УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

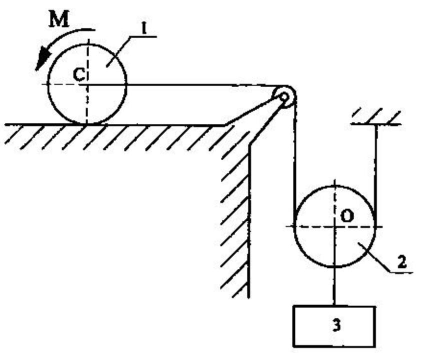
МЕХАНИКА 3

MEX 210-0799
14. фебруар 2019.
Прва група

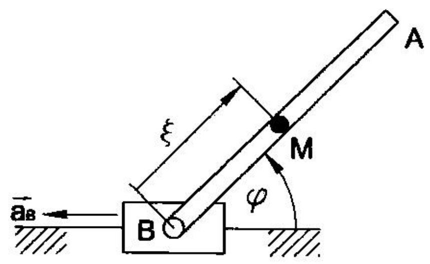
1. Хомогени диск 1, масе m и полупречника R, котрља се без клизања по хоризонталној подлози (слика 1). За центар диска 1 је везано неистегљиво уже које је пребачено преко хомогеног диска 2, масе m и полупречника R, а затим везано за непомичну тачку. За центар диска 2 неистегљивим ужетом везано је тело 3 масе m. Крак отпора котрљању диска 1 по подлози је $k = 0.1R$. Одредити интензитет момента M да би се тело 3 кретало константним убрзањем интензитета g, смера навише.

2. Цев AB, занемарљиве масе, креће се у вертикалној равни. Крајем B, цев је везана зглобно за клизач који се креће дуж хоризонталне праволинијске вођице константним убрзањем $a_B = 2g$ (слика 2). Закон промене угла је $\varphi = \omega t$. Кроз цев може да се креће куглица M масе m. У почетном тренутку куглица је била у положају B и имала почетну релативну брзину $V_{r0} = g/(2\omega)$. Одредити коначну једначину релативног кретања куглице у односу на цев ($\xi = \xi(t)$), као и укупну реакцију везе у функцији од времена.

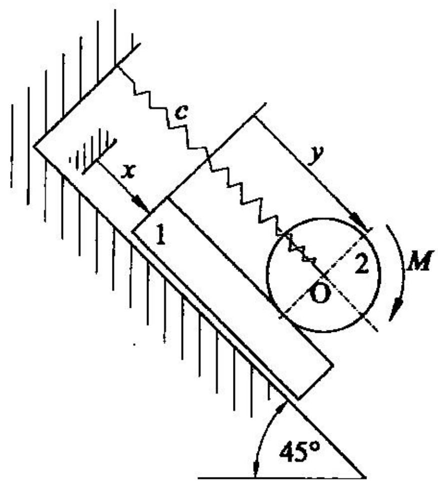
3. Материјални систем (слика 3) састоји се од тела 1, масе m и диска 2, масе m и полупречника R. На диск делује спрег момента интензитета M. Центар диска везан је опругом крутости c, чији је други крај везан за непокретну раван. Ако се диск по телу котрља без проклизавања, а систем креће по глаткој стрмој равни нагибног угла 45°, написати диференцијалне једначине кретања система за задате генералисане координате. У положају $x = y = 0$ опруга је ненапрегнута.



Слика 1



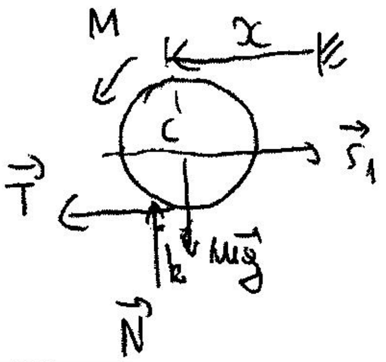
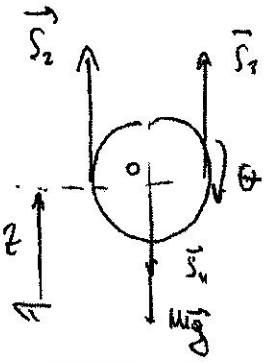
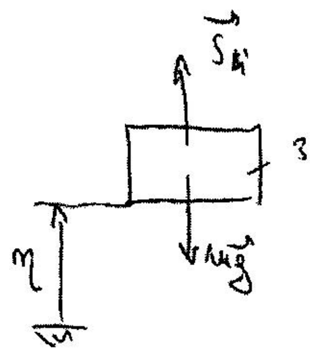
Слика 2



Слика 3

1. задатак

I група

Диск 1	**Диск 2**	**Тело 3**
		
$m\ddot{x} = T - S_1$ $m\ddot{y} = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$ $J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = M - Nk - TR$ $\dot{x} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{x} / R$ $S_1 = \frac{M}{R} - 0.1mg - \frac{3}{2}m\ddot{x}$	$S_2 = S_1 = \frac{M}{R} - 0.1mg - \frac{3}{2}m\ddot{x}$ $\dot{x} = 2\dot{z} \Rightarrow \ddot{x} = 2\ddot{z},\ \ddot{\Theta} = \ddot{z} / R$ $m\ddot{z} = S_2 + S_3 - S_4 - mg$ $J_{O\zeta_2}\ddot{\Theta} = S_2R - S_3R$ $\frac{3}{2}m\ddot{z} = 2S_2 - S_4 - mg$ $S_4 = 2\frac{M}{R} - 1.2mg - \frac{15}{2}m\ddot{z}$	$S_4' = S_4,\ \ddot{\eta} = \ddot{z}$ $m\ddot{\eta} = S_4' - mg$ $m\ddot{\eta} = 2\frac{M}{R} - 1.2mg - \frac{15}{2}m\ddot{z} - mg$ -услов задатка: $\ddot{\eta} = g$ $mg = 2\frac{M}{R} - 1.2mg - \frac{15}{2}mg - mg$ $\boxed{M = 5.35mgR = \frac{107}{20}mgR}$

II група – слика у огледалу

2. задатак

I група

$$F_{pN1}^{in} = m\omega^2\xi, \quad F_{pN2}^{in} = ma_B = 2mg$$

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{pN1}^{in} + \vec{F}_{pN2}^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}$$

$$m\ddot{\xi} = F_{pN1}^{in} + F_{pN2}^{in}\cos\varphi - mg\sin\varphi$$

$$\ddot{\xi} - \omega^2\xi = 2g\cos(\omega t) - g\sin(\omega t)$$

$$\xi_h = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$\xi_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$A = -\frac{g}{\omega^2},\ B = \frac{g}{2\omega^2},\ C_1 = C_2 = \frac{g}{2\omega^2}$$

$$\boxed{\xi = \frac{g}{2\omega^2}e^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}C_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)}$$

$$m\ddot{\eta} = N - F_{cor}^{in} - F_{pN2}^{in}\sin\varphi - mg\cos\varphi = 0$$

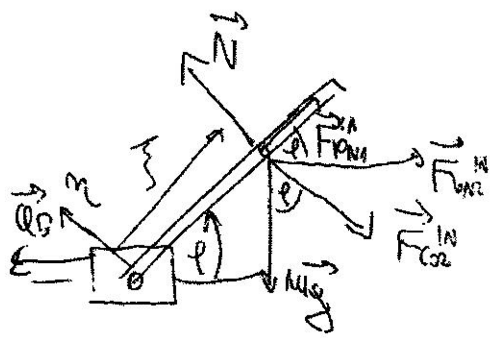
$$N = F_{cor}^{in} + F_{pN2}^{in}\sin\varphi + mg\cos\varphi$$

$$\dot{\xi} = \frac{g}{2\omega}e^{\omega t} - \frac{g}{2\omega}C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{g}{2\omega}\cos(\omega t)$$

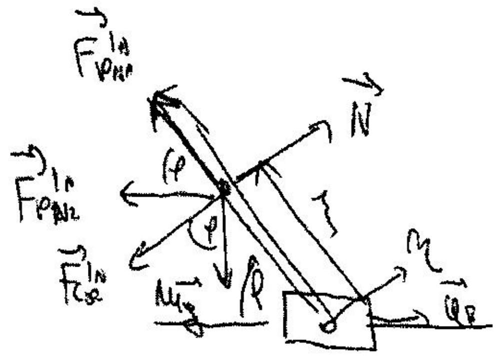
$$F_{cor}^{in} = 2m\omega\dot{\xi} = mge^{\omega t} - mgC_2 e^{-\omega t} + 2mg\sin(\omega t) + mg\cos$$

$$\boxed{N = mge^{\omega t} - mgC_2 e^{-\omega t} + 4mg\sin(\omega t) + 2mg\cos(\omega t)}$$

