % jedan motor
W_S1 = Wo/S1;
S2 = 11.4 + 0.297e-3*Wo;      % opsti trend
W_S2 = Wo/S2;
W_S = (W_S1 + W_S2)/2;
S = Wo/W_S;
hold on, plot(W_S*ones(1,n), linspace(0,25,n), '--', 'linewidth', 2)
legend(' (P/W)_{statistika 1}', ' (P/W)_{statistika 2}', ...
      ' (W/S)_{statistika}', 'location', 'northeast')
```



## Opterećenje krila – 4/4

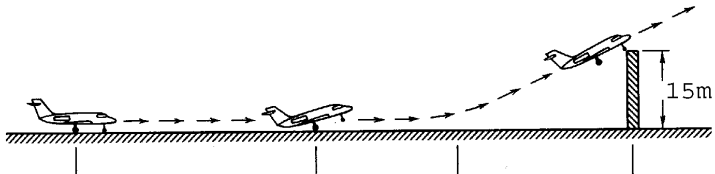


Slika: Grafik mogućih specifičnih opterećenja  $W/S$  i snaga  $P/W$ .





# Poletanje – 1/11



**Slika:** Dužina zaleta i dužina poletanja. Faze poletanja su zalet, rotacija, uzlet i polet.

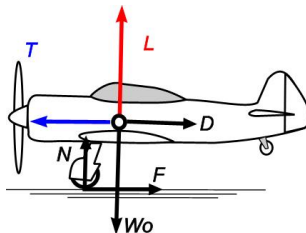


## Poletanje – 2/11

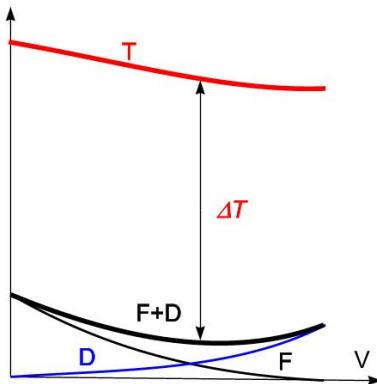
- Povećanje energije letelice u trenutku preletanja prepreke od 15 [m] (kinetička + potencijalna):

$$\Delta E_{pol} = E_{h=15} = W_o \left( \frac{V_{pol}^2}{2g} + 15 \right)$$

- Sile koje deluju na letelicu dok se kreće po zemlji prikazane su na sledećoj skici:



## Poletanje – 3/11



**Slika:** Vučna sila elise znatno je veća od ostalih sila u pravcu kretanja.



## Poletanje – 4/11

- Uložena energija u zaletu:

$$\Delta E_{pol} = \Delta T \cdot L_{pol}$$

- Izjednačavanjem:

$$\Delta T \cdot L_{pol} = W_o \left( \frac{V_{pol}^2}{2g} + 15 \right)$$

- Nalazimo dužinu poletanja:

$$L_{pol} = \frac{V_{pol}^2/(2g) + 15}{\Delta T/W_o}$$



## Poletanje – 5/11

- Brzina poletanja je  $V_{pol} = k_{pol} \cdot V_s$  gde je  $V_s$  brzina otcepljenja strujanja (brzina stolinga), a  $k_{pol} \geq 1.2$ .
- Iz jednakosti sile uzgona i težine letelice:

$$V_{pol}^2 = k_{pol}^2 \cdot \frac{2 \cdot W_o}{\rho \cdot S \cdot C_{L_{max}}}$$

- Izraz za dužinu poletanja glasi:

$$L_{pol} = \frac{k_{pol}^2 W / S + 15 \rho g C_{L_{max}}}{\rho g C_{L_{max}} \left( \frac{T}{W_o} - \frac{F+D}{W_o} \right)_{sr}}$$



## Poletanje – 6/11

- U prethodnoj jednačini se mogu zanemariti (kao manje značajni članovi):

$$15 \varrho g C_{L_{\max}}, \quad \text{i:} \quad \frac{F + D}{W_o}$$

- Tako da izraz za dužinu poletanja glasi približno:

$$L_{pol} \approx \frac{k_{pol}^2 \frac{W}{S}}{\varrho g C_{L_{\max}} \left( \frac{T}{W_o} \right)_{sr}} = k_p \cdot \frac{\frac{W}{S}}{C_{L_{\max}} \frac{T}{W}} = k_p U_{pol},$$

gde je  $U_{pol}$  generalizovani parametar poletanja.



## Poletanje – 7/11

- Kako je specifična snaga ( $P/W$ ) proporcionalna specifičnom potisku ( $T/W$ ) to možemo napisati:

$$U_{pol} = \frac{W/S}{C_{L_{max}} P/W} \quad [N^2/W \cdot m^2]$$

- Statistički trend za dužinu poletne staze:

$$L_{pol} = 9.25 \cdot U_{pol} + 74.2$$

- Statistički trend za dužinu zaleta:

$$L_{zal} = 8.13 \cdot U_{pol} - 68.8$$



## Poletanje – 8/11

- Iz jednačine za dužinu poletanja:

$$\frac{P}{W} = \frac{9.25 \cdot W/S}{C_{L_{\max}} \cdot (L_{pol} - 74.2)}$$

- A iz jednačine za zalet:

$$\frac{P}{W} = \frac{8.13 \cdot W/S}{C_{L_{\max}} \cdot (L_{zal} + 68.8)}$$

gde je sa  $C_{L_{\max}}$  označen maksimalni koeficijent uzgona pri poletanju!





