ИТМ – Анализа

Душан Ђукић

6. Неодређени интеграли

6.1. Примитивна функција

Примитивна функција дате функције $f(x)$ је функција $F(x)$ таква да је $F' = f$.

Примитивна функција функције f није једнозначно одређена - она је одређена само *до на додавање константе* јер се додавањем константе функцији F њен извод не мења. Примитивну функцију у општем облику пишемо као *неодређени интеграл* функције f:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где је C произвољна реална константа.

Налажење неодређеног интеграла - тј. *интеграција* - је процес супротан диференцирању. Тако одмах знамо неке једноставније интеграле. Као и одговарајуће изводе, и њих је корисно запамтити - волимо да их зовемо „табличним”:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1); \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a > -0, a \neq 1);$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Тврђење чији доказ за сада прескачемо:

- Свака непрекидна функција f има неодређени интеграл.

С друге стране, и неке функције које нису непрекидне имају неодређени интеграл. На пример, функција $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ има прекид у нули и прилично је дивља у околини нуле, али има неодеђени интеграл $\int f(x)dx = x^2 \sin\frac{1}{x^2} + \text{const}$.

Неодређени интеграли многих функција, иако постоје, не могу се представити помоћу елементарних функција. Такви су, на пример,

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\, dx, \quad \dots,$$

ма колико једноставно изгледали.

Други су само компликовани - нпр. проверите да ли је ово тачно:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{2+\sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{\sin x - \cos x + \sqrt{3}}{\cos x - \sin x + \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \text{const}.$$

Како онда пронаћи неодређени интеграл?

За почетак, имамо једноставна линеарна правила: ако су f и g функције и k константа, онда је

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Значило би нам и некакво правило производа, али оно не постоји.

Пример 6.1. Свакако *није тачна* формула $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.

Контрапример је тешко промашити. Нпр. Ако је $f(x) = g(x) = x$, онда је $\int f(x)g(x)dx = \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = (\frac{1}{2}x^2 + C) \cdot (\frac{1}{2}x^2 + C)$.

Не постоји ни правило сложене функције. Наш једини алат за налажење неодређених интеграла су неке методе, од којих ће најважније бити приказане у наставку.

6.2. Смена променљиве и парцијална интеграција

Понекад се дати интеграл по променљивој x може упростити ако се изрази као интеграл по новој променљивој y. Претпоставимо да је $x = g(y)$ функција по y. Диференцирање даје $dx = g'(y)dy$. Тако добијамо *правило смене променљиве*:

$$\int f(x)dx = \int f(g(y))g'(y)dy.$$

Ово правило је очигледна последица правила извода сложене функције.

Пример 6.2. Израчунати интеграле (а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ и (б) $\int xe^{-x^2}dx$.

Решење. (а) Стару променљиву x изразићемо преко нове променљиве t.

Сменом $x = (t-1)^2$ и $dx = 2(t-1)dt$ (за $t \geqslant 1$) дати интеграл постаје $I = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = \int (2-\frac{2}{t})dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} = 2t - 2\ln|t| + \text{const}$. Најзад, $t = 1+\sqrt{x}$, па добијамо $I = 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + \text{const}$.

(б) Чешћи је случај када је нова променљива t задата као функција по старој променљивој x.

Овде задајемо смену $t = -x^2$ и $dt = -2xdx$. Тада је $xdx = -\frac{1}{2}dt$, па дати интеграл постаје $J = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + \text{const} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \text{const}$.

Затим имамо правило *парцијалне интеграције*, које је последица правила извода производа. Наиме, ако су $u(x)$ и $v(x)$ функције, онда из $u \cdot v' = (uv)' - v \cdot u'$ интеграцијом по dx следи $\int u \cdot v'\, dx = uv - \int v \cdot u'\, dx$. Краће записано,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Пример 6.3. Израчунати $\int \ln x\, dx$.

Решење. Парцијалном интеграцијом $\left|\begin{smallmatrix} u=\ln x, & v=x \\ du=dx/x, & dv=dx \end{smallmatrix}\right|$ тражени интеграл постаје $\int \ln x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x(\ln x - 1) + C$.

6.3. Интеграција рационалних функција

Рационална функција је количник два полинома. Такве су нпр. функције $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{x^4 - x^2 + 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$, али не и функције $\sqrt[3]{x^3+1}$ и $\sin x$.

Пример 6.4. Израчунати интеграле (а) $\int \frac{dx}{2x-1}$, (б) $\int \frac{dx}{2x^2-x}$ и (в) $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3-x}$.

Решење. (а) Смена $\left|\begin{smallmatrix} y=2x-1 \\ dy=2dx \end{smallmatrix}\right|$ одмах даје $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + \text{const} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \text{const}$.

(б) Како је $\frac{1}{2x^2-x} = \frac{2x}{2x^2-x} - \frac{2x-1}{2x^2-x} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$, имамо $\int \frac{dx}{2x^2-x} = 2\int \frac{dx}{2x-1} - \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| - \ln x + \text{const}$.