I група



II група



3. задатак

3. задатак

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{R}$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,\ E_k^{(2)} = \frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{y} + \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} = m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{y} + \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m\dot{y};\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 2m\ddot{x} + m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} + \frac{3}{2}m\dot{y};\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{y}$$

$$\delta A(m_1\vec{g}) = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\delta x \Rightarrow Q_x^{m_1\vec{g}} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$\delta A(m_2\vec{g}) = \frac{\sqrt{2}}{2}mg(\delta x + \delta y) \Rightarrow Q_x^{m_2\vec{g}} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg,\quad Q_y^{m_2\vec{g}} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

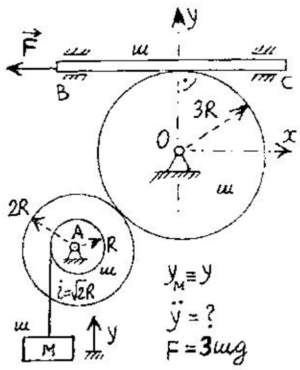
$$E_p(\vec{F}_c) = \frac{1}{2}c(y-x)^2 + C$$

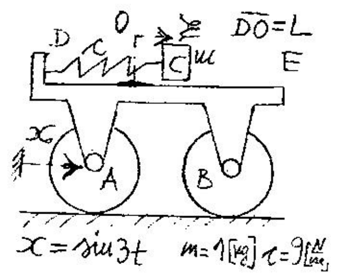
$$Q_x^{\vec{F}_c} = -\frac{\partial E_p(\vec{F}_c)}{\partial x} = c(y-x),\ Q_y^{\vec{F}_c} = -\frac{\partial E_p(\vec{F}_c)}{\partial y} = -c(y-x)$$

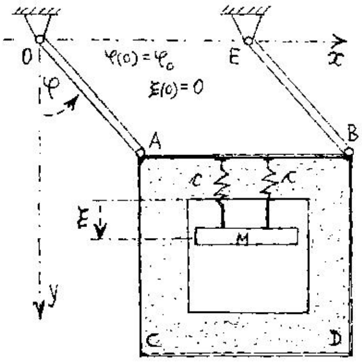
$$\delta A(M) = M\delta\varphi = \frac{M}{R}\delta y \Rightarrow Q_y^M = \frac{M}{R}$$

$$Q_x = \sqrt{2}mg + c(y-x);\ Q_y = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - c(y-x) + \frac{M}{R}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x: & 2m\ddot{x} + m\ddot{y} = \sqrt{2}mg + c(y-x) \\ y: & m\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - c(y-x) + \frac{M}{R} \end{array}}$$



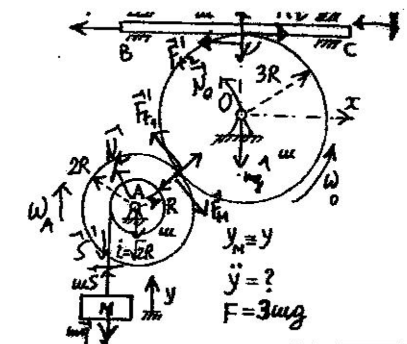


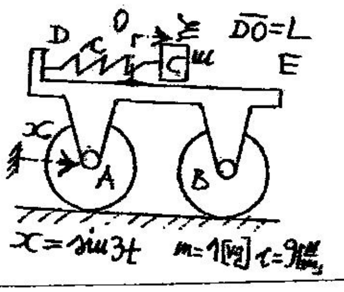


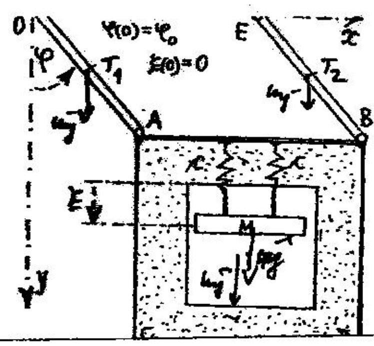
Mehanika 3 ① grupa ① Sistem u vertikalnoj ravni čine: tereti M, mase m, uže zanemarljive mase, koaksijalni disk A poluprečnika: R, 2R, mase m i kraka inercije $i=R\sqrt{2}$, disk 0 mase m poluprečnika 3R, letve BC mase m i dužine L. Veze u tačkama A, 0 su zglobne, između elemenata sistema nema proklizavanja. Na letvu dejstvuje horizontalna sila F=3mg. Odrediti: 1) ubrzanje tereta M, 2) silu u užetu i silu između letve BC i diska 0.

② Teret C, mase m, m=1 (Kg) koji je oprugom krutosti c, c=9 (N/m) vezan za tačku D (kućišta) kreće se po idelano glatkom kućištu. Opruga je nenapregnuta kada je $\xi=0$ (koordinatna osa 0ξ je vezana za kućište). Diskovi, poluprečnika R, kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Za centre diskova vezano je zglobovima: A, B kućište DE. Centri diskova kreću se po zakonu x=sin(3t). U početnom trenutku $t_0=0$, sistem je bio u miru, $\xi(0)=0$. Mase diskova i kućišta zanemariti. Odrediti: 1) diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja tereta C, 2) konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta C: $\xi(t)=?$

③ Sistem je u vertikalnoj ravni (*0xy* je inercijalni sistem), sastoji se iz: dva štapa (svaki je mase m) 0A, EB (0A=EB=R), kvadratnog rama kućišta ABCD mase m, stranica (spoljna R, unutrašnja h), tereta M mase m (koji može da se kreće unutar kućišta) i dve opruge krutosti c (bez mase). Veze u tačkama 0, E, A, B su zglobne. U početnom trenutku $t_o=0$ sistem je mirovao, $\varphi(0)=\varphi_o$, $\xi_o=0$, opruge su tada bile nenapregnute. Za date generalisane koordinate φ, ξ odrediti: a) diferencijalne jednačine kretanja, b) u linearnom slučaju, $\varphi=\varepsilon f_1(t)$, $\xi=\varepsilon f_2(t)$, ε je beskonačno mala, $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$, konačne jednačine kretanja.







(1) ZADATAK (1) GRUPA $\boxed{F = 3mg}$

$\{$ ili: $T = \frac{9}{2} m\dot{y}^2 \quad 9m\ddot{y} = 2F - mg \}$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = S - mg \\ J_{Az}\dot{\omega}_A = F_{t_1} 2R - SR \\ J_{Oz}\dot{\omega}_0 = F_{t_2} 3R - F_{t_1} 3R \\ m\ddot{x} = F - F_{t_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} J_{Az} = 2mR^2 & \omega_A = \frac{\dot{y}}{R} \\ J_{Oz} = \frac{9}{2} mR^2 & \omega_0 = \frac{2}{3}\frac{\dot{y}}{R} \\ & \dot{x} = 2\dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{5}{9} g \\ S &= \frac{14}{9} mg \\ F_{t_2} &= \frac{17}{9} mg \end{aligned}$$

GRUPA (2) $\boxed{F = 2mg}$

$$\ddot{y} = \frac{g}{3} \qquad S = \frac{4}{3} mg \qquad F_{t_2} = \frac{4}{3} mg$$

(2) ZADATAK (1) GRUPA: $\boxed{x = \sin 3t \quad c = 9}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\cos 3t \\ \ddot{x} = -9\sin 3t \end{cases} \quad F_p^{in} = m a_p \quad m\ddot{\vec{r}}_{rel} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^{in} + \cancel{\vec{F}_{cor}^{in}} \Big/ \cdot \vec{\lambda} \qquad \ddot{\xi} + 9\xi = 9\sin 3t$$

$$\begin{cases} \xi = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t - \frac{3}{2} t\cos 3t \\ \dot{\xi}(0) = 0 \quad \xi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}\sin 3t - \frac{3}{2} t\cos 3t$$

(2) GRUPA: $\boxed{x = \sin 2t \quad c = 4}$

$$\ddot{\xi} + 4\xi = 4\sin 2t \quad \begin{cases} \xi = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - t\cos 2t \\ \dot{\xi}(0) = 0 \quad \xi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t$$