## Poletanje – 9/11

- Ako ograničimo dužinu zaleta na  $L_{zal} = 150$  [m] i koeficijent uzgona na vrednost u opsegu  $C_{L_{max}} = 1.2 \div 1.4$ , tada izmedju  $P/W$  [W/N] i  $W/S$  [N/m<sup>2</sup>] postoji linearna zavisnost:

$$\frac{P}{W} = \frac{8.13 \cdot W/S}{1.2 \cdot (68.8 + 150)}, \quad \text{i} \quad \frac{P}{W} = \frac{8.13 \cdot W/S}{1.4 \cdot (68.8 + 150)}$$

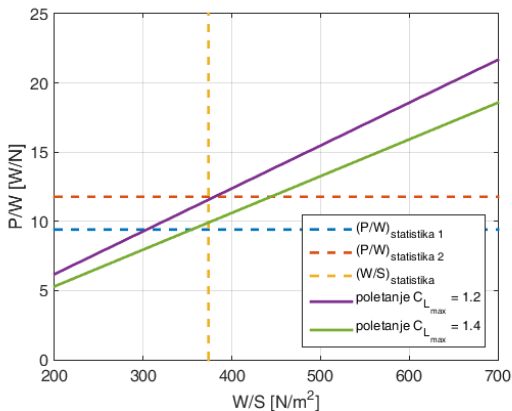
- Ili nakon sredjivanja:

$$\frac{P}{W} \geq 3.1 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{W}{S}, \quad \text{i:} \quad \frac{P}{W} \geq 2.65 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{W}{S}$$

- Obe zavisnosti su prikazane dijagramom ...



# Poletanje – 10/11



Slika: Potrebna snaga pri poletanju za  $C_{L_{max}} = 1.2$  i  $C_{L_{max}} = 1.4$ .



## Poletanje – 11/11

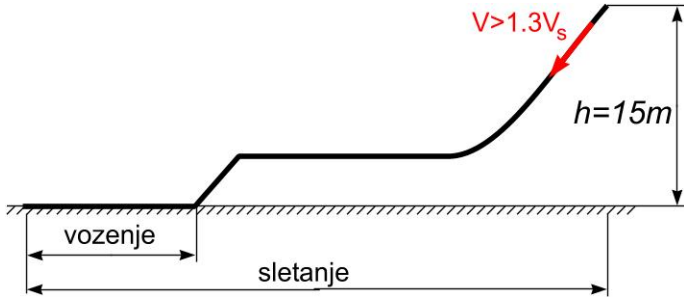
Maksimalna vrednost koeficijenta uzgona  $C_{L_{\max}} = 1.2$  odgovara krilu bez mehanizacije, a  $C_{L_{\max}} = 1.4$  krilu sa prostim zakrilcem.

Nastavak skripta ...

```
% poletanje
Lzal = 150; % [m]
Clmx = [1.2, 1.4];
kpol = 8.13/(68.8 + Lzal)./Clmx;
hold on, plot(ws, kpol*ws, 'linewidth', 2)
legend('(P/W)_{statistika 1}', '(P/W)_{statistika 2}', ...
      '(W/S)_{statistika}', 'poletanje C_{L_{\max}} = 1.2', ...
      'poletanje C_{L_{\max}} = 1.4', 'location', 'southeast')
```



# Sletanje – 1/10



**Slika:** Dužina voženja i dužina sletanja. Faze sletanja su planiranje, ravnanje i pridržavanje i voženje.



## Sletanje – 2/10

- Pri sletanju su od interesa dve dužine:
  - ▶ Dužina zaustavnog traga letelice,
  - ▶ Dužina od trenutka preleta prepreke od 15 [m] do zaustavljanja letelice.
- Pri sletanju letelica ima manju težinu od težine na poletanju.
- Smanjenje težine letelice se može uzeti u obzir na osnovu statističkih podataka iz sledeće tabele.



# Sletanje – 3/10

**Tabela:** Koeficijent umanjenja težine pri sletanju ( $K_{ut}$ )

Broj motora	Koeficijent umanjenja težine		
	Minimalni	Srednji	Maksimalni
Jedan	0.95	0.99	1.00
Dva	0.88	0.99	1.00

$$K_{ut} = \frac{W_{o,sl}}{W_o}$$



## Sletanje – 4/10

- Dužinu voženja možemo odrediti ako znamo srednji intenzitet usporenja:

$$L_{voz} = \frac{V_{sl}^2}{2 \cdot a_{sl}},$$

gde je  $V_{sl} = k_{sl} \cdot V_{ss}$ , a  $V_{ss}$  odgovara brzini otcepljenja strujanja u konfiguraciji za sletanje, dok je  $k_s = 1.3$  (zavisi od propisa).

- Usporenje  $a_{sl}$  najvećim delom ( $60 \div 70\%$ ) zavisi od trenja kotrljanja pri kočenju točkovima:

$$a_{sl} = k_v \cdot f_{tt} \cdot g$$

gde je  $f_{tt}$  koef. trenja kotrljanja pri kočenju;  $k_v$  – koef. proporcionalnosti pri voženju, a  $g = 9.80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$ .



## Sletanje – 5/10

- Dužina vozne staze je tada:

$$L_{voz} = \frac{k_{sl}^2 \cdot V_{ss}^2}{2g \cdot k_v \cdot f_{tt}} = K \cdot V_{ss}^2$$

gde je  $V_{ss}$  u [km/h].