(в) Приметимо прво да је $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$. Као у делу (б), раставићемо функцију $\frac{x^2-4x+1}{x^3-x}$ на линеарну комбинацију функција $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x-1}$. Другим речима, одредићемо константе A, B, C тако да важи

$$\frac{x^2-4x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Множењем са $x^3 - x$ добијамо $A(x^2-1) + B(x^2-x) + C(x^2+x) = x^2 - 4x + 1$.

– Заменом $x=0$ следи $-A+0\cdot B+0\cdot C=1$, тј. $A=-1$;
– заменом $x=-1$ следи $0\cdot A+2B+0\cdot C=6$, тј. $B=3$;
– заменом $x=1$ следи $0\cdot A+0\cdot B+2C=-2$, тј. $C=-1$.

Према томе, $\frac{x^2-4x+1}{x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}$. Сада имамо $\int\frac{x^2-4x+1}{x^3-x}dx=-\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+3\ln|x+1|-\ln|x-1|+\text{const}$.

Основна теорема алгебре тврди да сваки неконстантан полином има нулу. Последица тога је да се сваки полином може раставити на линеарне факторе: $Q(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots$ Неке од нула при томе могу бити комплексне. Ипак, ако је полином $Q(x)$ реалан, свака његова комплексна нула z долази у пару са својим конјугатом $\bar{z}$, а полином $(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2\operatorname{Re}(z)\cdot x+|z|^2$ је реалан. Према томе:

- Сваки реалан полином $Q(x)$ се може раставити на производ линеарних и квадратних реалних фактора:
$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}, \tag{1}$$
где су сви фактори различити и притом су α_i,p_i,q_i реални и r_i,s_i природни бројеви.

Под *елементарним рационалним функцијама* подразумевамо функције једног од следећих облика:

$$(1^\circ)\quad \frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^2},\ \frac{A}{(x-a)^3},\ \dots\quad \text{и}\quad (2^\circ)\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^3},\ \dots$$

где су A,B,C и a,p,q (реалне) константе. Оне су нам значајне јер се испоставља да важи следеће тврђење:

- Свака рационална функција $\frac{P(x)}{Q(x)}$ у којој је степен полинома P мањи од степена полинома Q може се представити на јединствен начин у облику збира неколико елементарних рациоланих функција.

У том представљању имениоци су управо фактори из једначине (1): $(x-\alpha_i)^j$ за $i=1,\dots,k$ и $j=1,\dots,r_1$, као и $(x^2+p_ix+q_i)^j$ за $i=1,\dots,\ell$ и $j=1,\dots,s_i$.

<u>*Пример 6.5.*</u> (а) Посматрајмо функцију $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x}$.

Како је $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$, развој функције f на збир елементарних рационалних функција имаће облик
$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Множењем са $x(x-1)^2$ добијамо
$$x^2+x-1=A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A.$$

Упоређивањем коефицијената на обе стране добијамо систем једначина $A+B=1$, $-2A+B+C=1$, $A=-1$, чијим решавањем налазимо $A=-1$, $B=2$, $C=1$.

(б) Посматрајмо функцију $f(x)=\dfrac{x^7-2x^5+15x^3-30x}{x^5+10x^2+15x+6}$.

При дељењу полинома $x^7-2x^5+15x^3-30x$ полиномом $x^5+10x^2+15x+6$ добија се количник x^2-2 и остатак $-10x^4+14x^2+12$. Дакле,
$$f(x)=x^2-2+g(x),\quad \text{где је}\quad g(x)=\frac{-10x^4+14x^2+12}{x^5+10x^2+15x+6}.$$

Функција $g(x)$ се може развити као збир елементарних рационалних функција. Како је $x^5+10x^2+15x+6=(x+1)^3(x^2-3x+6)$, имениоци у том развоју биће $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$ и x^2-3x+6. Дакле,
$$g(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2-3x+6}$$
за неке константе A,B,C,D,E.

Даљи рачун (нпр. упоређивање коефицијената) дао би $A=-\frac{94}{25}$, $B=2$, $C=\frac{8}{5}$ и $Dx+E=\frac{-156x+324}{25}$.