(3) ZADATAK (1) i (2) GRUPA ($R = r \quad h = L$)

$$\begin{cases} x_M = R\sin\varphi + A_1 \\ y_M = R\cos\varphi + A_2 + \xi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_M = R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_M = -R\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\xi} \end{cases} \quad v_M^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin\varphi$$

$$T = \frac{1}{2} J_{Oz}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{Ez}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_{(K)T}^2 + \frac{1}{2} m v_M^2 \qquad J_{Oz} = J_{Ez} = \frac{1}{3} mR^2 \quad v_T^2 = R^2\dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{4}{3} mR^2\dot{\varphi}^2 - mR\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin\varphi + \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{8}{3} mR^2\dot{\varphi} - mR\dot{\xi}\sin\varphi & \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mR\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos\varphi \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} - mR\dot{\varphi}\sin\varphi & \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$

$$\delta A = mg\,\delta y_{T_1} + mg\,\delta y_{T_2} + mg\,\delta y_T - c\xi\delta\xi - c\xi\delta\xi + mg\,\delta y_M \qquad \begin{cases} Q_\varphi = -3mg\sin\varphi \\ Q_\xi = mg - 2c\xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{3} mR^2\ddot{\varphi} - mR\ddot{\xi}\sin\varphi - \cancel{mR\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos\varphi} + \cancel{mR\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos\varphi} = -3mg\sin\varphi \\ m\ddot{\xi} - mR\ddot{\varphi}\sin\varphi - mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi = mg - 2c\xi \end{cases} \Bigg| \begin{aligned} \varphi &= \varepsilon f_1(t) \\ \xi &= \varepsilon f_2(t) \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{3} mR^2\ddot{\varphi} = -3mg\varphi \\ m\ddot{\xi} = mg - 2c\xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \left(\frac{9}{8}\frac{g}{R}\right)\varphi = 0 \\ \ddot{\xi} + \left(\frac{2c}{m}\right)\xi = g \end{cases} \Bigg| \begin{aligned} \dot{\varphi}(0) &= 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\xi}(0) &= 0 \quad \xi(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{9g}{8R}}\,t + \cancel{C_2}^{\,0}\sin\sqrt{\frac{9g}{8R}}\,t \\ \xi = C_3\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t + \cancel{C_4}_{\,0}\sin\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t + \frac{mg}{2c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2R}}\,t\right) \\ \xi = \frac{mg}{2c}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

PRVA GRUPA

UNIVERZITETUBEOGRADU
MAŠINSKIFAKULTET
KATEDRAZAMEHANIKU
ul. KraljiceMarije 16, 11120 Beograd 35

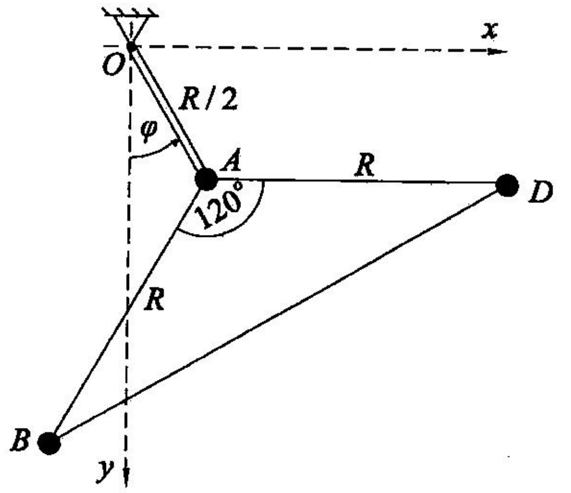
http://nastava.mas.bg.ac.rs/nastava/viewforum.php?f=65&sid=09cf29e048507473c6a3ba3cf57393a0

MEHANIKA 3

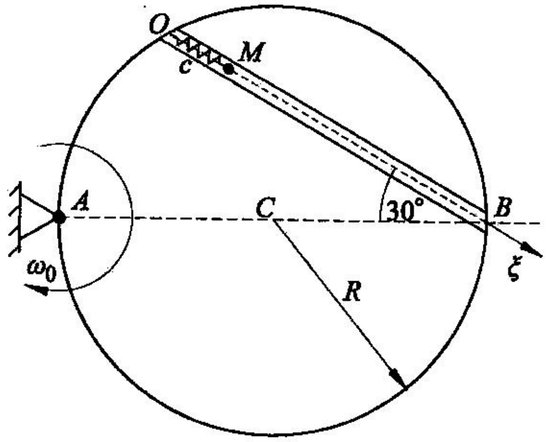
MEX 210-0799

20. septembar 2018.

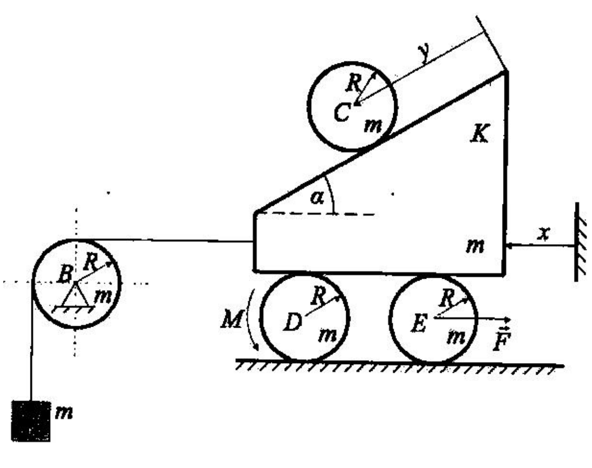
1. Mehanički sistem prikazan na slici, koji se nalazi u vertikalnoj ravni, čini laki štap OA koji je zavaren za laki jednakokraki trouga u tački A u čijim temenima se nalaze tri materijalne tačke A, B i D masa m, $2m$ i $2m$ respektivno. U tački O štap OA zglobno je vezan, dok je $\sphericalangle BAD = 120^\circ$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ mehanički sistem je mirovao, pri čemu je štap OA gradio ugao od 60° $\left(\varphi(t_0) = 60^\circ\right)$ sa osom Oy datog koordinatnog sistema, koja je usmerena vertikalno naniže. Dato je: $\overline{AB} = \overline{AD} = R, \overline{OA} = R/2$. Odrediti: 1) ugaono ubrzanje štapa OA u funkciji ugla φ, 2) reakcije u osloncu O u trenutku t_1 kada štap OA zauzima verikalan položaj $\varphi(t_1) = 0$.



2. Disk poluprečnika R obrće se u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose Az ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω_0. Duž kanala koji je urezan u disk (ugao izmedju dijametra AB i ose kanala je 30°) može da klizi bez trenja tačka M mase m koja je oprugom krutosti $c = 5m\omega_0^2$ vezana za obodnu tačku O diska, pri čemu je dužina nenapregnute opruge $l_0 = R/5$. Ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$ tačka M bila u položaju $\overline{OM_0} = R/8$ u relativnom miru u odnosu na disk, odrediti: a) konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke M u odnosu na pokretnu koordinatnu osu $O\xi$ koja je vezana za kanal diska sa koordinatnim početkom u tački O, 2) Koriolisovu silu u funkciji vremena.



3. Mehanički sistem prikazan na slici, koji se nalazi u vertikalnoj ravni, sastoji se od platforme K mase m i nagiba $\alpha = 30^\circ$, homogenih diskova B, C, D i E jednakih poluprečnika R i masa m, kao i tereta A mase m. Diskovi C, D i E kotrljaju se bez klizanja. Na disk D dejstvuje spreg sila momenta M=$4mgR$, dok u središtu diska E dejstvuje sila F=$2mg$ čiji je pravac horizontalan, smerova prikazanih na slici. U tački B veza je zglobna. Odrediti u odnosu na date generalisane koordinate x (apsolutna) i y (relativna): 1) diferencijalne jednačine kretanja, 2) generalisana ubrzanja.