- Trend za letelice sertifikovane po FAR 23 glasi:

$$L_{voz} = 0.0235 \cdot V_{ss}^2$$

- Dužina sletne staze  $L_{sl}$  se određuje iz trenda za istu klasu letelica:

$$L_{sl} = 1.938 \cdot L_{voz}$$

- Brzina otcepljenja strujanja pri sletanju (u [m/s]):

$$V_{ss} = \sqrt{\frac{2W_{o,sl}}{S \cdot \rho \cdot C_{L_{max,sl}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_{ut} \cdot W_o / S}{\rho \cdot C_{L_{max,sl}}}}$$





## Sletanje – 6/10

- Opterećenje krila se može naći iz izraza za dužinu vožnja:

$$\frac{W}{S} = 1.642 \cdot \frac{\rho \cdot C_{L_{\max,sl}} \cdot L_{voz}}{K_{ut}},$$

- Odnosno (preko dužine sletanja):

$$\frac{W}{S} = 0.847 \cdot \frac{\rho \cdot C_{L_{\max,sl}} \cdot L_{sl}}{K_{ut}}.$$



## Sletanje – 7/10

Odredimo potrebno opterećenje krila da bi dužina voženja bila manja od 100 [m], pri maksimalnom koeficijentu uzgona pri sletanju  $C_{L_{\max,sl}} = 1.8$ . Za  $K_{ut}$  usvojiti 1.0.

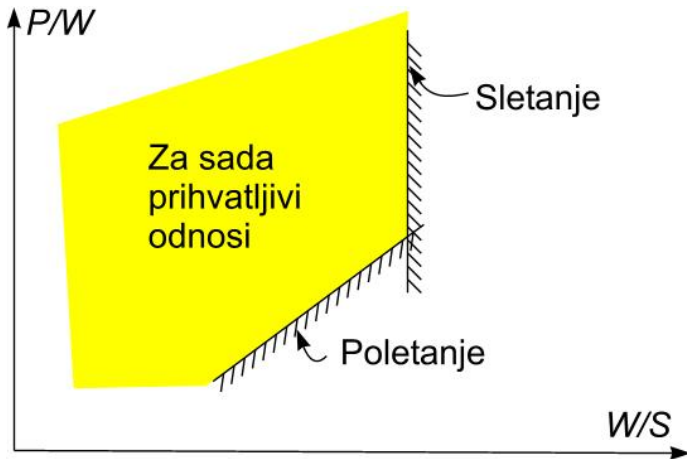
Na osnovu trenda sa prethodnog slajda:

$$\frac{W}{S} \leq 1.642 \cdot \frac{\rho \cdot C_{L_{\max,sl}} \cdot L_{voz}}{K_{ut}} = 1.642 \cdot \frac{1.225 \cdot 1.8 \cdot 100}{1} \approx 362 \text{ [Pa]}$$

Do sada smo iznašli dve granice za  $P/W$  i  $W/S$  odnose, sledeći slajd principijelno to prikazuje u  $P/W-W/S$  koordinatnom sistemu.



## Sletanje – 8/10



## Sletanje – 9/10

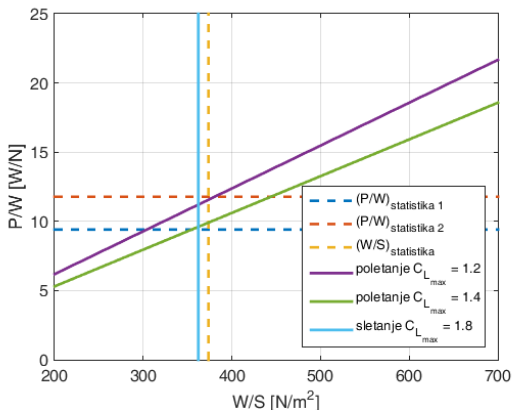
Opet, pretpostavljena maksimalna vrednost koeficijenta uzgona  $C_{L_{\max}} = 1.8$  u sletanju odgovara krilu sa prostim zakrilcem, ali većim uglom otklona nego u poletanju!

Nastavak skripta ...

```
Lvoz = 100; % [m]
Clmx2 = 1.8; Kut = 1; rho = 1.225;
W_Sslet = 1.642*rho*Clmx2*Lvoz/Kut;
hold on, plot(W_Sslet*ones(1,n), linspace(0,50,n), 'linewidth', 2)
legend('P/W_{statistika 1}', 'P/W_{statistika 2}', ...
      '(W/S)_{statistika}', 'poletanje C_{L_{\max}} = 1.2', ...
      'poletanje C_{L_{\max}} = 1.4', 'sletanje C_{L_{\max}} = 1.8', 'location', 'southeast')
```



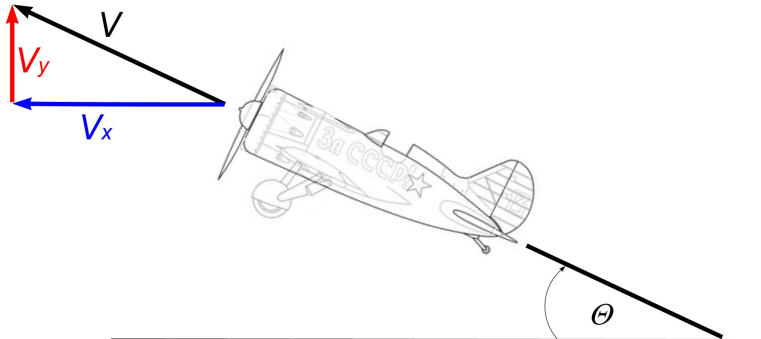
## Sletanje – 10/10



Slika: Dosadašnji grafik mogućih vrednosti  $P/W$  i  $W/S$ .



# Penjanje – 1/13



## Penjanje – 2/13

- Brzina penjanja  $V_y$  i gradijent (ugao) penjanja  $\Theta$  definisani su propisima.
- ASTM F 2245 paragraf 4.4.3.1 zahteva minimalnu brzinu penjanja od 95 m/min, (1.6 [m/s]).
- Dok ASTM F 2245 paragraf 4.4.3.2 zahteva da gradijent penjanja bude veći od 1/12 ( $4.78^\circ$ ).
- Snaga motora ne sme biti veća od maksimalno dozvoljene trajne snage.
- Zakrilca u poletnom položaju.