Према томе, интеграл сваке рационалне функције може се одредити на начин као у делу (в) претходног примера - под условом да умемо да одредимо интеграле елементарних рационалних функција. Дакле, требају нам интеграли

$$(1^\circ)\ \int \frac{A}{(x-a)^n}dx \quad \text{и} \quad (2^\circ)\ \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

(1°) Интеграле функција облика $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ је лако наћи (сменом $y = x - a$), јер је

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + \text{const} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \text{const}.$$

Да бисмо израчунали интеграл функције $f(x) = \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, допунићемо квадрат у имениоцу помоћу смене $\left|\begin{smallmatrix} y=x+p/2 \\ dy=dx \end{smallmatrix}\right|$: тада је $f(x) = \frac{By+C'}{(y^2+D)^n}$, где су $C' = C - \frac{1}{2}Bp$ и $D = q - \frac{1}{4}p^2$, те је

$$\int f(x)dx = B\cdot\int\frac{y\,dy}{(y^2+D)^n} + C'\cdot\int\frac{dy}{(y^2+D)^n}.$$

(2°1) Нека је $n = 1$. Одмах имамо

$$\int\frac{y\,dy}{y^2+D} = \left|\begin{smallmatrix} t=y^2+D \\ dt=2y\,dy \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + \text{const} = \frac{1}{2}\ln|y^2+D| + \text{const}.$$

Обично се претпоставља да именилац x^2+px+q нема реалних нула, тако да је $D = a^2 > 0$. Тада је

$$\int\frac{dy}{y^2+a^2} = \left|\begin{smallmatrix} y=at \\ dy=a\,dt \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + \text{const} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a} + \text{const}.$$

С друге стране, и случај $D = -a^2 < 0$ може да буде од користи. Тада је

$$\int\frac{dy}{y^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a}\right)dy = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{y-a}{y+a}\right| + \text{const}.$$

(2°2) Најзад, нека је $n > 1$. Као и у случају (2°1), лако рачунамо

$$\int\frac{y\,dy}{(y^2+D)^n} = \left|\begin{smallmatrix} t=y^2+D \\ dt=2y\,dy \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + \text{const} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(y^2+D)^{n-1}} + \text{const}.$$

Последњи случај, интеграл функције $\frac{dy}{(y^2+D)^n}$, решавамо парцијалном интеграцијом. Означимо $I_n = \displaystyle\int\frac{dy}{(y^2+D)^n}$. Вредност I_1 већ знамо на основу случаја (2°1). За $n > 1$ имамо

$$D\cdot I_n = \int\frac{(x^2+D)-x^2}{(x^2+D)^n}dx = I_{n-1} - \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+D)^n},$$

одакле је парцијалном интеграцијом

$$I_{n-1} - D\cdot I_n = \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+D)^n} = \left|\begin{matrix} u=x, & v=\frac{-1}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}} \\ du=dx, & dv=\frac{x\,dx}{(x^2+D)^n} \end{matrix}\right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{-x}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}} + \int\frac{dx}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}} = \frac{1}{2n-2}I_{n-1} - \frac{x}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}}.$$

Дакле,

$$D\cdot I_n = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+D)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \text{const}.$$

6.4. Тригонометријски и експоненцијални интеграли

Посматрајмо интеграл $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, где је R рационална функција по две променљиве. Сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ овај интеграл се своди на интеграл рационалне функције. Заиста, тада је

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad \text{и} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ипак, у неким специјалним случајевима пролазе и једноставније смене:

(1°) $t = \sin x$ за интеграл облика $I = \int R(\sin x)\cos x\, dx$, где је R рационална функција: тада је $dt = \cos x\, dx$ и $I = \int R(t)dt$;

(2°) $t = \cos x$ за интеграл облика $I = \int R(\cos x)\sin x\, dx$, где је R рационална функција: тада је $dt = -\sin x\, dx$ и $I = -\int R(t)dt$;

(3°) $t = \operatorname{tg} x$ за интеграл облика $I = \int R(\operatorname{tg} x)\, dx$, где је R рационална функција: тада је $dx = \frac{dt}{t^2+1}$ и $I = \int \frac{R(t)}{t^2+1}dt$.

Пример 6.6. Израчунати интеграле (а) $\displaystyle\int \sin^5 x\, dx$, (б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ и (в) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\sin x}$.

Решење. (а) Смена $\left|\begin{smallmatrix} t=-\cos x \\ dt=\sin x\, dx\end{smallmatrix}\right|$ даје $\int \sin^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx = \int (1-t^2)^2 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \text{const} = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{2}{5}\cos^5 x + \text{const}$.

(б) Како је $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, смена $\left|\begin{smallmatrix} t=\operatorname{tg}x \\ dt=dx/cos^2 x\end{smallmatrix}\right|$ даје $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2)dt = t + \frac{1}{3}t^3 + \text{const} = \operatorname{tg}x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \text{const}$.

(в) У овом случају ниједна од смена $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg}x$ не даје рационалан интеграл, па прибегавамо смени $\left|\begin{smallmatrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=2dt/(1+t^2)\end{smallmatrix}\right|$. Тада је $\int \frac{dx}{1+2\sin x} = \int \frac{2\,dt/(1+t^2)}{1+4t/(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{1+4t+t^2}| = \left|\begin{smallmatrix} u=t+2 \\ du=dt\end{smallmatrix}\right| = 2\int \frac{2}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + \text{const} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right| + \text{const}$.