$V_A=\frac{R}{2}\dot\varphi$, $V_B=V_D=\overline{OB}\,\dot\varphi=\frac{\sqrt7}{2}R\dot\varphi$, $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{\sqrt7}{2}$

$\frac{dL_{Oz}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_{Oz}^{\vec F_i^e}$, $\boxed{L_{Oz}}=m\left(\frac{R}{2}\right)^2\dot\varphi+2\left(2m\,\frac{7}{4}R^2\dot\varphi\right)=\boxed{\frac{29}{4}mR^2\dot\varphi}$

$\rho_C=\frac{\frac{R}{2}\cdot m+2\cdot 2m\cdot R}{m+2m+2m}=\frac{9}{10}R$, $M_{Oz}=-Mg\rho_C\sin\varphi$

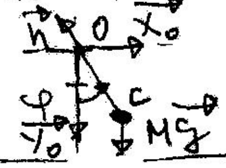
$M=5m$, $\frac{29}{4}mR^2\ddot\varphi=-5mg\,\frac{9}{10}R\sin\varphi$

$\ddot\varphi=-\frac{18}{29}\frac{g}{R}\sin\varphi$, $\varphi(0)=60^\circ$, $\dot\varphi(0)=0$

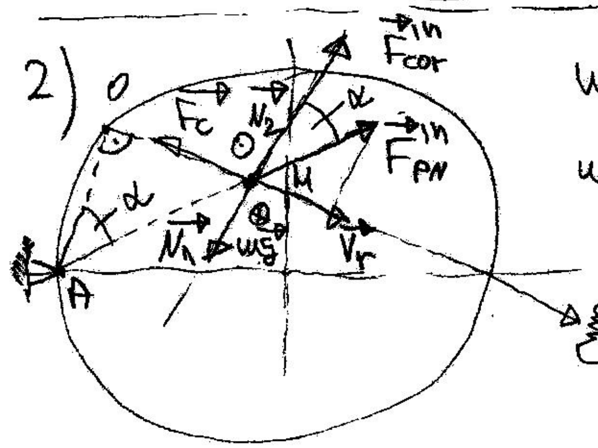
$\dot\varphi^2=\frac{36}{29}\frac{g}{R}\left(\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)$, $\ddot\varphi(\varphi=0)=0$, $\dot\varphi^2(\varphi=0)=\frac{18}{29}\frac{g}{R}$

$M\vec a_C=\sum\vec F_i^e$, $n:\ 5m\frac{V_{C1}^2}{\rho_C}=-Y_O\cos\varphi_1-X_O\sin\varphi_1-5mg\cos\varphi_1$

за $\varphi_1=0\Rightarrow\boxed{Y_O=-\frac{226}{29}mg}$



2)



$m\vec a_r=m\vec g+\vec F_c+\vec N_1+\vec N_2+\vec F_p^{in}+\vec F_{cor}^{in}\ /\ \vec R$

$m\ddot\xi=-c(\xi-l_0)+m\omega_0^2\xi$

$\ddot\xi+\left(\frac{c}{m}-\omega_0^2\right)\xi=\frac{c}{m}l_0$

I

$c=5m\omega_0^2$, $l_0=\frac{R}{5}$

$\ddot\xi+4\omega_0^2\xi=\omega_0^2R$

$\xi(0)=\frac{R}{8}$, $\dot\xi(0)=0$

$\xi(t)=\frac{R}{8}\left(2-\cos2\omega_0t\right)$

$\dot\xi=\frac{R\omega_0}{4}\sin2\omega_0t$

$F_{cor}^{in}=2m\omega_0\dot\xi$

II

$c=10m\omega_0^2$, $l_0=\frac{R}{5}$

$\ddot\xi+9\omega_0^2\xi=2\omega_0^2R$

$\xi(0)=R/9$, $\dot\xi(0)=0$

$\xi(t)=\frac{R}{9}\left(2-\cos3\omega_0t\right)$

$\dot\xi(t)=\frac{R\omega_0}{3}\sin3\omega_0t$

$F_{cor}^{in}=2m\omega_0\dot\xi$

$$T=\left[\frac{1}{2}mV_A^2\right]_A+\left[\frac{1}{2}J_{Bz}\dot{\varphi}^2\right]_B+\left[\frac{1}{2}mV_K^2\right]_K+\left[\frac{1}{2}mV_D^2+\frac{1}{2}J_{Dz}\dot{\theta}^2\right]_D+$$

$$+\left[\frac{1}{2}mV_E^2+\frac{1}{2}J_{Ez}\dot{\gamma}^2\right]_E+\left[\frac{1}{2}mV_C^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\alpha}^2\right]_C=$$

$$=\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]_A+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right]_B+\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]_K+2\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2\right]_{D+E}+\left\{\frac{1}{2}m\left[(\dot{x}+\dot{y}\cos\alpha)^2+(\dot{y}\sin\alpha)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2\right\}_C=$$

$$=\frac{17}{8}m\dot{x}^2+\frac{3}{4}m\dot{y}^2+m\dot{x}\dot{y}\cos\alpha$$

$$\delta A=\left[mg\,\delta x\right]_A+\left[M\frac{\delta x}{2R}\right]_D+\left[-F\frac{\delta x}{2}\right]_E+\left[mg\sin\alpha\,\delta y\right]_C=$$

$$=2mg\,\delta x+mg\sin\alpha\,\delta y=Q_x\delta x+Q_y\delta y$$

$$Q_x=2mg,\quad Q_y=mg\sin\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=\frac{17}{4}m\dot{x}+m\dot{y}\cos\alpha,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{17}{4}m\ddot{x}+m\ddot{y}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=\frac{3}{2}m\dot{y}+m\dot{x}\cos\alpha,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)=\frac{3}{2}m\ddot{y}+m\ddot{x}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

$$\frac{17}{4}m\ddot{x}+m\ddot{y}\cos\alpha=2mg$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{y}+m\ddot{x}\cos\alpha=mg\sin\alpha$$

$$\ddot{x}=4g\frac{6-\sin2\alpha}{47-4\cos2\alpha},\quad \ddot{y}=2g\frac{17\sin\alpha-8\cos\alpha}{47-4\cos2\alpha}$$

(I) $\alpha=30^\circ \Rightarrow \ddot{x}=\frac{4}{45}\left(6-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g,\quad \ddot{y}=\frac{2}{45}\left(\frac{17}{2}-4\sqrt{3}\right)g$

(II) $\alpha=60^\circ\quad \ddot{x}=\frac{4}{49}\left(6-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g,\quad \ddot{y}=\frac{2}{49}\left(-4+\frac{17\sqrt{3}}{2}\right)g$

PRVAGRUPA

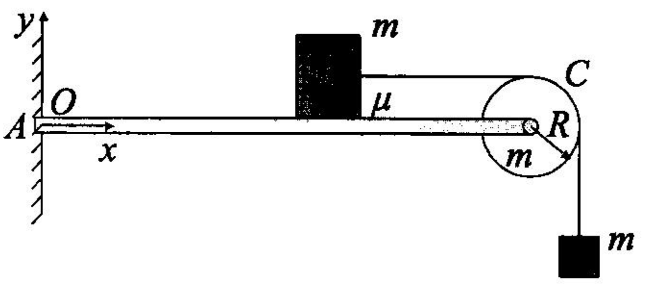
UNIVERZITETUBEOGRADU
MAŠINSKIFAKULTET
KATEDRAZAMEHANIKU
ul. KraljiceMarije 16, 11120 Beograd 35
http://nastava.mas.bg.ac.rs/nastava/viewforum.php?f=65&sid=09cf29e048507473c6a3ba3cf57393a0

MEHANIKA 3

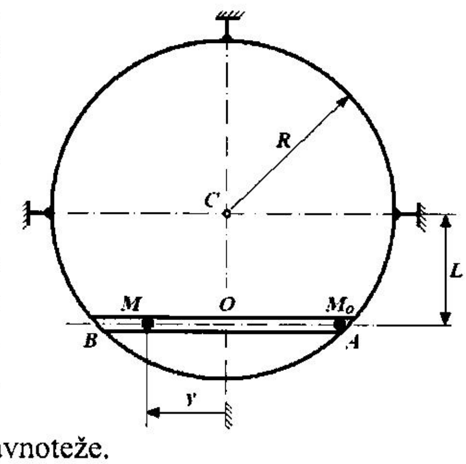
MEX 210-0799

14. jun 2018.

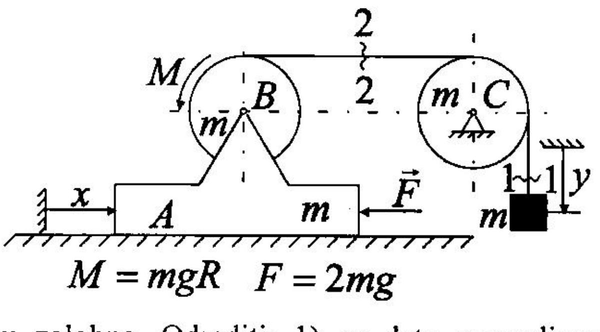
1. Mehanički sistem prikazan na slici, koji se nalazi u vertikalnoj ravni, sastoji se od: dva tereta B i D (jednakih masa m) spojeni lakim neistegljivim užetom, lakog štapa dužine l koji je u tački A uklešten, kao i diska C (poluprečnika R i mase m) koji je zglobno vezan za kraj lakog štapa. Teret B kreće se po lakom štapu, pri čemu je koeficijent trenja klizanja $\mu = 1/2$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ teret B nalazio se na polovini lakog štapa u stanju mirovanja. Odrediti: 1) ubrzanje tereta B, 2) sile u užetu, 3) reakciju veze u ukleštenju A.



