$5x = 7$

$x = \frac{7}{3}$

решење је

број

MATEMATIKA 2

Lekcija 8- Diferencijalne jednačine

Osnovni pojmovi. Jednačina u kojoj se pojavljuje nepoznata funkcija, zajedno sa svojim izvodima, kao i nezavisno promenljive, naziva se diferencijalna jednačina. Ako je reč o nepoznatoj funkciji jedne nezavisno promenljive, govorimo o običnoj diferencijalnoj jednačini.

Red obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji učestvuje u njoj. Opšti oblik diferencijalne jednačine n-tog reda je

$$\Phi\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

gde je Φ neka realna funkcija od $n+2$ nezavisno promenljive. Diferencijalne jednačine

$$y' = 5x \quad \text{i} \quad y' + 7y = 0$$

su prvog reda, a diferencijalne jednačine

$$x^2y'' + 20xy' + 4y = 6x^{10}\ln x \quad \text{i} \quad y^{10}y'' = (y')^2$$

su drugog reda.

Ako nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promenljivih, tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju parcijalni izvodi, i imamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

Postupak određivanja nepoznate funkcije iz date diferencijalne jednačine naziva se rešavanje te jednačine ili integraljenje te jednačine. Ustvari, rešenje diferencijalne jednačine je funkcija koja, zamenjena u tu jednačinu, pretvara ovu u identitet.

Diferencijalna jednačina, u opštem slučaju, ima više od jednog rešenja. Ako postoji relacija koja sadrži sva rešenja date diferencijalne jednačine, njom je definisano opšte rešenje posmatrane jednačine.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) je funkcija

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right), \tag{2}$$

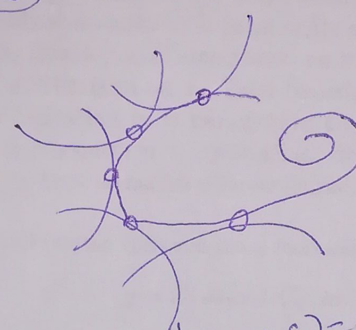
koja za fiksirane vrednosti $C_1, C_2, ..., C_n$ zadovoljava jednačinu (1) kao funkcija od x. Pritom se $C_1, C_2, ..., C_n$ nazivaju proizvoljnim konstantama. Opšte rešenje (2) može da se zada i implicitno, jednačinom oblika $f\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$.

Решења ДЈ

$\boxed{\text{ОПШТЕ РЕШЕЊЕ}}$

СИНГУЛАРНА РЕШЕЊА

$\boxed{\text{ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ}}$



ОБВОЈНИЦА – ГЕОМЕТР. КРИВА (СИНГ. РЕШЕЊЕ) – АКО ПОСТОЈИ

$\Phi(x, y, c) = 0$

опште решење ДЈ

1A

Ako je jednačinom

$$f\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0 \tag{3}$$

zadata jedna familija (skup) krivih u xy-ravni, mogućno je formirati običnu diferencijalnu jednačinu reda n, koja za opšte rešenje ima tu familiju. Postupak je sledeći. Uzastopno diferenciramo po x jednačinu (3) $n-$puta, smatrajući pritom y funkcijom od x. Tako (zajedno sa jednačinom (3)) dobijamo $n+1$-nu jednačinu sa n parametara $C_1, C_2, ..., C_n$.Eliminacijom tih parametara iz spomenutih $n+1$ jednačina, dobijamo jednu diferencijalnu jednačinu reda n, koja se naziva diferencijalnom jednačinom familije krivih (3).

Primer. Formirajmo diferencijalnu jednačinu familije krivih:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \tag{*}$$

Diferenciranjem dva puta date jednačine dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \cos x - C_2 \sin x \\ y'' &= -C_1 \sin x - C_2 \cos x. \end{aligned}$$

Iz jednačine (*) i dveju dobijenih diferenciranjem, eliminišimo konstante C_1 i C_2. Rezultat te eliminacije je tražena diferencijalna jednačina. U ovom slučaju eliminaciju možemo izvršiti tako što ćemo sabrati jednačinu (*) sa poslednjom jednačinom. Tako dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu

$$y'' + y = 0.$$

Diferencijalne jednačine prvog reda

U ovoj lekciji rešavaćemo nekoliko tipova običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, tj. jednačina oblika $\Phi\left(x, y, y'\right) = 0$.

Razdvojene promenljive. Diferencijalna jednačina

$$y' = P(x)\, Q(y) \tag{4}$$

naziva se diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivima. Jednačina (4) može se napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, Q(y),$$

odakle izlazi

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\, dx.$$

ИЗА примера на 2. стр. ево још једног

$\boxed{\text{Пример 7}}$ формирати дј фамилије кривих

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=c_3^2 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

произв. конст.