Ако је дат интеграл $\int R(e^x)\, dx$, где је R рационална функција, онда се он сменом $t = e^x$ своди на интеграл рационалне функције:

$$\int R(e^x)\, dx = \left|\begin{smallmatrix} x=\ln t \\ dx=dt/t\end{smallmatrix}\right| = \int \frac{R(t)}{t}\, dt.$$

Често су од користи и смене у облику *хиперболичких функција*:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Јасно је да је $(\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x$ и $(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$. Осим тога, како је $x = \ln e^x = \ln(\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x)$ и $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, једноставно налазимо изразе за њихове инверзне функције:

$$\operatorname{arcch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{arcsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

Пример 6.7. Израчунати интеграл $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+4}$.

Решење. Сменом $\left|\begin{smallmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{smallmatrix}\right|$ добијамо $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+4} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + \text{const} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \text{const}$.

6.5. Ирационални интеграли

Мада се ирационалним интегралима могу сматрати сви интеграли који нису рационални, овде се углавном бавимо интегралима облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{2}$$

где је R рационална функција две променљиве и $a \neq 0$.

Први корак је допуњавање тринома под кореном до квадрата: сменом $s = x + \frac{b}{2a}$ дати интеграл постаје $\int R\left(s - \frac{b}{a}, \sqrt{as^2+D}\right) ds$, где је $D = c - \frac{b^2}{4a}$. Он се затим сменом $y = s\cdot\sqrt{|D/a|}$ своди на интеграл облика

$$\int R_1\left(y, \sqrt{\pm y^2 \pm 1}\right) dy,$$

где је R_1 такође рационална функција.

Добијени интеграл се може свести на рационалан неком од следећа два типа смена.

(1°) *Тригонометријске/хиперболичке смене.*

Ако нам је дат интеграл $\int R_1\left(y, \sqrt{1-y^2}\right) dy$, намеће се тригонометријска смена $t = \arcsin y$, тј.

$$y = \sin t, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos t, \quad dy = \cos t\, dt,$$

чиме се дати интеграл своди на тригонометријски.

С друге стране, ако имамо интеграл $\int R_1\left(y, \sqrt{y^2+1}\right) dy$, можемо да користимо хиперболичку смену $t = \operatorname{arcsh} y$. Тада је

$$y = \operatorname{sh} t, \quad \sqrt{y^2+1} = \operatorname{ch} t \quad \text{и} \quad dy = \operatorname{ch} t\, dt.$$

Слично, ако имамо интеграл $\int R_1\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy$, можемо да користимо хиперболичку смену $t = \operatorname{arcch} y$. Тада је

$$y = \operatorname{ch} t, \quad \sqrt{y^2-1} = \operatorname{sh} t \quad \text{и} \quad dy = \operatorname{sh} t\, dt.$$

У оба случаја дати интеграл се своди на интеграл по експоненцијални.

Пример 6.8. Израчунати: (а) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$; (б) $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$; (в) $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$.

Решење. (а) Користимо смену $\left|{}^{x=\sin t}_{dx=\cos t\, dt}\right|$ за $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тада је $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ и

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

(б) Сада је потребна смена $\left|{}^{x=\operatorname{sh} t}_{dx=\operatorname{ch} t\, dt}\right|$. Тада је $\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$ и

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\, dx &= \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \int \frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2} dt = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsh} x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}).\end{aligned}$$

(в) Слично делу (б), сменом $\left|{}^{x=\operatorname{ch} t}_{dx=\operatorname{sh} t\, dt}\right|$, с обзиром на $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$, добијамо

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \operatorname{sh}^2 t\, dt = \int \frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2} dt = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcch} x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}).\end{aligned}$$

(2°) *Ојлерова смена.*

Претпоставимо да је дат интеграл $\int R_1\left(y, \sqrt{y^2+\epsilon}\right) dy$, где је $\epsilon = \pm 1$. Уводимо смену

$$t = y \pm \sqrt{y^2+\epsilon}.$$

Тада је $(t-y)^2 = y^2+\epsilon$, тј. $t^2 - 2yt = \epsilon$, одакле је

$$y = \frac{t^2-\epsilon}{2t}, \quad \pm\sqrt{y^2+\epsilon} = t - y = \frac{t^2+\epsilon}{2t} \quad \text{и} \quad dy = \frac{t^2+\epsilon}{2t^2}\, dt.$$

Напоменимо да се Ојлерова смена могла увести и директно у интеграл (2) под условом да је $a > 0$. Довољно је узети

$$t = y\sqrt{a} \pm \sqrt{ay^2+by+c},$$

јер је тада $y = \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}$ итд.