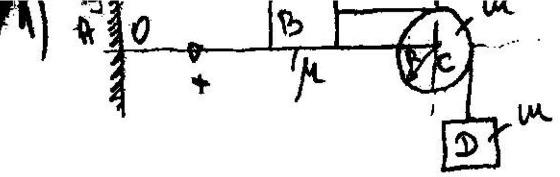
2. Po horizontalnoj tetivi AOB diska poluprečnika R=0,5m, koji se nalazi u vertikalnoj ravni, kreće se kuglica M mase m=0,5kg. Na kuglicu dejstvuje elastična sila proporcionalna rastojanju kuglice M do centra diska C, sa smerom ka centru C (koeficijent proporcionalnosti je c=25/2 N/m). Pri kretanju kuglice javlja se sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine sa koeficijentom proporcionalnosti b=4 Ns/m. Normalno rastojanje tetive do centra diska je L=0,3m. Ako je kuglici M u početnom trenutku, dok se nalazila u krajnjem desnom položaju M_o, prikazanog na slici, saopštena početna brzina intenziteta V_o=0,4 m/s u smeru ose Oy, odrediti: 1) zakon kretanja kuglice M, 2) vreme posle koga će kuglica M prvi put proći kroz položaj ravnoteže.



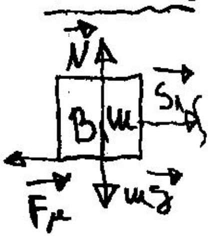
3. Mehanički sistem prikazan na slici, koji se nalazi u vertikalnoj ravni, sastoji se od: tela A (mase m) koje se kreće po horizontalnoj glatkoj podlozi, dva diska B i C (jednakih masa m i poluprečnika R), kao i tereta D (mase m) koji se nalazi na kraju lakog neistegljivog užeta. Na telo A dejstvuje horizontalna sila konstantnog intenziteta $F = 2mg$, dok na disk B dejstvuje spreg sila mometa $M = mgR$, smerova prikazanih na slici. U tačkama B i C veze su zglobne. Odrediti: 1) za date generalisane koordinate $q_1 = x$ i $q_2 = y$ diferencijalne jednačine kretanja, 2) ubrzanje tela A i tereta D, 3) sile u užetu u presecima 1-1 i 2-2.



1)



ТЕЛО B:

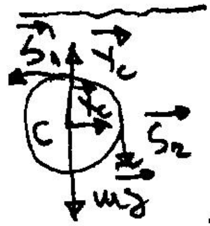


$$\dot{\vec K}_B = m\vec g + \vec N + \vec F_\mu + \vec S_1$$

x: $m\ddot x = S_1 - F_\mu = S_1 - mg\mu$ (1)

y: $0 = N - mg \Rightarrow N = mg$

ДИСК C:

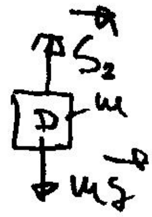


$$\dot{\vec L}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec M_C(\vec F_i)$$

$$\frac{1}{2} mR^2 \ddot\varphi = S_2 R - S_1 R \quad (2)$$

$R\ddot\varphi = \ddot x$

ТЕЛО D:



$$\dot{\vec K}_D = m\vec g + \vec S_2$$

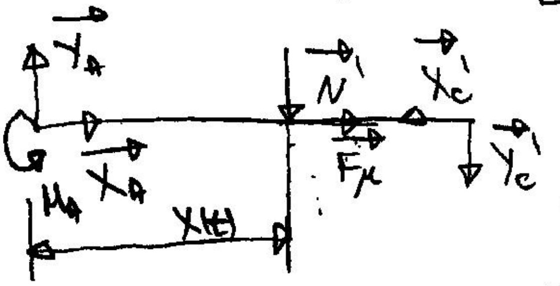
$$m\ddot x = mg - S_2' \quad (3)$$

$$\boxed{\ddot x = \frac{2}{5} g(1-\mu),\ S_1 = \frac{mg}{5}(2+3\mu),\ S_2 = \frac{mg}{5}(3+2\mu)}$$

$$m\vec a_C = m\vec g + \vec S_1' + \vec S_2 + \vec R_C$$

x: $0 = X_C - S_1' \Rightarrow \boxed{X_C = S_1' = \frac{mg}{5}(2+3\mu)}$

y: $0 = Y_C - mg - S_2 \Rightarrow \boxed{Y_C = mg + S_2 = \frac{2mg}{5}(4+\mu)}$



$0 = X_A + F_\mu - X_C'$

$\boxed{X_A} = X_C' - F_\mu = \boxed{\frac{2mg}{5}(1-\mu)}$

$0 = Y_A - N' - Y_C' \Rightarrow Y_A = N' + Y_C'$

$$\boxed{Y_A = \frac{mg}{5}(13+2\mu)}$$

$0 = M_A - N' x(t) - Y_C' l$

$M_A = N' x(t) + Y_C' l = mg\,x(t) + \frac{2mgl}{5}(4+\mu)$

I

$\mu = \frac{1}{2}$

$\ddot x = \frac{g}{5}$, $x_0 = \frac{l}{2}$, $\dot x_0 = 0$

$x(t) = \frac{l}{2} + \frac{g}{10} t^2$

$S_1 = \frac{7}{10} mg$, $S_2 = \frac{4}{5} mg$, $X_A = \frac{mg}{5}$

$Y_A = \frac{14}{5} mg$, $M_A = mg\left(\frac{23}{10} l + \frac{g}{10} t^2\right)$

II

$\mu = \frac{1}{4}$

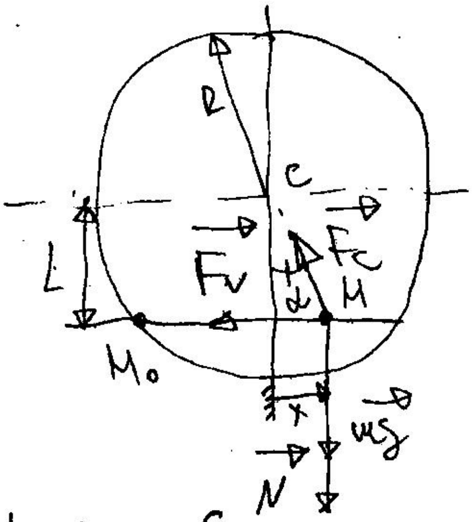
$\ddot x = \frac{3}{10} g$, $x_0 = \frac{l}{2}$, $\dot x_0 = 0$

$x(t) = \frac{3}{20} t^2 + \frac{l}{2}$

$S_1 = \frac{11}{20} mg$, $S_2 = \frac{7}{10} mg$, $X_A = \frac{3}{10} mg$

$Y_A = \frac{27}{10} mg$, $M_A = \frac{22}{10} mgl + \frac{3}{20} mgt^2$

2)

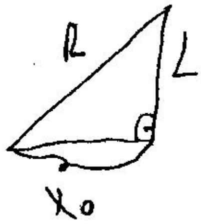


$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_c} + \vec{F_v}$

$x: \; m\ddot{x} = -b\dot{x} - c\overline{MC}\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{x}{MC}$

$m\ddot{x} = -b\dot{x} - cx \quad | : m$



$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0}$

$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -4 \pm 3i$

$x = e^{-4t}(C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t))$

$\dot{x} = -4e^{-4t}(C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)) +$
$+ 3e^{-4t}(-C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t))$

$t_0 = 0, \; x_0 = -0{,}4\,m, \; \dot{x}_0 = 0{,}4\,m/s$

$\boxed{-0{,}4 = C_1}$

$0{,}4 = -4C_1 + 3C_2 \Rightarrow \boxed{C_2} = \frac{1}{3}(0{,}4 + 4C_1) = \boxed{-0{,}4}$

$x(t) = -0{,}4\,e^{-4t}(\cos(3t) + \sin(3t)) \quad (1)$

$x(t_1) = 0 \Rightarrow tg(3t_1) = -1 \Rightarrow 3t_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{4}}$

(2)

II $\quad x \to y$

3) $\boxed{T} = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \left[\frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} J_{Bz}\omega_B^2\right]_B + \frac{1}{2} J_{Cz}\omega_C^2 + \frac{1}{2} m_D V_D^2 =$

$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2\left(\frac{\dot{y}-\dot{x}}{R}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 =$

$= \boxed{\frac{5}{4} m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 - \frac{1}{2} m\dot{x}\dot{y}}$