Решење. Диференцирајмо последњу једнакост 3 пута, па из 4 формиране једн. елиминишимо 3 конст. c_1, c_2, c_3. Добићемо тражену дј

Дакле: (0) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=c_3^2$ [фамилија кружн. у равни]

диференцирамо $(y=y(x))$

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)\cdot y'=0 \ /:2$$

(1) $x-c_1+(y-c_2)\cdot y'=0$

диференцирамо

(2) $1+y'^2+(y-c_2)\cdot y''=0$

диференцирамо (нађемо извод)

(3) $2y'y''+y'y''+(y-c_2)y'''=0$

$\hookrightarrow 3y'y''+(y-c_2)y'''=0$

Из 4 једначине (0), (1), (2), (3) елиминишемо произвољне константе c_1, c_2, c_3. Овде је то лако, нпр. из (4) је $y-c_2=-\dfrac{3y'y''}{y'''}$ $(y'''\neq 0)$ ||

уврстимо из последње једн. $y-c_2$ у (2), добијамо

$$1+y'^2-\frac{3y'y''}{y'''}\cdot y''=0, \text{ тј.}$$

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$$

што је тражена дј трећег реда.

2А

Prema tome, sva rešenja jednačine (4) sadržana su u formuli

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)\,dx + C \tag{5}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Homogene diferencijalne jednačine prvog reda. Diferencijalna jednačina

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

naziva se homogena diferencijalna jednačina prvog reda. Ako je $f(u) = u$, onda jednačina glasi $y' = \frac{y}{x}$ i u njoj su promenljive razdvojene. Pretpostavimo stoga da je $f(u) \neq u$. Uvedimo smenu

$$y = ux, \tag{7}$$

gde je u nova nepoznata funkcija. Iz (7) izlazi

$$y' = u + xu',$$

te jednačina (6) postaje

$$u + xu' = f(u),$$

$$\text{tj. } x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

$$\text{ili } \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

a to je jednačina u kojoj su promenljive razdvojene. Posle integraljenja nalazimo opšte rešenje homogene jednačine (6):

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C, \tag{8}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Linearne diferencijalne jednačine prvog reda. Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{9}$$

gde su $p(x)$ i $q(x)$ date funkcije, naziva se linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Pretpostavimo da je rešenje jednačine (9) oblika

$$y = uv, \tag{10}$$

Диференцијалне једначине које се своде на хомогену

(*) $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$; $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$

1. случај

$a_1x+b_1y = K(ax+by)$, тј. постоји зависност ових израза, $K \neq 0$ нека константа.

Ово значи
$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1x+b_1y}{ax+by} \; (=K), \text{ тј. } D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

— уведе се смена $\boxed{ax+by=z}$, где је z нека нова функција $z = z(x)$. Имамо $z' = a + by'$. Уврстимо у (*) добијамо

$$-\frac{1}{b}(z'-a) = f\left(\frac{z+c}{Kz+c_1}\right)$$

$$z' = -b\, f\left(\frac{z+c}{Kz+c}\right) + a \quad \text{— једн. код које су променљиве раздвојене}$$

$$\int \frac{dz}{a - b\, f\left(\frac{z+c}{Kz+c}\right)} = \int dx$$

⋮

решавамо, враћамо $z = ax+by$ и добијамо о.р. једн. (*)

4A

45

2. случај

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, тј. нема линеарне зависности $ax+by$ и a_1x+b_1y.

тада уводимо смене

$$(\Delta)\ \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

X – нова независно променљива
Y – нова непозната функција
α, β – за сада произвољне константе

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(Y+\beta)}{d(X+\alpha)} = \frac{dY}{dX} = Y'$$

ДЈ (*) се своди на једн.

$$Y' = f\left(\frac{a(X+\alpha)+b(Y+\beta)+c}{a_1(X+\alpha)+b_1(Y+\beta)+c_1}\right)$$

$$(**)\quad Y' = f\left(\frac{aX+bY+\overbrace{a\alpha+b\beta+c}^{=0}}{a_1X+b_1Y+\underbrace{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}_{=0}}\right)$$

Сада захтевамо да α, β задовоље услове, $\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0 \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \end{cases}$ тј. систем

Пошто је $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ детерминанта система, систем има јединствено решење

За тако добијене α, β ДЈ (**) се своди на

$$Y' = f\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right), \text{ тј. } Y' = f\left(\frac{a+b\frac{Y}{X}}{a_1+b_1\frac{Y}{X}}\right)$$

а ово је хомогена ДЈ коју знамо како да решимо. Нека је њено опште решење $\phi(X,Y,C)=0$, па ће (због Δ) О.Р. ДЈ (*) бити $\phi(x-\alpha, y-\beta, C)=0$.