Остаје случај интеграла $\int R_1\left(y, \sqrt{1-y^2}\right) dy$. У овом случају смена $\left|{}^{y=1/z}_{dy=-dz/z^2}\right|$ своди дати интрегрaл на $\int R_2\left(z, \sqrt{z^2-1}\right) dz$ на који се затим може применити Ојлерова смена. Коначан облик смене ће бити

$$t = z \pm \sqrt{z^2-1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}, \quad y = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-y^2} = \pm\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{и} \quad dy = \frac{2(1-t^2)dt}{(t^2+1)^2}.$$

Пример 6.9. Израчунати интеграле (а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$ и (б) $\int \frac{dx}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Решење. (а) Ојлерова смена $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$ даје $x=\frac{1-t^2}{2t-1}$, $dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$ и $\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}$, па добијамо

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt}{1+\frac{t^2-t+1}{2t-1}} = -2\int \frac{t^2-t+1}{t(t+1)(2t-1)}dt = -2\int \left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= -2\ln|t+1| - \ln|2t-1| + 2\ln|t| + \mathrm{const} = \ln\left|\frac{t^2}{(t+1)^2(2t-1)}\right| + \mathrm{const}.$$

(б) Ојлерова смена $t=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ даје

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{2(1-t^2)dt}{(t^2+1)^2}}{1-\frac{t^2-1}{t^2+1}} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + \mathrm{const}.$$

6.6. Метод Остроградског

Претпоставимо да нам је дат рационалан интеграл

$$I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad \deg P < \deg Q,$$

у коме полином $Q(x)$ има вишеструке нуле, рецимо $Q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}$. Овај метод се заснива на чињеници да коначан резултат увек има облик

$$I=\frac{R(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{S(x)}{Q_0(x)}dx, \tag{3}$$

где је $Q_0(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$ (тј. полином Q без вишеструких нула), $Q_1(x)=\frac{Q(x)}{Q_0(x)}$, а R и S непознати полиноми степена мањих од степена полинома Q_1 и Q_0, редом.

Диференцирањем једнакости (3) и множењем са $Q(x)$ добијамо

$$P(x)=Q_0(x)R'(x)-\frac{Q_0(x)Q_1'(x)}{Q_1(x)}R(x)+Q_1(x)S(x), \tag{4}$$

одакле се полиноми R и S могу одредити упоређивањем коефицијената.

Пример 6.10. Израчунати интеграл $I=\int \frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решење. Овде је $P(x)=x^2$ и $Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$, па је $Q_0(x)=(x-1)(x+1)$, $Q_1(x)=(x-1)(x+1)^2$ и $\frac{Q_0(x)Q_1'(x)}{Q_1(x)}=3x-1$. Полиноми R и S редом имају степене (највише) 2 и 1, па можемо писати $R(x)=Ax^2+Bx+C$ и $S(x)=Dx+E$. Једначина (4) постаје

$$x^2=(x-1)(x+1)(2Ax+B)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)+(x-1)(x+1)^2(Dx+E)$$
$$=Dx^4+(-A+D+E)x^3+(A-2B-D+E)x^2+(-2A+B-3C-D-E)x+(-B+C-E).$$

Изједначавањем коефицијената налазимо $A=E=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{3}{8}$, $C=-\frac{1}{4}$ и $D=0$. Следи да је $I=\frac{x^2-3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{const}.$

Сличан метод се може применити на интеграле облика

$$I=\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}:$$

испоставља се да коначан резултат увек има облик

$$I=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је Q непознат полином степена за један мањег од P, а λ непозната константа. Диференцирање и множење са $\sqrt{ax^2+bx+c}$ даје

$$P(x) = (ax^2+bx+c)Q'(x) + \frac{1}{2}(2ax+b)Q(x) + \lambda, \tag{5}$$

па се полином Q и константа λ могу одредити упоређивањем коефицијената.

Пример 6.11. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решење. Полином Q има степен 1, тј. $Q(x) = Dx+E$. Једнакост (5) постаје

$$x^2 = (x^2+2x+2)D + (x+1)(Dx+E) + \lambda = 2Dx^2 + (3D+E)x + (2D+E+\lambda),$$

одакле налазимо $D = \frac{1}{2}$, $E = -\frac{3}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$. Према томе, $I = \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + \text{const}$.

6.7. Задаци

1. Израчунати:
(а) $\displaystyle\int \cos(nx)dx$; (б) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$; (в) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$; (г) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx$; (д) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx$.

Решење. (а) Смена $y = nx$, $dy = ndx$: $\int \cos(nx)dx = \int \cos y \frac{dy}{n} = \frac{1}{n}\sin y + C = \frac{1}{n}\sin nx + C$.

(б) Пошто је $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, имамо $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\int 1dx + \int \cos 2x\,dx) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

(в) Смена $y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$: $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C$.

(г) Како је $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$, имамо $\int \operatorname{sh} x\,dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + C = \operatorname{ch} x + C$.

(д) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C = \operatorname{sh} x + C$.

2. Израчунати (а) $I = \displaystyle\int x^2e^x\,dx$; (б) $I = \displaystyle\int x^2\sin x\,dx$; (в) $I = \displaystyle\int x^n\ln x\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Решење. (а) Парцијална интеграција $\left|\begin{smallmatrix} u=x^2, & v=e^x \\ du=2x\,dx, & dv=e^x dx\end{smallmatrix}\right|$ даје $I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x^2e^x - 2\int xe^xdx$.