$\partial T/\partial\dot{x} = \frac{5}{2} m\dot{x} - \frac{1}{2} m\dot{y}$; $\partial T/\partial\dot{y} = 2m\dot{y} - \frac{1}{2} m\dot{x}$; $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{5}{2} m\ddot{x} - \frac{1}{2} m\ddot{y}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right) = 2m\ddot{y} - \frac{1}{2} m\ddot{x}$

$\delta A = -F\delta x - M\delta\left(\frac{y-x}{R}\right) + mg\delta y = \left(\frac{M}{R} - F\right)\delta x + \left(mg - \frac{M}{R}\right)\delta y$

$Q_x = \frac{M}{R} - F = mg - F$; $Q_y = mg - \frac{M}{R} = 0$

I

$F = 2mg$

$Q_x = -mg$, $Q_y = 0$

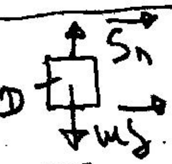
$\frac{5}{2} m\ddot{x} - \frac{1}{2} m\ddot{y} = -mg$ (1)

$2m\ddot{y} - \frac{1}{2} m\ddot{x} = 0$ (2)

из (1) и (2) $\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{8}{19} g$

$\ddot{y} = -\frac{2}{19} g$

Тело D:



$\dot{\vec{K}}_D = m\vec{g} + \vec{S}_1$

$m\ddot{y} = mg - S_1$

$\boxed{S_1 = \frac{21}{19} mg}$

Тело C: $\dot{L}_{Cz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Cz}(\vec{F}_i)$

$\frac{1}{2} mR^2 \frac{\ddot{y}}{R} = S_1' R - S_2 R$

$S_2 = \frac{22}{19} mg$

II

$F = 3mg$

$Q_x = -2mg$, $Q_y = 0$

$\frac{5}{2} m\ddot{x} - \frac{1}{2} m\ddot{y} = -2mg$ (1)

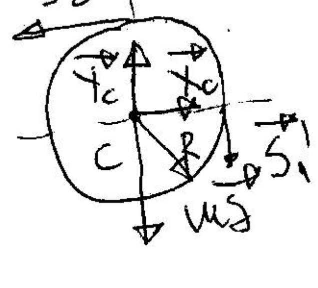
$2m\ddot{y} - \frac{1}{2} m\ddot{x} = 0$ (2)

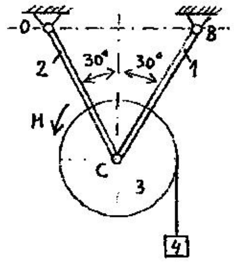
из (1) и (2) $\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{16}{19} g$

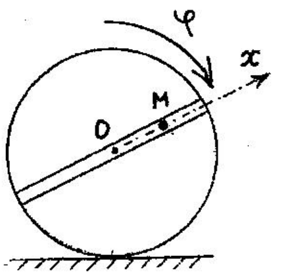
$\ddot{y} = -\frac{4}{19} g$

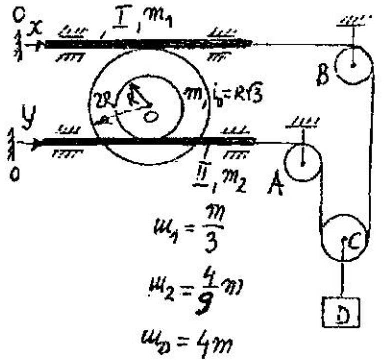
$S_1 = mg - m\ddot{y} = \frac{23}{19} mg$

$S_2 = S_1' - \frac{1}{2} m\ddot{y} = \frac{25}{19} mg$







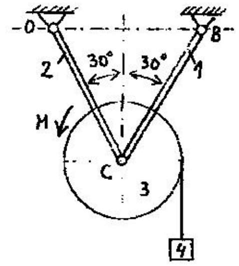


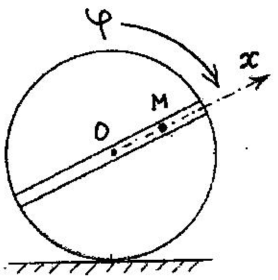
Mehanika 3 grupa ❶

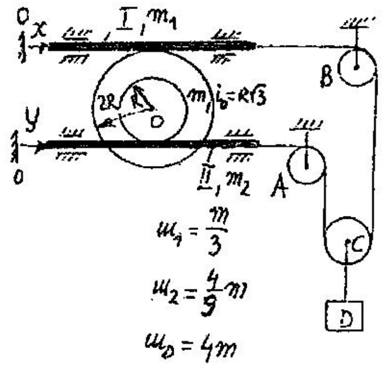
① Sistem čine laki štapovi 1 i 2, disk 3 (poluprečnika R, mase 3m) i teg 4 mase m. Pravac OB i osa Cz oko koje rotira disk su horizontalni. Na disk je namotano lako uže, kojim se, usred dejstva momenta (sprega sila) M=2mgR, podiže teg 4. Odrediti: 1) Moment količine kretanja sistema L_{Cz}=? 2) Moment sila M_{Cz}=? 3) ugaono ubrzanje diska 4) silu u štapu 1.

② Disk, poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja u vertikalnoj ravni po horizontalnoj podlozi konstantnom ugaonom brzinom $\omega = \frac{V_0}{R}$. U disku je duž dijametra izdubljen kanal po kome može da se kreće materijalna tačka M, mase m. Unutar kanala na tačku M dejstvuje privlačna sila $F = 10m\omega^2\overline{OM}$ (centar privlačenja je u O). U početnom trenutku t_o=0, kada je kanal bio u pravcu vertikale tački M (koja se nalazila u središtu diska O) saopštena je početna brzina V_o (u odnosu na disk). Odrediti konačnu jednačinu kretanja tačke M (u odnosu na 0x osu vezanu za kanal). Veze su idealne, φ(0)=0.

③ Sistem može da se kreće u vertikalnoj ravni. Sistem čine koaksijalni disk poluprečnika R, 2R, mase m i poluprečnika inercije $i_o=R\sqrt{3}$, horizontalni štapovi I i II, masa m_1 i m_2. Između štapova i diska nema proklizavanja. Štapove I i II povezuje (posredstvom lakih koturova A, B i C) neistegljivo lako uže. Za centar kotura C vezan je teret D mase m_D=4m. Odrediti u odnosu na date generalisane koordinate: a) diferencijalne jednačine kretanja, b) ugaono ubrzanje DISKA ako je $m_1=\frac{m}{3}$ i $m_2=\frac{4m}{9}$.







Mehanika 3 grupa ②

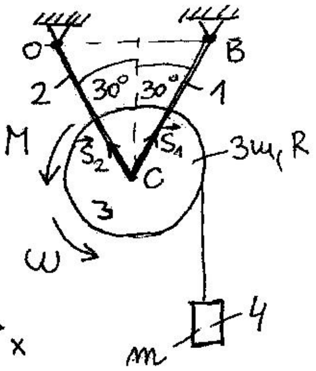
① Sistem čine laki štapovi 1 i 2, disk 3 (poluprečnika R, mase 3m) i teg 4 mase m. Pravac OB i osa Cz oko koje rotira disk su horizontalni. Na disk je namotano lako uže, kojim se, usred dejstva momenta (sprega sila) M=2mgR, podiže teg 4. Odrediti: 1) Moment količine kretanja sistema L_{Cz}=? 2) Moment sila M_{Cz}=? 3) ugaono ubrzanje diska 4) silu u štapu 2.

② Disk, poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja u vertikalnoj ravni po horizontalnoj podlozi konstantnom ugaonom brzinom $\omega = \frac{V_0}{R}$. U disku je duž dijametra izdubljen kanal po kome može da se kreće materijalna tačka M, mase m. Unutar kanala na tačku M dejstvuje privlačna sila $F = 10m\omega^2\overline{OM}$ (centar privlačenja je u O). U početnom trenutku t_o=0, kada je kanal bio u pravcu vertikale tački M (koja se nalazila u središtu diska O) saopštena je početna brzina V_o (u odnosu na disk). Odrediti konačnu jednačinu kretanja tačke M (u odnosu na 0x osu vezanu za kanal). Veze su idealne, φ(0)=0.

③ Sistem može da se kreće u vertikalnoj ravni. Sistem čine koaksijalni disk poluprečnika R, 2R, mase m i poluprečnika inercije $i_o=R\sqrt{3}$, horizontalni štapovi I i II, masa m_1 i m_2. Između štapova i diska nema proklizavanja. Štapove I i II povezuje (posredstvom lakih koturova A, B i C) neistegljivo lako uže. Za centar kotura C vezan je teret D mase m_D=4m. Odrediti u odnosu na date generalisane koordinate: a) diferencijalne jednačine kretanja, b) ugaono ubrzanje DISKA ako je $m_1=\frac{m}{3}$ i $m_2=\frac{4m}{9}$.

