

## 7. Одређени и несвојствени интеграл

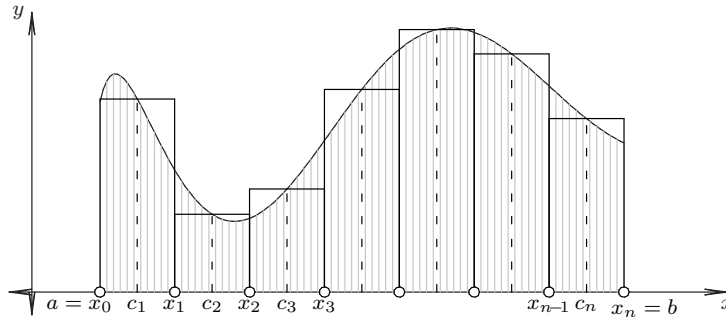
### 7.1. Интегрална сума

Нека је дата функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Претпоставимо да желимо да израчунамо површину  $S$  испод графика функције.

Одаберимо подеоне тачке  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  на том сегменту. Низ  $\Pi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  се назива *поделом* сегмента  $[a, b]$ , а *дијаметар* ове поделе је

$$d(\Pi) = \max_i \Delta x_i, \quad \text{где је } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Површину  $S$  можемо да апроксимирамо низом од  $n$  правоугаоника са основицама  $[x_{i-1}, x_i]$  и висинама једнаким  $f(c_i)$ , где су  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  за  $i = 1, \dots, n$  одабране *испажнуће тачке* поделе.



Овако добијамо процену површине  $S$  збиром површина правоугаоника:

$$S \approx S(f, \Pi, c) = \sum_{i=1}^n f(x_k) \Delta x_k.$$

Сума  $S(f, \Pi, c)$  назива се *интегралном сумом* функције  $f$  и она зависи од поделе  $\Pi$  и избора скупа тачака  $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ . Када подела  $\Pi$  тежи „најситнијој могућој” (са бесконачно много бесконачно блиских подеоних тачака), тј. када  $d(\Pi)$  тежи нули, очекујемо да интегрална сума  $S(f, \Pi, c)$  тежи површини  $S$ .

Формално, с обзиром на то да интегрална сума  $S(f, \Pi, c)$  не зависи само од дијаметра  $d(\Pi)$ , њен лимес  $I$  када  $d(\Pi) \rightarrow 0$  би био број такав да:

- За свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta > 0$  такво да, за сваку поделу  $\Pi$  са дијаметром  $d(\Pi) < \delta$ , важи

$$|S(f, \Pi, c) - I| < \varepsilon.$$

Овај лимес у општем случају не мора да постоји. Онда када он постоји, кажемо да је функција  $f$  *интеграбилна* (по Риману<sup>1</sup>) на сегменту  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = I$$

је њен *одређени интеграл*.

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар

Пример 7.1. Посматрајмо функцију

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x \text{ рационално,} \\ 1, & \text{ако је } x \text{ ирационално.} \end{cases}$$

Ова функција није интегрална на сегменту  $[0, 1]$ . Наиме, ма колико ситна била подела, истакнуте тачке  $c_i$  можемо одабрати тако да истакнута сума буде било 0, било 1, те ова сума нема лимес. Заиста:

- ако за  $c_i$  бирамо искључиво рационалне бројеве, интегрална сума ће бити 0;
- ако за  $c_i$  бирамо искључиво ирационалне бројеве, интегрална сума ће бити 1.

Напоменимо да је, при једној општијој дефиницији интеграла познатој као *интеграл по Лебегу*<sup>2</sup>, и ова функција интегрална и њен интеграл је једнак 1.

У наведеном примеру функција  $f$  је прилично дивља. У случају функција с каквима се обично срећемо, овакве аномалије се не дешавају.

Шерђеје 7.1. Свака ограничена функција на сегменту  $[a, b]$  са коначно много тачака прекида је интегрална.

Између осталог, непрекидне функције су интегралне.