Слично, још једна парцијална интеграција $\left|\begin{smallmatrix} u=x, & v=e^x \\ du=dx, & dv=e^x dx\end{smallmatrix}\right|$ даје $\int xe^xdx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = xe^x - e^x + \text{const}$, па коначно добијамо $I = (x^2-2x+2)e^x + \text{const}$.

(б) И овде користимо парцијалну интеграцију: $I = \left|\begin{smallmatrix} u=x^2, & v=-\cos x \\ du=2x\,dx, & dv=\sin x\,dx\end{smallmatrix}\right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = \left|\begin{smallmatrix} u=2x, & v=\sin x \\ du=2\,dx, & dv=\cos x\,dx\end{smallmatrix}\right| = -x^2\cos x + \int u\,dv = -x^2\cos x + uv - \int v\,du = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + \text{const}$.

(в) $I = \left|\begin{smallmatrix} u=\ln x, & v=\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ du=dx/x, & dv=x^n dx\end{smallmatrix}\right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^ndx = x^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \text{const}$.

3. Израчунати (а) $I = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$; (б) $J = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$

Решење. Парцијалном интеграцијом $\left|\begin{smallmatrix} u=\sin bx, & v=e^{ax}/a \\ du=b\cos bx\,dx, & dv=e^{ax}dx\end{smallmatrix}\right|$ добијамо $I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J + \text{const}$.

Слично, парцијалном интеграцијом $\left|\begin{smallmatrix} u=\cos bx, & v=e^{ax}/a \\ du=-b\sin bx\,dx, & dv=e^{ax}dx\end{smallmatrix}\right|$ добијамо $J = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I + \text{const}$.

Дакле, $I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I)$. Решавањем по I налазимо

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + \text{const} \quad \text{и} \quad J = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + \text{const}.$$

4. Одредити $I = \displaystyle\int \sin x \cos x \sin\cos x \, dx$.

Решење. Сменом $\left|{t=\cos x \atop dt=-\sin x\, dx}\right|$ и парцијалном интеграцијом добијамо $I = -\int t \sin t dt = \left|{u=t, \quad v=\cos t \atop du=dt,\ dv=-\sin t\, dt}\right| = \int u\, dv = uv - \int v\, du = t\cos t - \int \cos t = t\cos t - \sin t + \text{const} = \cos x \cos\cos x - \sin\cos x + \text{const}$.

5. Израчунати $I = \displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$.

Решење. Смена $\left|{x=t^2 \atop dx=2t\, dt}\right|$ даје $I = 2\int t \operatorname{arctg} t\, dt$. Парцијалном интеграцијом $\left|{u=\operatorname{arctg} t,\ v=t^2 \atop du=\frac{dt}{t^2+1},\ dv=2tdt}\right|$ следи $I = \int u\, dv = uv - \int v\, du = t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = t^2 \operatorname{arctg} t - \int (1 - \frac{1}{t^2+1}) dt = (t^2+1)\operatorname{arctg} t - t + \text{const} = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{const}$.

6. Одредити интеграле (а) $I = \displaystyle\int x^2 \ln(x^2+1) dx$; (б) $I = \displaystyle\int x^2 \ln(x^2+x+1) dx$.

Решење. (а) Парцијална интеграција $\left|{u=\ln(x^2+1),\ v=x^3/3 \atop du=\frac{2x\, dx}{x^2+1},\quad dv=x^2 dx}\right|$: $I = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{3}x^3 \ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4 dx}{x^2+1} = \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\int (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}) dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x^2+1) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \text{const}$.

(б) Парцијална интеграција $\left|{u=\ln(x^2+x+1),\ v=\frac{x^3-1}{3} \atop du=\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx,\ dv=x^2 dx}\right|$ - обратите пажњу на избор $v = \frac{x^3-1}{3}$ уместо $v = \frac{x^3}{3}$! Сада је $I = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x^2+x+1) - \int \frac{(2x+1)(x^3-1)}{3(x^2+x+1)} dx = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\int (2x+1)(x-1) dx = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \text{const}$.

7. Представити функције у облику збира полинома и елементарних рационалних функција:
(а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-2}$; (б) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$; (в) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$; (г) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^5+x^3}$.

Решење. (а) Именилац се факторише као $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, па је представљање у облику $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$. Пошто је $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x + (B-2A)}{x^2-x-2}$, имамо $(A+B)x + (B-2A) = 1$, па поређење коефицијената даје $A + B = 0$, $B - 2A = 1$. Решење система је $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, па је $f(x) = \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2}$.

(б) Дељење са остатком даје $x^3 = (x+4)(x^2-4x+4) + 12x - 16$. Именилац је $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Дакле, $f(x) = x + 4 + \frac{12x-16}{(x-2)^2} = x + 4 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$. Из $\frac{12x-16}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax + (B-2A)}{(x-2)^2}$ добијамо $A = 12$, $B - 2A = -16$, дакле $B = 8$. Тако је $f(x) = x + 4 + \frac{12}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$.