ОБЕ ГРУПЕ СУ ИСТЕ!

1



а) $L_{Cz} = J_{Cz}\cdot\omega + RmV = \frac{3mR^2}{2}\omega + mR^2\omega$

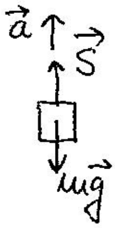
$$\boxed{L_{Cz} = \frac{5}{2}mR^2\omega}$$

б) $M_{Cz} = M - mgR = \boxed{mgR}$

в) $\frac{dL_{Cz}}{dt} = M_{Cz} \Rightarrow \frac{5}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = \cancel{m}g\cancel{R}$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{2}{5}\frac{g}{R}}$$

г)



$m\vec{a} = \vec{S} - m\vec{g}$

$mR\ddot{\varphi} = S - mg \Rightarrow S = mg + m\cancel{R}\frac{2}{5}\frac{g}{\cancel{R}}, \quad S = \frac{7}{5}mg$

$3m\ddot{x}_c = 0 = S_1\sin30° - S_2\sin30° \Rightarrow S_1 = S_2$

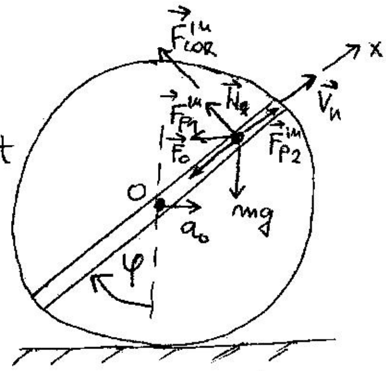
$3m\ddot{y}_c = 0 = S_1\cos30° + S_2\cos30° - 3mg - S'$

$\cancel{2}S_1\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 3mg + \frac{7}{5}mg \Rightarrow \boxed{S_1 = S_2 = \frac{22}{5\sqrt{3}}mg}$

2

$\omega = \dot{\varphi} = const$

$\omega = \frac{V_0}{R}$



$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{N} + \vec{F}^{in}_p + \vec{F}^{in}_{cor}$

$m\ddot{x} = -mg\cos\varphi - F_0 - F^{in}_{p1}\sin\varphi + F^{in}_{p2}$

$F_0 = 10m\omega^2 x, \quad F^{in}_{p1} = ma_0 = 0$

$F^{in}_{p2} = m\omega^2 x$

$m\ddot{x} = -mg\cos\varphi - 10m\omega^2 x + m\omega^2 x \quad /:m$

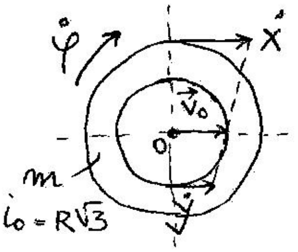
$\ddot{x} + 9\omega^2 x = -g\cos\omega t$

$x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = V_0$

$$\boxed{x(t) = \frac{R}{3}\sin\left(\frac{3V_0}{R}t\right) + \frac{gR^2}{8V_0^2}\left[\cos\left(\frac{3V_0}{R}t\right) - \cos\left(\frac{V_0}{R}t\right)\right]}$$

3

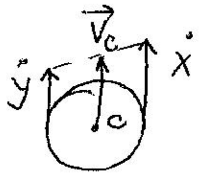


$\dot{x} = \dot{y} + 3R\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x} - \dot{y}}{3R}$

$V_0 = \dot{y} + R\dot{\varphi}$

$V_0 = \frac{\dot{x} + 2\dot{y}}{3}$



$V_c = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{2} = V_D$

$m_1 = \frac{m}{3}, \quad m_2 = \frac{4m}{9}$

$J_{Oz} = mi_0^2 = 3mR^2$

$$E_k = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}4mV_D^2$$

...

$$E_K = \frac{8}{9} m \dot{x}^2 + \frac{10}{9} m \dot{y}^2 + \frac{8}{9} m \dot{x}\dot{y}$$

$$\delta A(m\vec{g}) = 4m\vec{g}\,\delta\vec{r}_D = 4mg\,\frac{\delta x + \delta y}{2} = 2mg(\delta x + \delta y)$$

$$Q_x = 2mg \quad , \quad Q_y = 2mg$$

$$\boxed{\begin{aligned} 8\ddot{x} + 4\ddot{y} &= 9g \\ 10\ddot{y} + 4\ddot{x} &= 9g \end{aligned}}$$

$$\ddot{x} = \frac{27}{32} g, \quad \ddot{y} = \frac{9}{16} g$$

б) $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x} - \ddot{y}}{3R}$

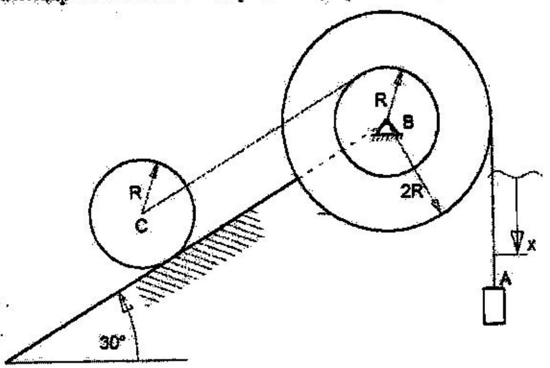
$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{3}{32}\frac{g}{R}}$$

ПРВА ГРУПА

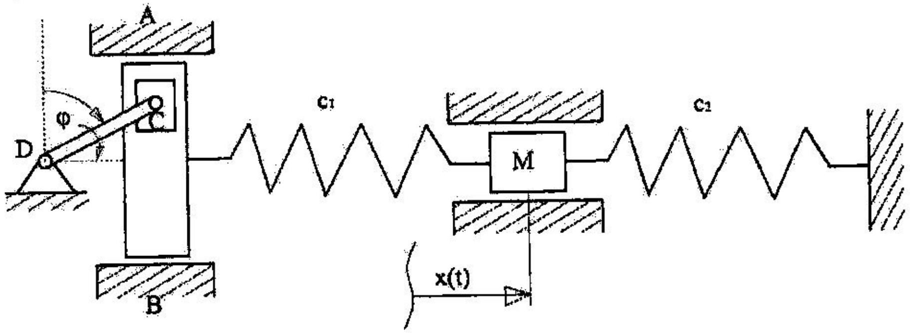
МЕХАНИКА 3

писмени део испита, 23.06.2016.

Задатак бр. 1: Систем који је у вертикалној равни чине коаксијални диск B, масе 2m и полупречника инерције $i_0 = R\sqrt{2}$, који је помоћу ужета повезан за терет A, масе m, и диск C масе 2m, полупречника R, који је помоћу ужета повезан за диск B. Диск C котрља се без клизања по стрмој равни нагиба 30°. У тачки B је цилиндрични зглоб. Одредити убрзање терета A и силе у ужадима.



Задатак бр. 2: Материјална тачка M, масе m, може да се креће дуж хоризонталних вођица. За клизач су везане две опруге истих крутости $c_1=c_2=c$. Опруга c_2 је својим другим крајем везана за непомични зид, док је опруга c_1 својим другим крајем везана за клизач AB који може да се креће дуж хоризонталних вођица. Унутар клизача AB креће се други клизач, који је у тачки C зглобно везан за кривају DC дужине R. Кривајa се обрће константним угаоном брзином $\Omega = \sqrt{2c/m}$. Ако су у почетном тренутку $t_0=0$, $\varphi_0 = 0$ и $x_0 = 0$ опруге биле ненапрегнуте, а тачка M мировала одредити коначну једначину кретања материјане тачке x=x(t)?