На пример, ако је  $d = b - a$ , дијаметар низа подела  $\Pi_n = (a, a + \frac{d}{n}, a + \frac{2d}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)d}{n}, b)$  тежи нули. Зато, под претпоставком да је  $f$  интегрална функција на сегменту  $[a, b]$ , одговарајуће интегралне суме са истакнутим тачкама  $c_{i+1} = a + \frac{in}{n}$  за  $i = 0, 1, \dots, n$  теже интегралу  $\int_a^b f(x) dx$ . Дакле,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{j}{n}d\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{j}{n}d\right).$$

Пример 7.2. Израчунати по дефиницији (помоћу интегралних сума) интеграле (а)  $\int_0^1 e^x dx$ ; (б)  $\int_0^1 x^2 dx$ .

Решење. (а) Ако је  $f(x) = e^x$ , онда је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n/n} - 1}{e^{1/n} - 1} = (e - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(e^{1/n} - 1)} = e - 1. \end{aligned}$$

(б) Слично,

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

## 7.2. Особине одређеног интеграла и његова веза са неодређеним

Нека су  $f$  и  $g$  интегралне функције на сегменту  $[a, b]$ , тачка  $c \in [a, b]$ , а  $k$  реална константа. Наредна тврђења се једноставно доказују.

Шерђеје 7.2. (i) Функције  $kf$  и  $f \pm g$  су такође интегралне и важи

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Функције  $fg$  и (под претпоставком да је  $g$  свуда позитивна или свуда негативна)  $f/g$  су такође интегралне.

$$(iii) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

<sup>2</sup>Henri Lebesgue (1875-1941), француски математичар

Интеграл константе  $k$  је тривијално једнак  $\int_a^b k dx = k(b-a)$ .

Даље, ако је функција  $f$  ненегативна на сегменту  $[a, b]$  и  $b > a$ , онда су све њене интегралне суме ненегативне. Узимањем лимеса када дијаметар поделе тежи нули следи  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

Последица овог тврђења је да, ако на сегменту  $[a, b]$  важи  $m \leq f(x) \leq M$  за неке константе  $m$  и  $M$ , онда је

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Фиксирајмо сада доњу границу интеграције  $a$  и посматрајмо функцију

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

где је  $f$  непрекидна функција. Доказаћемо да је функција  $F$  диференцијабилна и да је при томе  $F'(x) = f(x)$ .

Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. По дефиницији непрекидности, може се одабрати  $\Delta x > 0$  тако да за свако  $t \in [x, x + \Delta x]$  важи  $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$ . Тада је

$$(f(x) - \varepsilon) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq (f(x) + \varepsilon).$$

Пуштањем  $\Delta x \rightarrow 0$  закључујемо да је

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x).$$

Према томе,  $F$  је управо неодређени интеграл функције  $f$ . Овако добијамо везу између неодређеног и одређеног интеграла.

Шврђење 7.3 (Њутн<sup>3</sup>-Лајбницева<sup>4</sup> теорема). Ако је  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , онда је

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 7.3. Наћи површину између  $x$ -осе и графика функције  $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

Решење. То је полукруг пречника 2 и његова површина је  $S = \pi/2$ . Заправо, како је  $\int f(x)dx = F(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + \text{const}$ , имамо

$$S = \int_{-1}^1 f(x)dx = F(x)|_{-1}^1 = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

### 7.3. Смена променљиве и парцијална интеграција

Један начин да се у одређеном интегралу примени смена променљиве свакако је његово свођење на неодређени и потом употреба Њутн-Лајбницевог теореме. Други начин је директна смена променљиве.

Дакле, ако у одређеном интегралу  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$  уведемо смену  $\left. \begin{matrix} t=g(x) \\ dt=g'(x)dx \end{matrix} \right|$ , где је функција  $g$  диференцијабилна на целом интервалу  $(a, b)$ , онда се  $t$  креће по интервалу  $[g(a), g(b)]$  (како се  $x$  креће по интервалу  $[a, b]$ ), па важи

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt. \tag{1}$$

Ово је лако проверити. Заиста, ако су неодређени интеграли

$$\int f(t)dt = F(t) + \text{const} \quad \text{и одатле} \quad \int f(g(x))g'(x)dt = F(g(x)) + \text{const},$$

онда је  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = F(t)\Big|_{t=g(a)}^{t=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$ .