(в) Факторизација имениоца је $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, па је $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C)}{x^3-1}$, дакле $A + B = 0$, $A - B + C = 0$, $A - C = 1$. Решење овог система је $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$. Према томе, $f(x) = \frac{1/3}{x-1} - \frac{x/3 + 2/3}{x^2+x+1}$.

(г) Именилац је $x^5 + x^3 = x^3(x^2+1)$, па је $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(Ax^2+Bx+C) + x^3(Dx+E)}{x^5+x^3}$. Следи да је $x - 2 = (x^2+1)(Ax^2+Bx+C) + x^3(Dx+E) = (A+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + C$. Дакле, $A + D = 0$, $B + E = 0$, $A + C = 0$, $B = 1$, $C = -2$. Лако добијамо $A = 2$, $D = -2$ и $E = -1$, па је $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{2x+1}{x^2+1}$.

8. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2 + 2x + 3}$.

Решење. Како је $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, сменом $y = x + 1$, $dy = dx$ добијамо $I = \int \frac{y-1}{y^2+2} dy = \int \frac{y}{y^2+2} dy - \int \frac{1}{y^2+2} dy = \frac{1}{2}\ln(y^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

9. Одредити $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x^2}\, dx$.

Решење. Именилац $x^4 - x^2$ се факторише као $x^2(x+1)(x-1)$. Тражимо константе a, b, c, d такве да је $\frac{x^2+x+1}{x^4-x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$. Свођењем на заједнички именилац добијамо $(a+c+d)x^3 + (b - c + d)x^2 - ax - b = x^2 + x + 1$, тј. $a = b = -1$, $a + c + d = 0$ и $b - c + d = 1$, и одавде $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$. Најзад, $\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x^2}\, dx = \int \left(-\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)}\right) dx = -\ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{3}{2}\ln(x-1) + C$.

10. Одредити $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\, dx$ за (а) непарно $n \in \mathbb{N}$; (б) произвољно $n \in \mathbb{N}$.

Решење. (а) Пролази смена $t = \cos x$. Тада је $I_{2k+1} = \int \sin^{2k} x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x\, dx = -\int (1-t^2)^k dt$, што је интеграл обичног полинома.

(б) Имамо $I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$. Коришћењем парцијалне интеграције $\left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-2} x \cos x, & v = \sin x \\ du = [(n-2)\sin^{n-3} x - (n-1)\sin^{n-1} x]dx, & dv = \cos x\, dx \end{array} \right|$ добићемо $I_{n-2} - I_n = \int \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = \sin^{n-1} x \cos x - \int [(n-2)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x]dx + \text{const} = \sin^{n-1} x \cos x - (n-2)I_{n-2} - (n-1)I_n + \text{const}$.

Овако смо добили рекурентну везу:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \text{const}.$$

11. Свести интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(x^2+x+3)^{3/2}}$ на рационалан користећи Ојлерову смену.

Решење. Нека је $\sqrt{x^2+x+3} = x + t$. Квадрирањем добијамо $x^2+x+3 = x^2+2tx+t^2$, одакле је $2tx - x = 3 - t^2$, тј. $x = \frac{3-t^2}{2t-1}$. Даље је $\sqrt{x^2+x+3} = \frac{t^2-t+3}{2t-1}$, $dx = \frac{-2(t^2-t+3)dt}{(2t-1)^2}$, и најзад $I = -\int \frac{2(t^2-3)^2 dt}{(2t-1)(t^2-t+3)^2}$.

За радознале: $I = \dfrac{6-10x}{11\sqrt{x^2+x+3}} + \ln\left(2x+1+\sqrt{x^2+x+3}\right) + \text{const}.$

12. Свести интеграл $I = \displaystyle\int x \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\, dx$ на рационалан.

Решење. Смена $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$: тада је $x = \frac{2t^3-1}{1-t^3}$, $dx = \frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2}$, $I = \int \frac{3t^3(2t^3-1)}{(1-t^3)^3} dt$.

За радознале: $I = \dfrac{3x-7}{6}\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^2} - \dfrac{5}{6}\ln\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+1}\right) + \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}+1}{\sqrt{3}} + \text{const}.$

13. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

Решење. Сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ дати интеграл постаје $I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2})} = \int \frac{2dt}{3t^2+2t+3}$. Затим сменом $u = t + \frac{1}{3}$ добијамо $3t^2+2t+3 = 3u^2 + \frac{8}{3}$ и $I = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\frac{8}{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u}{2\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + C$.

14. Израчунати $I = \displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\sqrt{\cos x}\, dx$.