- Minimalni korisni teret prema ASTM 4.1.2 mora biti:

$$W_U = 1690 + 3 \cdot P \text{ [N]}, \quad (W_U = 845 + 3 \cdot P, \quad \text{za jednosed})$$

gde je  $P$  u [kW].

## Penjanje – 3/13

- Brzina penjanja zavisi od razlike izmedju raspoložive snage motora  $P_r$  i potrebne snage motora za horizontalni let na datoj visini  $P_p$ :

$$V_y = \frac{P_r - P_p}{W}$$

- Raspoloživa snaga zavisi od ugradjenog motora:

$$P_r = n_{mot} \cdot P_{eH} \cdot \eta_e$$

gde su  $n_{mot}$  broj motora u letelici,  $P_{eH}$  – snaga jednog motora na visini  $H$ ,  $\eta_e$  – koeficijent efikasnosti elise.

- Potrebna snaga je proizvod sile otpora  $D$  i horizontalne brzine  $V_x$ :

$$P_p = D \cdot V_x$$





## Penjanje – 4/13

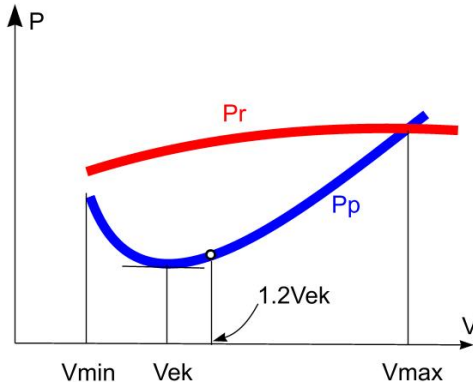
- Zamenom prethodnih izraza za snagu u izraz za  $V_y$ :

$$V_y = \frac{n_{mot} \cdot P_{eH} \cdot \eta_e}{W_o} - \frac{V_x}{W_o} \cdot D$$

- Optimalna brzina je za 20% veća od ekonomične brzine  $V_{ek}$ .
- Možemo zaključiti da režim penjanja odgovara letu pri maksimalnoj finesi.
- Sledeći slajd pokazuje tipičan dijagram potrebne i raspoložive snage.



# Penjanje – 5/13



## Penjanje – 6/13

- Brzina horizontalnog leta pri penjanju:

$$V_P = \sqrt{\frac{2W_o}{\sigma \cdot C_{L_P} \cdot S}}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_o}$$

- Zamenom u izraz za brzinu penjanja:

$$V_{y_{\max}} = \frac{n_{\text{mot}} \cdot P_{eH} \cdot \eta_e}{W_o} - \frac{C_{D_P}}{C_{L_P}^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{2W_o}{\sigma \cdot S}}$$

- Gde su  $C_{L_P}$  i  $C_{D_P}$  koeficijenti uzgona i otpora pri maksimalnoj finesi.



## Penjanje – 7/13

- U izvodjenju smo zanemarili utrošak goriva, tako da za  $H = 0$  [m]:

$$V_{yH=0} \cong 0.67 \cdot \frac{P}{W} - \frac{C_{D_P} \sqrt{2}}{C_{L_P}^{3/2}} \sqrt{\frac{W}{S}}$$

- Pošto po propisima mora biti  $V_y \geq 1.6$  [m/s]:

$$1.6 \leq 0.67 \cdot \frac{P}{W} - \frac{C_{D_P} \sqrt{2}}{C_{L_P}^{3/2}} \sqrt{\frac{W}{S}}$$



## Penjanje – 8/13

- Iz prethodne jednačine se može izraziti  $P/W$ :

$$\frac{P}{W} \approx 2.24 + 2.11 \cdot \frac{C_{D_P}}{C_{L_P}^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}}$$

- Dalja aproksimacija gornje jednačine zahteva razmatranje polare letelice u poletanju:

$$C_{D_{POL}} = C_{D_{oPOL}} + \frac{C_{L_{POL}}^2}{\pi \cdot \mathcal{R} \cdot e}$$

- Indeks  $POL$  označava poletnu konfiguraciju.



## Penjanje – 9/13

- Otpor pri nultom uzgonu:

$$C_{D_{oPOL}} = C_{D_{oplaner}} + \Delta C_{D_{omeh}} + \Delta C_{D_{ostaj}}$$

- Priraštaj otpora zbog mehanizacije:

$$\Delta C_{D_{omeh}} = \begin{cases} 0 & \text{Bez odklonjenih zakrilaca} \\ 0.010 \div 0.015 & \text{Prosti zakrilci ili zakrilci Faulera} \\ 0.015 \div 0.020 & \text{Zakrilci sa procepom} \end{cases}$$



## Penjanje – 10/13

- Priraštaj otpora stajnog trapa:

$$\Delta C_{D_{o_{staj}}} = \begin{cases} 0 & \text{uvlačivi stajni trap} \\ 0.015 \div 0.025 & \text{neuvlačivi stajni trap} \end{cases}$$

- Formula za procenu čeonog otpora planera kada je  $C_L = 0$ :

$$C_{D_{o_{planer}}} = \frac{W}{S} \cdot C_{fe} \cdot k_1 \cdot (W_o/10)^{\beta-1}$$

- Gde se koeficijenti  $k_1$  i  $\beta$  dati tabelom na sledećem slajdu ...