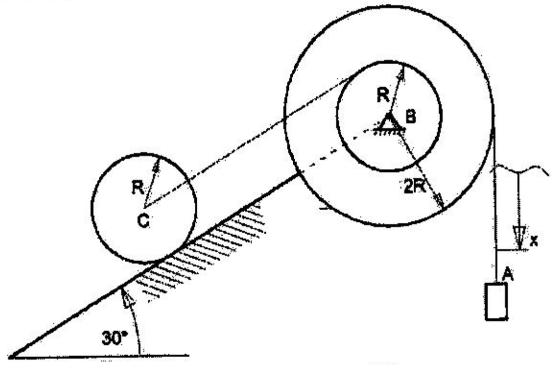


ДРУГА ГРУПА

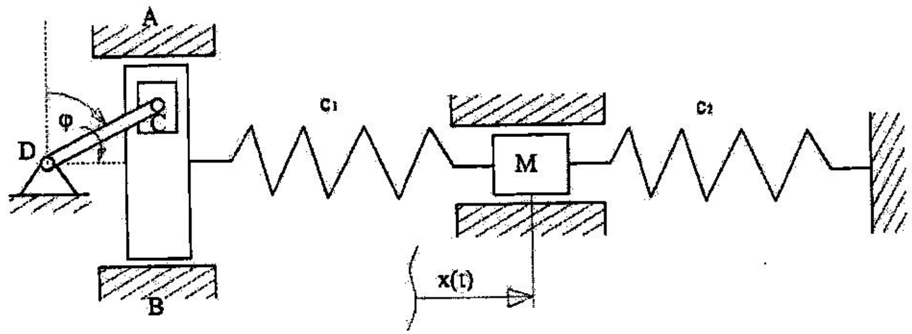
МЕХАНИКА 3

писмени део испита, 23.06.2016.

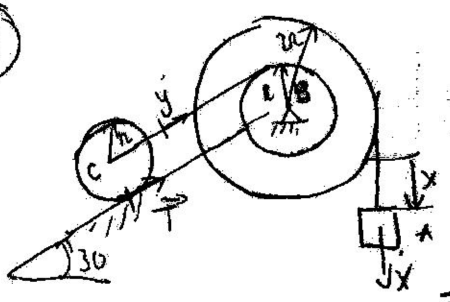
Задатак бр. 1 : Систем који је у вертикалној равни чине коаксијални диск B, масе m и полупречника инерције $i_0 = R\sqrt{2}$, који је помоћу ужета повезан за терет A, масе m, и диск C масе m, полупречника R, који је помоћу ужета повезан за диск B. Диск C котрља се без клизања по стрмој равни нагиба 30°. У тачки B је цилиндрични зглоб. Одредити убрзање терета A и силе у ужадима.



Задатак бр. 2: Материјална тачка M, масе m, може да се креће дуж хоризонталних вођица. За клизач су везане две опруге истих крутости $c_1=c_2=c$. Опруга c_2 је својим другим крајем везана за непомични зид, док је опруга c_1 својим другим крајем везана за клизач AB који може да се креће дуж хоризонталних вођица. Унутар клизача AB креће се други клизач, који је у тачки C зглобно везан за кривају DC дужине R. Кривајa се обрће константним угаоном брзином $\Omega = \sqrt{c/m}$. Ако су у почетном тренутку $t_0=0$, $\varphi_0 = 0$ и $x_0 = 0$ опруге биле ненапрегнуте, а тачка M мировала одредити коначну једначину кретања материјане тачке x=x(t)?



(1)



$$\dot x = 2R\dot\varphi \to \dot\varphi = \frac{\dot x}{2R}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot y &= R\dot\varphi = \frac{\dot x}{2}\\ \dot y &= R\dot\alpha\end{aligned}\right\}\ \dot\alpha = \frac{\dot x}{2R}$$

1) $\frac{d}{dt}\left(J_{Cz}\dot\alpha\right) = -TR$

$\nearrow$ I) $m\cancel{R^2}\ddot\alpha = -T\cancel{R} \to T = -\frac{1}{2}m\ddot x$

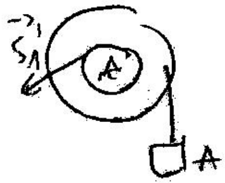
II) $\frac{1}{2}mR^2\ddot\alpha = -TR \to T = -\frac{1}{4}m\ddot x$

2) $\frac{d}{dt}\left(\vec K_C\right) = \vec F_R^S \to m_C\ddot y = S_1 + T - \frac{m_C g}{2}$

$\nearrow$ I) $S_1 = \frac{3}{2}m\ddot x + mg$

$\searrow$ II) $S_1 = \frac{3}{4}m\ddot x + \frac{mg}{2}$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{Bz}\dot\varphi + m_A 2R\dot x\right) = -S_1' R + m_A g\cdot 2R$$



I) $\ddot x = \frac{2}{11}g \to S_1 = \frac{14}{11}mg$

II) $\ddot x = \frac{2}{5}g \to S_1 = \frac{4}{5}mg$

$m\ddot x = mg - S_2$ $\nearrow$ I) $S_2 = \frac{9}{11}mg$

$\searrow$ II) $S_2 = \frac{3}{5}mg$

---

(2)

$$m\ddot x = -cx - c(x - R\sin\varphi)$$

$$\ddot x + \frac{2c}{m}x = \frac{cR}{m}\sin\Omega t$$

$t_0 = 0$

$x_0 = 0$

$\dot x_0 = 0$

$\omega^2 = \frac{2c}{m}$

I) $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$

резонанција

II) $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

I) $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{cR}{2\Omega m}t\cos\Omega t$

$x = \frac{R}{4}\sin\sqrt{\frac{2c}{m}}t - \frac{R}{2}\sqrt{\frac{c}{2m}}\,t\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}t$

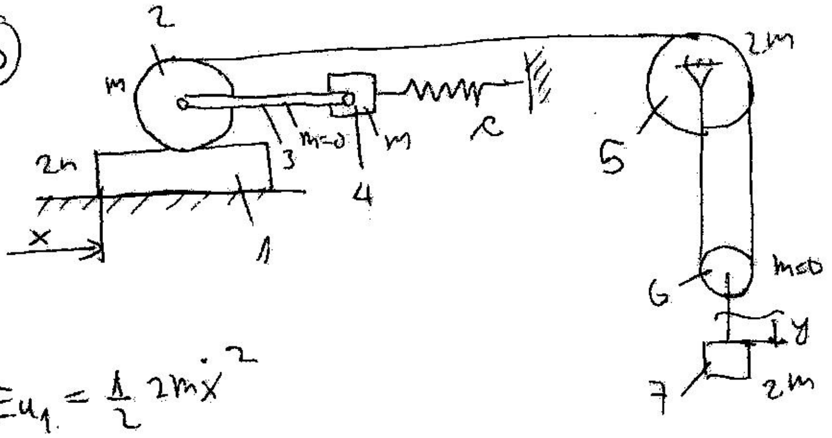
| $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{R}{4}$

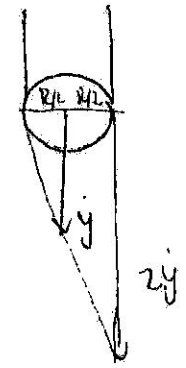
II) $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + R\sin\Omega t$

$x = -\frac{R\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{\frac{2c}{m}}t + R\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t$

| $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{R\sqrt{2}}{2}$

3



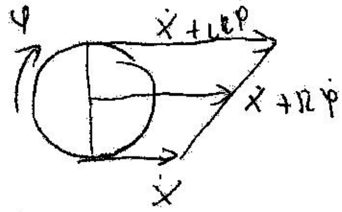


a)

$$E_{k1} = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m(\dot{x}+R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\frac{\dot{x}}{2}+\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{4} mR^2\left(\frac{\dot{y}}{R}-\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2$$



$$\dot{x} + 2R\dot{\varphi} = 2\dot{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{R} - \frac{\dot{x}}{2R}$$

$$E_{k3} = 0$$

$$E_{k4} = \frac{1}{2} m\left(\frac{\dot{x}}{2}+\dot{y}\right)^2$$

$$E_{k5} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} 2mR^2\left(\frac{2\dot{y}}{R}\right)^2$$

$$E_{k6} = 0$$

$$E_{k7} = \frac{1}{2} 2m\dot{y}^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{21}{16} m\dot{x}^2 + \frac{3}{4} m\dot{x}\dot{y} + \frac{17}{4} m\dot{y}^2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} c\left(\frac{x}{2}+y\right)^2 - 2mgy = \frac{1}{8} cx^2 + \frac{1}{2} cxy + \frac{1}{2} cy^2 - 2mgy$$

1) $\frac{21}{8} m\ddot{x} + \frac{3}{4} m\ddot{y} = -\frac{1}{4} cx - \frac{1}{2} cy$

2) $\frac{17}{2} m\ddot{y} + \frac{3}{4} m\ddot{x} = 2mg - \frac{1}{2} cx - cy$

I) $c = 6m$

II) $c = 12m$

б) $\ddot{y} = 0 \longrightarrow \ddot{x} = -\frac{4}{9} g$

I) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ II) $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$

I) $x = -\frac{2}{9} g t^2$

II) $x = -\frac{2}{9} g t^2 + 1$