Услов дефинисаности и диференцијабилности функције  $g$  на целом интервалу интеграције је кључан - без њега једнакост (1) не мора да важи.

Слично се понаша и парцијална интеграција. Наиме, пошто је  $\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx = \int_a^b (uv' + u'v)dx = \int_a^b (uv)'dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ , важи

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 7.4. Израчунати  $I = \int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1} dx$ .

Решење. Користимо смену  $\Big|_{dt=2x dx}^{t=x^2-1}$ .

За  $x = 1$  и  $x = 3$  имамо редом  $t = 0$  и  $t = 8$ , и то су границе у добијеном интегралу по  $t$ . Тако је  $I = \frac{1}{2} \int_0^8 t^{1/3} dt = \frac{3}{8} t^{4/3}\Big|_0^8 = 6$ .

Пример 7.5. Израчунати  $I = \int_0^1 x^2 \arctg x dx$ .

Решење. Користимо парцијалну интеграцију  $\Big|_{du=\frac{dx}{1+x^2}}^{u=\arctg x} \Big|_{dv=x^2 dx}^{v=\frac{1}{3}x^3}$ .

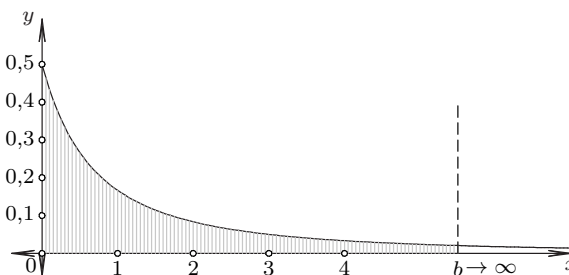
$$\text{Имамо } I = \int_0^1 u dv = uv\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v du = \frac{1}{3}x^3 \arctg x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2}.$$

$$\text{При томе је } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \int_{dt=2x dx}^{t=1+x^2} \frac{1}{2} \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2} (t - \ln t)\Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{1 - \ln 2}{2}, \text{ па је } I = \frac{\pi + 2 \ln 2 - 2}{12}.$$

## 7.4. Несвојствени интеграл

*Несвојствени интеграл* је интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  у коме је  $a = -\infty$  и/или  $b = \infty$ , или  $f$  није дефинисано у неким тачкама интервала  $[a, b]$ . Овакав интеграл се не може дефинисати као лимес интегралне суме. Ипак, он има смисла као лимес одређеног интеграла.

Пример 7.6. Израчунати укупну површину испод графика функције  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  за  $x \geq 0$ .



Решење. Тражена површина је  $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$ .

Део ове површине у области  $0 \leq x \leq b$  је  $I_b = \int_0^b \frac{dx}{x^2+3x+2}$ . Како је  $\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) = \ln \frac{x+1}{x+2} + \text{const}$ , добијамо  $I_b = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=0}^{x=b} = \ln 2 - \ln \frac{b+2}{b+1}$ .

Површину  $I$  добијамо пуштањем  $b \rightarrow \infty$ . Дакле,  $I = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln 2 - \ln \frac{b+2}{b+1}) = \ln 2$ .

Несвојствене интеграле са бесконачним границама уводимо једнакостима

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f dx = \int_{-\infty}^a f dx + \int_a^\infty f dx.$$

Такође је могуће да интегранд  $f$  не буде дефинисан (на пример, да тежи бесконачности) у неким тачкама интервала. Ако је само један крај интервала, рецимо  $c$ , проблематичан, уводимо једноставно

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \rightarrow c^-} \int_a^b f(x)dx, \quad \text{односно} \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow c^+} \int_a^b f(x)dx.$$

Ако  $f$  није дефинисано у некој тачки  $c$  унутар интервала  $[a, b]$ , интеграл бисмо рачунали као збир:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Пример 7.7. Израчунати  $I = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ .

Решење. Пошто подинтегрална функција није дефинисана за  $x = 1$ , интервал интеграције  $[0, 2]$  делимо на два дела:  $[0, 1] \cup [1, 2]$ . Неодређени интеграл је

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} \stackrel{x=t^3+1}{\substack{dx=3t^2 dt}} \int 3t(t^3+1)dt = \frac{3}{10}t^2(2t^3+5) + \text{const} = \frac{3}{10}(2x+3)(x-1)^{2/3} + \text{const}.$$

Сада налазимо:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{3}{10}[(2b+3)(b-1)^{2/3} - 3] = -\frac{9}{10} \text{ и}$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{3}{10}[7 - (2a+3)(a-1)^{2/3}] = \frac{21}{10},$$

$$\text{па је } I = I_1 + I_2 = -\frac{9}{10} + \frac{21}{10} = \frac{6}{5}.$$

## 7.5. Задаци

1. За  $n \in \mathbb{N}$  израчунати: (а)  $\int_0^1 x^n dx$ ; (б)  $\int_0^\pi \sin nx dx$ .

Решење. (а)  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ , па је  $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0^{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ .

(б)  $\int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C$ , па је  $I_n = \int_0^\pi \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx|_0^\pi = \frac{2}{n}$  за  $n$  непарно и  $I_n = 0$  за  $n$  парно.

2. Израчунати  $I = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2x \cos 4x dx$ .

Решење. Трансформација производа у збир даје  $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x \cos 4x + \cos 3x \cos 4x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos 5x + \cos x + \cos 7x)$ . Како је  $\int_0^{\pi/2} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ , добијамо  $I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x) dx = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{19}{105}$ .

3. Израчунати  $I = \int_{1/8}^{1/3} \frac{1-x}{\sqrt{x^2+x}} dx$ .

Решење. Ојлерова смена  $\sqrt{x^2+x} = x+t$ :  $x^2+x = x^2+2tx+t^2$ , тј.  $x = \frac{t^2}{1-2t}$ ,  $\sqrt{x^2+x} = \frac{t-t^2}{1-2t}$ ,  $dx = \frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2} dt$ . Када  $x$  иде од  $\frac{1}{8}$  до  $\frac{1}{3}$ ,  $t$  иде од  $\frac{1}{4}$  до  $\frac{1}{3}$ . Према томе,  $I = \int_{1/4}^{1/3} \frac{1-\frac{t^2}{1-2t}}{\frac{t-t^2}{1-2t}} \cdot \frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2} dt = 2 \int_{1/4}^{1/3} \frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2} dt$ .

Имамо  $\frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{-3t+\frac{5}{4}}{(1-2t)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{3/2}{1-2t} - \frac{1/4}{(1-2t)^2}$ , па је  $\int \frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2} dt = -\frac{1}{4}t - \frac{3}{4} \ln |1-2t| - \frac{1}{8(1-2t)} + C$  и  $I = 2[-\frac{1}{4}t - \frac{3}{4} \ln |1-2t| - \frac{1}{8(1-2t)}]|_{1/4}^{1/3} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{7}{24}$ .

4. Израчунати  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\lg x}}$ .

Решење. У овом задатку одговарајући неодређени интеграл није елементарна функција. Ипак, дати одређени интеграл може се израчунати захваљујући симетрији подинтегралне функције.

Означимо  $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}$  и приметимо да је  $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + 1} = 1$ . Зато је  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} f(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} f(x) dx + \int_0^{\pi/4} f(\frac{\pi}{2} - x) dx = \int_0^{\pi/4} [f(x) dx + f(\frac{\pi}{2} - x)] dx = \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{\pi}{4}$ .

5. Израчунати  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ , где је  $n \geq 0$  цео број.

Решење. Одговарајући неодређен интеграл је израчунат раније. Овде понављам рачун због значаја.

Имамо  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$ . Коришћењем парцијалне интеграције  $\left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad v = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \\ du = -\sin x dx, \quad dv = \sin^{n-2} x \cos x dx \end{array} \right|$  добићемо  $I_{n-2} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x = \int_0^{\pi/2} u dv = uv|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} v du = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n x = \frac{1}{n-1} I_n$ . Дакле,  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . Како је  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $I_1 = 1$ , коначно добијамо

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ парно,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ непарно,} \end{cases}$$

где је  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots$

6. Израчунати интеграл  $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ .

Решење. Направићемо рекурентну везу за  $I_n$ . Како је  $\sin nx - \sin(n-2)x = 2 \sin x \cos(n-1)x$ , интеграцијом следи  $I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{2 \sin x \cos(n-1)x}{\sin x} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(n-1)x = 0$  за  $n > 1$ . Према томе, за  $n \geq 2$  важи  $I_n = I_{n-2}$ .

Следи да је  $I_n = I_{n-2} = I_{n-4} = \dots = I_0 = 0$  ако је  $n$  парно, а  $I_n = I_{n-2} = \dots = I_1 = \pi$  ако је  $n$  непарно.

7. Који од следећих несвојствених интеграла дивергирају? Израчунати оне који конвергирају:

(а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ ; (б)  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$ ; (в)  $\int_0^{\infty} \sin x dx$ .

Решење. (а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}$ .

(б) Смена  $y = x^4$ ,  $dy = 4x^3 dx$ :  $I = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-y} dy = -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-y}|_0^b = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = \frac{1}{4}$ .

(в)  $\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - \cos b)$ , што не постоји, тј. интеграл дивергира.

8. Израчунати (а)  $I_p = \int_0^1 x^p dx$  за  $-1 < p < 0$ ; (б)  $J_p = \int_0^1 x^p \ln x dx$  за  $p > -1$ .

Решење. (а) Овај интеграл је несвојствен јер  $x^p$  није дефинисано за  $x = 0$ , Ипак, пошто је  $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}$ , и овде важи  $I_p = \frac{1}{p+1} x^{p+1}|_0^1 = \frac{1}{p+1}$ .

(б) Интеграл је несвојствен јер  $x^p \ln x$  није дефинисано за  $x = 0$ .

Парцијална интеграција  $\left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad v = \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ du = dx/x, \quad dv = x^p dx \end{array} \right|$  даје  $J_p = \int_0^1 u dv = \lim_{t \rightarrow 0} u(x)v(x)|_t^1 - \int_0^1 v du = 0 - \frac{1}{p+1} \lim_{t \rightarrow 0} t^{p+1} \ln t - \frac{1}{p+1} \int_0^1 x^p dx$ . Како је  $\frac{1}{p+1} \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{(p+1)^2}$  и по Лопиталовом правилу је  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{p+1} \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t^{-1-p}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{-1}}{(-1-p)t^{-2-p}} = -\frac{1}{p+1} t^{p+1} = 0$ , следи  $J_p = -\frac{1}{(p+1)^2}$ .

9. Израчунати  $I = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$ .

Решење. Смена  $t = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ , тј.  $\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right|$  даје  $I = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2t^2 dt}{(t^2-1)^2}$ . Ако запишемо  $\frac{2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} = \frac{A(t^3+t^2-t-1)+B(t^2+2t+1)+C(t^3-t^2-t+1)+D(t^2-2t+1)}{(t^2-1)^2}$ , добићемо  $A+C=0$ ,  $A+B-C+D=2$ ,  $-A+2B-C-2D=0$  и  $-A+B+C+D=0$ , и одатле  $A=B=D=\frac{1}{2}$ ,  $C=-\frac{1}{2}$ . Дакле,  $I = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left( \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1})|_{\sqrt{2}}^b = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

10. Израчунати  $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ , где је  $n \geq 0$  цео број.

Решење. Парцијална интеграција  $\left| \begin{matrix} u=x^n, & v=e^{-x} \\ du=nx^{n-1}dx, & dv=-e^{-x}dx \end{matrix} \right|$  даје  $I_n = -\lim_{b \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \Big|_0^b + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}$ . Како је  $I_0 = 1$ , одавде добијамо  $I_n = n!$ .

Напомена. Функција

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

је позната као *Гама-функција*. Показали смо да је  $\Gamma(y) = (y-1)!$  ако је  $y$  ненегативан цео број.

11. Израчунати  $I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \sin x}{2 + \cos x} dx$ .

Решење. Уведимо  $\left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \end{matrix} \right|$ . Тада је  $\frac{2+\sin x}{2+\cos x} = \frac{2(t^2+t+1)}{t^2+3}$ , а границе интеграла ће бити  $t(0) = 0$  и  $t(2\pi) = 0$ . Добили смо  $I = \int_0^0 \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} dt$ , што је нула. Међутим, као интеграл позитивне функције на  $[0, 2\pi]$ , дати интеграл очито није нула - где је грешка?