# Penjanje – 11/13

**Tabela:** Koeficijenti za jednačinu sa prethodnog slajda

Broj motora	$C_{fe}$	$k_1$	$\beta$
1 motor	0.006	0.171	0.5147
2 motora	0.007	0.106	0.5632

- Zamenom u izraz za otpor letelice:

$$C_{D_{oPOL}} = \frac{W}{S} \cdot C_{fe} \cdot k_1 \cdot W_o^{\beta-1} + \Delta C_{D_{o_meh}} + \Delta C_{D_{o_{staj}}}$$

- Poznate su sledeće zavisnosti medju aerodinamičkim koeficijentima:

$$C_{DP} = 2C_{D_{oPOL}}, \quad C_{LP} = \sqrt{\pi Re C_{D_{oPOL}}}$$





## Penjanje – 12/13

- Zamenom prethodnih aproksimacija u izraz za specifičnu snagu dobija se:

$$\frac{P}{W} = 2.24 + 2.11 \cdot \frac{2C_{D_{oPOL}}}{[\pi Re C_{D_{oPOL}}]^{3/4}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}}$$

- Vitkost lakih letelica se kreće u granicama:  $Re = 7.31 \pm 0.84$ .
- Dok je Osvaldov koeficijent efikasnosti:

$$e = \begin{cases} 0.75 \dots 0.85 & \text{za krilo bez mehanizacije} \\ 0.75 \dots 0.80 & \text{za krilo sa izvučenom mehanizacijom} \end{cases}$$



## Penjanje – 13/13

- Iz uslova potrebnog penjanja letelice na nivou mora od  $V_{y_{\max}} \geq 1.6$  [m/s]:

$$\frac{P}{W_o} \geq 2.24 + k_2 \sqrt{\frac{W_o}{S}} \cdot \sqrt[4]{C_{D_o_{POL}}}$$

- Gde je koeficijent  $k_2 = 0.40 \div 0.45$ .



## Gradijent penjanja – 1/9

- Ukoliko propisi propisuju gradijent penjanja on se odnosi na režim maksimalne brzine penjanja.
- S obzirom da je ugao penjanja mali,  $\theta < 5^\circ$ , važi aproksimacija:

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \cong \frac{V_y}{V}$$

- Koristeći se već izvedenom relacijom:

$$\theta \cong \frac{V_y}{V} = \frac{n_{\text{mot}} \cdot P_{eH} \cdot \eta_e}{V \cdot W_o} - \frac{D}{W_o}$$



## Gradijent penjanja – 2/9

- Imajući u vidu da je:

$$\frac{\varrho}{2} C_L V^2 S = W_o, \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2}{\varrho} \cdot \frac{W_o}{S} \cdot \frac{1}{C_L}}$$

- Za  $H = 0$ ,  $\eta = 0.8$  i  $\varrho = 1.225 \text{ [kg/m}^3\text{]}$  dobija se za ugao penjanja:

$$\theta = 0.053 \cdot \frac{P/W_o}{\sqrt{W_o/S}} \sqrt{C_{LP}} - \frac{1}{(L/D)_{P_{\max}}}$$

- Pri čemu je maksimalna finesa u penjanju:

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{P_{\max}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi Re}{C_{D_{oPOL}}}}$$



## Gradijent penjanja – 3/9

- Preko aerodinamičkih koeficijenata:

$$\theta = 0.053 \frac{P/W_o}{\sqrt{W_o/S}} \left( \pi Re C_{D_oPOL} \right)^{1/4} - 2 \sqrt{\frac{C_{D_oPOL}}{\pi Re}}$$

- Ili nakon zamene statističkih vrednosti za  $Re$  i  $e$ :

$$\theta = 1.115 \cdot \frac{P/W_o}{\sqrt{W_o/S}} \sqrt[4]{C_{D_oPOL}} - 0.453 \sqrt{C_{D_oPOL}}$$



## Gradijent penjanja – 4/9

- Na osnovu poslednje jednačine

$$\frac{P}{W_o} \geq 0.896 \cdot \sqrt{W_o/S} \cdot \left( \frac{\theta}{\sqrt[4]{C_{D_oPOL}}} + 0.453 \sqrt[4]{C_{D_oPOL}} \right)$$



## Gradijent penjanja – 5/9

### Primer

Za LSA letelicu težine 4630 [N] bez mehanizacije odredi zavisnost izmedju  $P/W_o$  i  $W_o/S$  ako je zahtevana maksimalna brzina penjanja  $V_y \geq 1.6$  [m/s], a zahtevani minimalni gradijent penjanja  $\theta = 0.0833$  ( $\theta \cong 4.8^\circ$ ).



## Gradijent penjanja – 6/9

### Rešenje:

Poletni koeficijent otpora:

$$C_{D_{oPOL}} = C_{D_{oplaner}} + \Delta C_{D_{omeh}} + \Delta C_{D_{ostaj}}$$

gde je  $\Delta C_{D_{omeh}} = 0$ ,  $\Delta C_{D_{ostaj}} = 0.025$ , a:

$$C_{D_{oplaner}} = \frac{W_o}{S} \cdot C_{fe} k_1 (W_o/10)^{\beta-1} = \frac{W_o}{S} \cdot 0.006 \cdot 0.171 \cdot (4630/10)^{0.5147-1}$$

$$C_{D_{oplaner}} = 0.0000522 \cdot \frac{W_o}{S}, \quad C_{D_{oPOL}} = 0.025 + 0.0000522 \cdot \frac{W_o}{S}$$





## Gradijent penjanja – 7/9

Iz uslova  $V_{y_{\max}} \geq 1.6$  [m/s]:

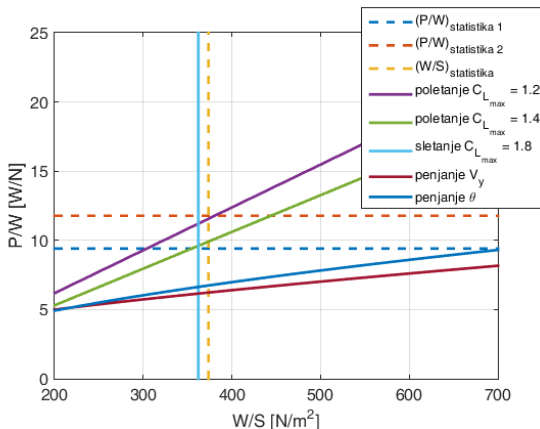
$$\frac{P}{W_o} \geq 2.24 + 0.4 \cdot \sqrt{\frac{W_o}{S}} \cdot \sqrt[4]{0.025 + 0.0000522 \cdot \frac{W_o}{S}}$$

Iz uslova ugla penjanja ( $\theta = 0.0833$ ):

$$\begin{aligned} \frac{P}{W_o} \geq & 0.896 \cdot \sqrt{\frac{W_o}{S}} \cdot \left( \frac{0.0833}{\sqrt[4]{0.025 + 0.0000522 \cdot \frac{W_o}{S}}} \right. \\ & \left. + 0.453 \cdot \sqrt[4]{0.025 + 0.0000522 \cdot \frac{W_o}{S}} \right) \end{aligned}$$



# Gradijent penjanja – 8/9



Slika: Dosadašnji grafik mogućih vrednosti  $P/W$  i  $W/S$ .