Решење. Како је $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, узимајући смену $\left|\begin{smallmatrix} t=\sin\frac{x}{2} \\ dt=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx \end{smallmatrix}\right|$ добијамо $I = 2\int\sqrt{1-2t^2}dt = \left|\begin{smallmatrix} z=t\sqrt{2} \\ dz=dt\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right| = \sqrt{2}\int\sqrt{1-z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin z + \frac{1}{\sqrt{2}}z\sqrt{1-z^2} + \text{const}$. Притом је $z = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$, па је $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\right) + \sin\dfrac{x}{2}\sqrt{\cos x} + \text{const}$.

15. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{dx}{4^x - 2^x}$.

Решење. Смена $t = 2^x$, $dt = 2^x \ln 2\, dx$: тада је $I = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2(t-1)}$. Ако запишемо $\frac{1}{t^2(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1}$, добићемо $A = B = -1$, $C = 1$, па је $I = \frac{1}{\ln 2}(\ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t}) + D = -x + \frac{1}{\ln 2}(\ln|2^x - 1| + \frac{1}{2^x}) + D$.

16. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2}$.

Решење. Наместићемо парцијалну интеграцију. Ако одаберемо $v = \frac{-1}{x\sin x + \cos x}$, биће $dv = \frac{x\cos x\, dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$, па можемо узети $u = \frac{x}{\cos x}$ и $du = \frac{x\sin x + \cos x}{\cos^2 x}dx$. Сада је $I = \int u dv = uv - \int v du = \frac{-x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{-x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \operatorname{tg} x + \text{const} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x} + \text{const}$.

17. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

Решење. Смена $\left|{}^{x=1/y}_{dx=-dy/y^2}\right|$ даје $I=-\int\frac{dy}{y\sqrt[4]{y^4+1}}=-\int\frac{y^3dy}{y^4\sqrt[4]{y^4+1}}=\left|{}^{t=y^4+1}_{dt=4y^3dy}\right|=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)\sqrt[4]{t}}=\left|{}^{t=z^4}_{dt=4z^3dz}\right|=-\int\frac{z^2dz}{z^4-1}$. Све у свему, $z=\frac{1}{x}\sqrt[4]{x^4+1}$. Како је $\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{1/4}{z-1}-\frac{1/4}{z+1}+\frac{1/2}{z^2+1}$, добијамо $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+\text{const}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-x}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+\text{const}.$

18. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{(2x-3)dx}{x^3-3x+2}$.

19. Одредити $I=\displaystyle\int\frac{x^4\,dx}{x^3+x^2+3x+3}$.

20. Свести интеграл $I=\displaystyle\int\sqrt[5]{x^5-x^4}\,dx$ на рационалан.

21. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+4)^3}$.

22. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x+\sqrt{x^2+4}}$.

23. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$.

24. Одредити $I=\displaystyle\int\frac{\ln(\sin^2x+1)\cos x dx}{\sin^2x}$.

25. Израчунати $I=\displaystyle\int x^3e^{3x}dx$.

26. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x+\sin^4x}$.

27. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$.

28. Израчунати $I=\displaystyle\int\ln x\arcsin x\,dx$.

29. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+10x^2-96x-71}}$.

Одговори на задатке 18-29.

18. $I=\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{7}{9}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\text{const}.$

19. $I=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{4}\ln(x+1)-\dfrac{9}{8}\ln(x^2+3)+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\text{const}.$

20. $I=\displaystyle\int x\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}\,dx$. Смена $t=\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{x}}$, $\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{1-t^5}\\ dx=\frac{5t^4dt}{(1-t^5)^2}\end{array}\right|$ даје $I=5\displaystyle\int\frac{t^5dt}{(1-t^5)^3}$.

21. $I=\dfrac{1}{72}\left(\dfrac{3(x+1)(x^2+2x+6)}{(x^2+2x+4)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\text{const}.$

22. $I=\dfrac{(x^2+4)^{3/2}-x^3}{12}+\text{const}.$

23. $I=2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\text{const}.$

24. $I = 2\,\mathrm{arctg}\sin x - \dfrac{\ln(\sin^2 x + 1)}{\sin x} + \mathrm{const.}$

25. $I = \dfrac{1}{27} e^{3x}(9x^3 - 9x^2 + 6x - 2) + \mathrm{const.}$

26. $I = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}) - \mathrm{ctg}x + \mathrm{const.}$

27. $I = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} \ln \dfrac{x^2 - x\sqrt{3} + 1}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{1 - x^2} + \mathrm{const.}$

28. $I = -2\sqrt{1 - x^2} + \left(\sqrt{1 - x^2} - 1\right) \ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) + x(\ln x - 1) \arcsin x + \mathrm{const.}$

29. $I = -\frac{1}{8} \ln\big((x^6 + 15x^4 - 80x^3 + 27x^2 - 528x + 781)\sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 71} - (x^8 + 20x^6 - 128x^5 + 54x^4 - 1408x^3 + 3124x^2 + 10001)\big) + \mathrm{const.}$.. Мало сам се шалио. Решење је тачно, али немам појма како бисте га наболи.