Спорне су границе од 0 до 0. Наиме, услови за смену променљиве нису задовољени јер  $t$  није дефинисано за  $x = \pi$ . Уместо тога, интеграл  $I$  пишемо као збир  $I = I_1 + I_2$ , где је  $I_1 = \int_0^\pi \frac{2+\sin x}{2+\cos x} dx$  и  $I_2 = \int_\pi^{2\pi} \frac{2+\sin x}{2+\cos x} dx$ . Оба интеграла се поменутом сменом свде на несвојствене:  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} dt$  и  $I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} dt$ .

Како је  $\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{2t}{t^2+1} + \frac{4-2t}{t^2+3}$ , имамо  $\int \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} dt = \ln \frac{t^2+1}{t^2+3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \operatorname{const}$ . Отуда је  $I_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{b^2+1}{b^2+3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{3}} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \ln \frac{1}{3}$ . Слично се добија  $I_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \ln \frac{1}{3}$  и, коначно,  $I = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \approx 7,2552$ .

12. Израчунати интеграл  $I = \int_0^1 \ln(x - x^3) dx$ .

Решење. Интервал интеграције  $[0, 1]$  делимо на два дела: нпр.  $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ .

Неодређени интеграл је  $\int \ln(x - x^3) dx \stackrel{\left| \begin{matrix} u=\ln(x-x^3) & v=x \\ du=\frac{1-3x^2}{x-x^3} dx & dv=dx \end{matrix} \right|}{=} \int u dv = uv - \int v du = x \ln(x - x^3) - \int \frac{1-3x^2}{1-x^2} dx = x \ln(x - x^3) - 3x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \operatorname{const}$ .

Сада налазимо:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x - x^3) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} \ln(x - x^3) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ a \ln(a - a^3) - 3a + \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{8} - \frac{3}{2};$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x - x^3) dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^b \ln(x - x^3) dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[ b \ln(b - b^3) - 3b + \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{27}{8} - \frac{3}{2}. \text{ Како је при}$$

томе  $\lim_{b \rightarrow 1^-} \left[ b \ln(b - b^3) - 3b + \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| \right] = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[ \ln(b - b^3) + \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| - (1-b) \ln(b - b^3) - 3b \right] = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[ \ln(b(1+b)^2) - (1-b) \ln(b - b^3) - 3b \right] = \ln 4 - 3 - \lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b) \ln(b - b^3) = \ln 4 - 3$  по Лопиталовом правилу, следи  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 4 - 3 \approx -1,61371$ .



13. Израчунати  $I = \int_0^1 \ln(x^3 + 1) dx$ .

14. Израчунати  $I = \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ .

15. Израчунати  $I = \int_1^2 \sqrt{2^{3x-1} + 1} dx$ .

16. За које  $p$  интеграл  $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^p x}$  конвергира?

17. Израчунати  $I = \int_0^1 x^7 \sin(3 \ln x) dx$ .

18. Израчунати (а)  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ ; (б)  $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ .

19. Израчунати  $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}$ .

20. Израчунати  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt[4]{x}}$ .

**Одговори на задатке 13-20.**

13.  $I = 2 \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3 \approx 0,20009$ .

14. Смена  $t = \cos x$ :  $I = \int_{-1}^1 \sqrt{2-t^2} dt = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2,5708$ .

15.  $I = 1 + \frac{2}{\ln 8} \left( \sqrt{33} - \sqrt{5} + \ln \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{33}} \right) \approx 3,66814$ .

16. За  $p > 1$ : тада је  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \frac{1}{1-p} \ln^{1-p} x + C \Big|_2^{\infty} = \frac{\ln 2}{p-1}$ , али  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$ .

17.  $I = -\frac{3}{73} \approx 0,041096$ .

18.  $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,22144$ ,  $J = \frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$ .

19.  $I = \frac{1}{4} \left( \pi\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} - \ln 7 \right) \approx 1,61612$ .

20.  $I = 4 \ln 2 - \frac{16}{9} - \frac{2}{3}\pi \approx -1,09958$ .