# Gradijent penjanja – 9/9

## Nastavak skripta ...

```
% penjanje
Vy = 95/60; % brzina penjanja [m/s]
theta = 1/12; % gradijent penjanja [rad]
Cfe = 0.006; k1 = 0.171; beta = 0.5147;
dCdostaj = 0.025;
kCdop = Cfe*k1*(Wo/10)^(beta-1);
Cdo = dCdostaj + kCdop*ws;
k2 = 0.45;
P_Wopol1 = 2.24 + k2*sqrt(ws).*Cdo.^(1/4); % brzina
P_Wopol2 = 0.896*sqrt(ws).*(theta./Cdo.^(1/4) + 0.453*Cdo.^(1/4)); % ugao
plot(ws, P_Wopol1, ws, P_Wopol2, 'linewidth', 2)
legend('(P/W)_{statistika 1}', '(P/W)_{statistika 2}', ...
    '(W/S)_{statistika}', 'poletanje C_{L_{max}} = 1.2', ...
    'poletanje C_{L_{max}} = 1.4', 'sletanje C_{L_{max}} = 1.8', ...
    'penjanje V_y', 'penjanje \theta', 'location', 'southeast')
```



## Brzinska karakteristika – 1/8

- Horizontalni let – uravnotežene sile, jednake potrebna i rasplōživa snaga.
- Maksimalna horizontalna brzina  $V_{\max}$  se ostvaruje u letu pri maksimalnoj trajnoj snazi:

$$C_D \frac{\rho_H V_{\max}^3}{2} S = n_{\text{mot}} P_{eH} \eta_M \eta_e$$

- $\eta_M = 0.8 \dots 0.9$  za motore sa turbopunjačem, za ostale motore  $\eta_M = 1.0$ .
- Takođe:

$$n_{\text{mot}} P_{eH} = P_o \cdot A_H, \quad A_H = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad \text{bez turbopunjača (1)}$$



## Brzinska karakteristika – 2/8

- Deljenjem jednačine ravnoteže sa  $W_o$ :

$$V_{\max} = \sqrt[3]{\frac{2(P_o/W_o)A_H\eta_M\eta_e(W_o/S)}{C_D\sigma\varrho_o}}$$

- i razdvajanjem na činioce:

$$V_{\max} = \sqrt[3]{\frac{2\eta_e}{\varrho C_D}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(P_o/W_o)\eta_M A_H(W_o/S)}{\sigma}}$$

gde je  $\sigma = \varrho/\varrho_o$ .

- Odavde proizilazi da maksimalna brzina zavisi od letnog parametra  $U_{let}$  datog na sledećem slajdu ...



## Brzinska karakteristika – 3/8

- Drugi član je:

$$U_{let} = \sqrt[3]{\frac{(P_o/W_o)\eta_M A_H (W_o/S)}{\sigma}}$$

- tako da je

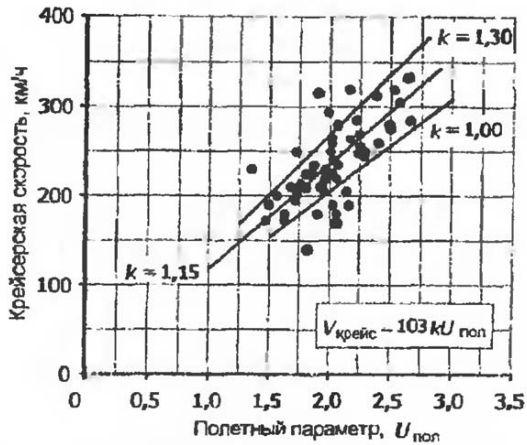
$$V_H = f(U_{let})$$

- Statistička analiza daje za brzinu krstarenja:

$$V_H = 103k_3 U_{let}, \quad k_3 = \begin{cases} 1.00 & \text{Biplani, fiksni trap} \\ 1.15 & \text{Monoplani bez upornica,} \\ & \text{fiksni trap} \\ 1.30 & \text{Monoplani sa} \\ & \text{uvlačivim st. trapom} \end{cases}$$



## Brzinska karakteristika – 4/8



## Brzinska karakteristika – 5/8

- Iz zadate brzine krstarenja  $V_H$ :

$$\frac{P_o}{W_o} \geq \frac{745.7 \cdot \sigma}{0.65 A_H (W_o/S)} \left( \frac{V_H}{103 \cdot k_3} \right)^3$$

- Iz zadate maksimalne brzine  $V_{\max}$ :

$$\frac{P_o}{W_o} \geq \frac{745.7 \cdot \sigma}{A_H (W_o/S)} \left( \frac{V_{\max}}{103 \cdot k_3} \right)^3$$





## Brzinska karakteristika – 6/8

### Primer

Odredi zavisnost  $P/W$  od odnosa  $W/S$  za letelicu čija je brzina krstarenja  $V = 170$  [km/h] na nivou mora, a maksimalna brzina  $V_{\max} = 200$  [km/h]. Motor je bez turbopunjača tako da se može smatrati da je  $A_H \cong \sigma$ .

### Rešenje

Za  $A_H \cong \sigma = 1$  i  $k_3 = 1.0$  jednačine glase:

$$\frac{P}{W} = \frac{745.7}{0.65 \cdot (W/S)} \left( \frac{V_H}{103 \cdot 1.0} \right)^3 = \frac{0.001}{W/S} 170^3 \cong \frac{5158}{W/S}$$



## Brzinska karakteristika – 7/8

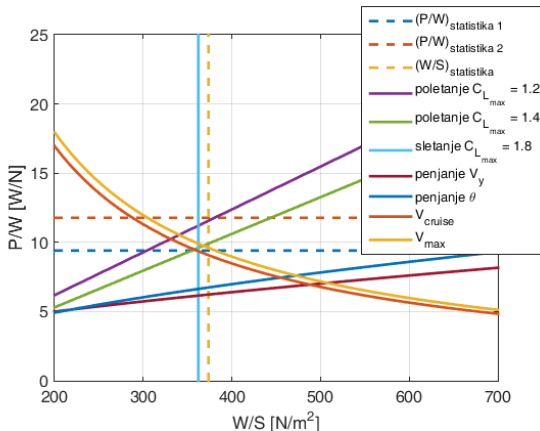
$$\frac{P}{W} = \frac{745.7}{(W/S)} \cdot \left( \frac{V_{\max}}{103 \cdot 1.0} \right)^3 = \frac{6.824 \cdot 10^{-4}}{W/S} 200^3 = \frac{5459}{W/S}$$

Nastavak skripta ...

```
% horizontalni let
Ah = 1; k3 = 1.15; sig = 1;
P_Whor1 = 745.7*sig/0.65/Ah./ws*(V/103/k3)^3;
P_Whor2 = 745.7*sig/Ah./ws*(Vmax/103/k3)^3;
plot(ws, P_Whor1, ws, P_Whor2, 'linewidth', 2)
legend('(P/W)_{statistika 1}', '(P/W)_{statistika 2}', ...
      '(W/S)_{statistika}', 'poletanje C_{L_{max}} = 1.2', ...
      'poletanje C_{L_{max}} = 1.4', 'sletanje C_{L_{max}} = 1.8', ...
      'penjanje V_y', 'penjanje \theta', 'V_{cruise}', 'V_{max}', 'location', 'southeast')
```



# Brzinska karakteristika – 8/8



Slika: Dosadašnji grafik mogućih vrednosti  $P/W$  i  $W/S$ .



## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S - 1/11$

Dozvoljena oblast promena parametara:

- za  $P/W$  i  $W/S$ :

$$0.5 \cdot (W/S)_{stat} \leq W/S \leq 1.5(W/S)_{stat}$$

i:

$$0.5 \cdot (P/W)_{stat} \leq P/W \leq 1.5(P/W)_{stat}$$

- Vršiti se izbor konstrukcije krila (sa mehanizacijom ili bez nje). Orijentacioni podaci za  $C_{L_{max}}$  su dati u sledećoj tabeli.



## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S - 2/11$

**Tabela:** Otkloni zakrilaca i maksimalni koeficijent uzgona

Vrsta mehanizacije krila	Ugao otklona		$C_{L_{\max}}$	
	Poletanje	Sletanje	Poletanje	Sletanje
Bez mehanizacije	–		1.2 ... 1.4	
Prosto zakrilce	20°	60°	1.4 ... 1.6	1.7 ... 2.0
Zakrilce sa procepom	20°	40°	1.5 ... 1.7	1.8 ... 2.2
Zakrilce sa 2 procepa	20°	50°	1.7 ... 1.95	2.3 ... 2.7
Zakrilce Fauler	15°	40°	2.0 ... 2.2	2.5 ... 2.9

## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 3/11

- Definiše se aerodinamička sposobnost zakrilaca (prethodna tabela).
- Za svaku varijantu mehanizacije određuje se odgovarajući koeficijent uzgona pri poletanju  $C_{L_{\max, Pol}}$  i određuje odgovarajuća zavisnost  $P/W - W/S$ .
- Za svaku varijantu mehanizacije određuje se maksimalni koeficijent uzgona pri sletanju  $C_{L_{\max, Slet}}$  i odgovarajuća zavisnost  $P/W - W/S$ .
- Za svaku varijantu mehanizacije u skladu sa propisima za brzinu i gradijent penjanja određuje se zavisnost  $P/W - W/S$ .

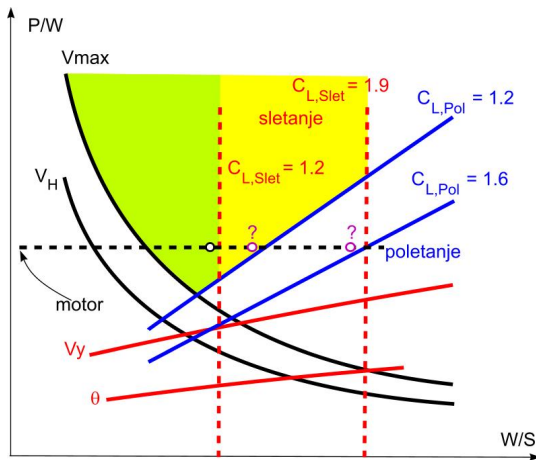


## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S - 4/11$

- Odredjuje se zavisnost  $P/W - W/S$  prema zadatoj brzini krstarenja i maksimalnoj brzini letelice.
- Sve dobijene zavisnosti  $P/W$  u funkciji  $W/S$  se unose dijagramski kako bi se odredila zona prihvatljivih odnosa  $P/W$  i  $W/S$ .
- Sledeći slajd principijelno prikazuje dijagram zavisnosti  $P/W$  i  $W/S$ .
- Zbog moguće naknadne promene težine letelice ili zbog varijacija usled primene tačnijih proračuna birati  $P/W - W/S$  uredjeni par **u oblasti** dozvoljenih parametara!

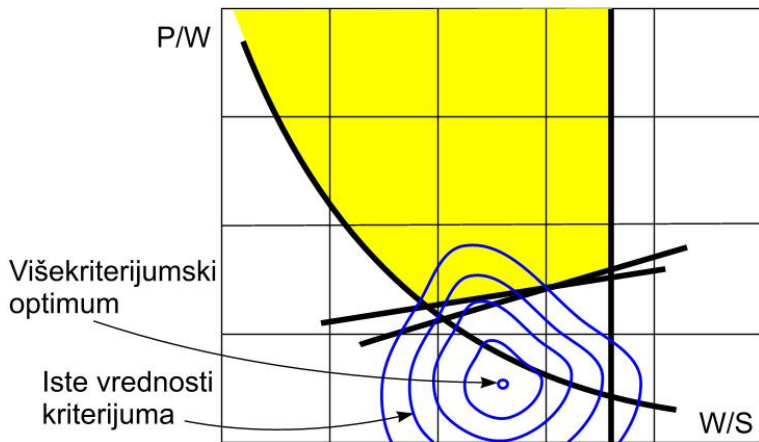


# Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 5/11





## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 6/11



## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 7/11

- Pri kasnijim modifikacijama letelice lakše je uzeti jači motor nego modifikovati celo krilo.
- Prevelika površina krlila nepotrebno smanjuje ekonomičnost letelice.
- Osnovni parametar koji se uz  $P/W$  i  $W/S$  u ovoj fazi određuje je doprinos mehanizacije krila maksimalnom koeficijentu uzgona.
- Uvek treba procenjivati dobiti komplikovane mehanizacije u odnosu na prostu i pouzdanu izvedbu letelice!



## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 8/11

- Kako nam je za našu letelicu definisana maksimalna masa moraćemo pregledati raspoložive motore i izračunati za svaki  $P/W$  i ucrtati linije na prethodni dijagram.
- Naš projektantski zadatak se svodi na odredjivanje optimalnog  $W/S$ !
- Karakteristike najčešće korišćenih motora su date na sledećem slajdu!
- Imajte na umu da je:

$$1 \text{ [hp]} = 745.701 \text{ [W]} \quad \text{i:} \quad 1 \text{ [lb]} = 4.448222 \text{ [N]}$$

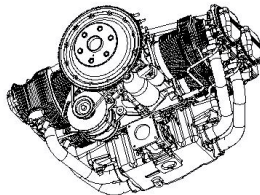
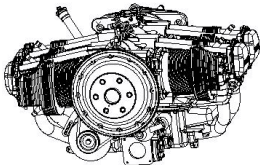
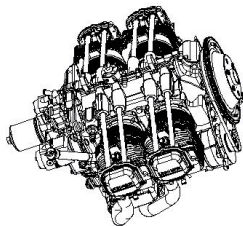
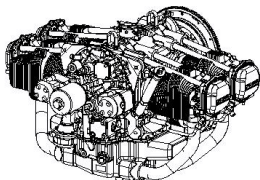


# Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 9/11

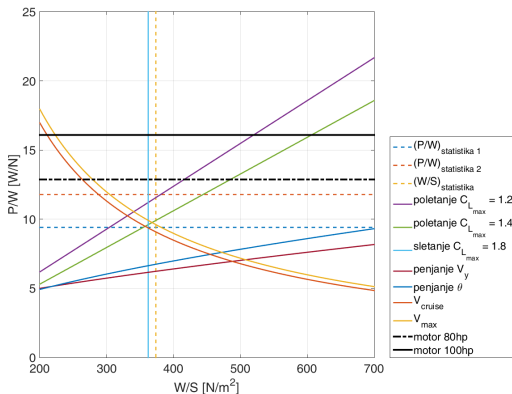
Model	bhp	RPM	Weight	lb/hp
<b>VW (Great Plains conversion)</b>				
1600cc	57	3600	160	2.81
2180cc	76	3600	168	2.21
<b>Lycoming</b>				
O-235 C	115	2800	215	1.87
O-320	160	2700	255	1.59
O-360	180	2700	270	1.50
O-540-E	260	2700	368	1.42
IO-360	200	2700	293	1.47
<b>Continental</b>				
C-75	75	2275	168	2.24
O-200-A	100	2750	220	2.20
O-300	145	2700	268	1.85
IO-360	195	2600	327	1.68
TSIO-550-E	350	2700	433	1.24
<b>Franklin</b>				
4A-235-B31	125	2800	206	1.65
6A-350-C1R	220	2800	297	1.35
<b>Rotax</b>				
Rotax 377	35	6500	61	1.74
Rotax 582	63	6500	63	1.00
Rotax 914 F	100	5500	141	1.41
<b>Jabiru</b>				
Jabiru 2200A	80	3300	132	1.65
Jabiru 3300A	120	3300	178	1.48
Jabiru 600A	180	2700	231	1.28
<b>Other</b>				
Hirth 3203	65	6300	73	1.12
HKS 700E	56	5800	121	2.16
			av.	1.68



## Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 10/11



# Dozvoljene varijacije $P/W$ i $W/S$ – 11/11



Slika: Grafik mogućih vrednosti  $P/W$  i  $W/S$  sa ograničenjem motora.