gde su u i v zasad neodređene funkcije. Iz (10) izlazi $y' = u'v + uv'$ te jednačina (9) postaje

$$u'v + uv' + p(x)\,uv = q(x)\,,$$

$$\text{tj., } \left[u' + p(x)\,u\right]v + uv' = q(x)\,. \tag{11}$$

Izaberimo funkciju u tako da bude

$$u' + p(x)\,u = 0. \tag{12}$$

Jednačina (12) je jednačina sa razdvojenim promenljivima:

$$\frac{du}{u} + p(x)\,dx = 0.$$

Posle integraljenja te jednačine dobijamo

$$u = Ae^{-\int p(x)dx},$$

gde je A proizvoljna konstanta. Uzevši $A = 1$, imamo

$$u = e^{-\int p(x)dx}. \tag{13}$$

Ako je u funkcija (13), jednačina (11) ima oblik

$$e^{-\int p(x)dx}v' = q(x)\,,$$

odakle, posle integraljenja, izlazi

$$v = C + \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx, \tag{14}$$

gde je C proizvoljna konstanta. Iz (10), (13) i (14) nalazimo opšte rešenje jednačine (9):

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{15}$$

Bernulijeve diferencijalne jednačine. Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^k \quad (k \in \mathbb{R}) \tag{16}$$

naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ako je $k = 0$, jednačina (16) je linearna, a ako je $k = 1$, ona razdvaja promenljive. Stoga ćemo pretpostaviti da je $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Uvedimo smenu $y = u^m$, gde je u

nova nepoznata funkcija, a m je konstanta koju treba odrediti. Imamo $y' = mu^{m-1}u'$, te jednačina (16) postaje

$$mu^{m-1}u' + p(x)\,u^m = q(x)\,u^{mk},$$

$$\text{tj., } u' + \frac{1}{m}p(x)\,u = \frac{1}{m}q(x)\,u^{mk-m+1}. \tag{17}$$

Izaberimo m tako da bude

$$mk - m + 1 = 0,$$

tj. stavimo $m = \frac{1}{1-k}$. Na taj način dobijamo rezultat: Bernulijeva diferencijalna jednačina (16) svodi se pomoću smene

$$y = u^{\frac{1}{1-k}}$$

na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' + (1-k)\,p(x)\,u = (1-k)\,q(x).$$

Kako je ova jednačina linearna, ona se može rešiti primenom formule (15). Na taj način se dobija

$$y^{1-k} = (1-k)\,e^{-(1-k)\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\,e^{(1-k)\int p(x)dx}dx\right).$$

Ovo je formula za rešavanje Bernulijeve jednačine (16).

Бернулијева: $y' + p(x)y = y^{\alpha} q(x)$ $(\alpha \neq 0, 1)$ $/ : y^{\alpha}$

$\alpha = 0$ – линеарна

$\alpha = 1$ – раздвојене променљиве

(Б) $\frac{1}{y^{\alpha}} y' + y^{1-\alpha} p(x) = q(x)$

уводимо $\boxed{\text{смену}}$

$z = y^{1-\alpha}$, $z = z(x)$ нова непозната функција

$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

Ако се (Б) помножи са $(1-\alpha)$ и искористи смена, добијамо ДЈ

$z' + p(x) z = q(x)$ која је линеарна

Препорука: Решавати Бернулијеву ДЈ (као и линеарну) сменом $y = uv$.

Решить ДУ:

4127 $x + xy + y'(y + xy) = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $y + x = \ln C(1+y)(1+x)$

4129 $y\sqrt{1-x^2}\,dy + x\sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = C$

4157 $1 + e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)y' = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $x + y e^{\frac{x}{y}} = C$

4155 $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$

4164 $\cancel{(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)}$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$

$(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$

4162 $-x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$ доп. решение

4169 $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $y = \frac{C - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}{1+x}$

4171 $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$

4200 $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$

4194 $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ $\Big/ \boxed{\text{о.р.}}$ $y = \frac{1}{(1+x)\left[C + \ln|1+x|\right]}$

Решение 4127

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y)}{y(1+x)}$$

$$\frac{y\,dy}{1+y} + \frac{x\,dx}{1+x} = 0$$

$$y + x = \ln|(1+x)(1+y)| \cdot C$$

6

Решење (4155)

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Ово је хомогена ДЈ

Дакле, смена $\frac{y}{x} = u$, $u = u(x)$

$y = xu$

$y' = u + xu'$, убацимо у ДЈ

$$\cancel{u} + xu' = e^{u} + \cancel{u}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = e^{u}$$

$$\int \frac{du}{e^{u}} = \int \frac{dx}{x}$$

једна могућност да константу запишемо овако

$$-e^{-u} = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|xC| = -e^{-\frac{y}{x}} \quad \text{о.р.}$$

6A

Решење (4157)

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+e^{\frac{x}{y}}}{\left(\frac{x}{y}-1\right)e^{\frac{x}{y}}}$$

$$y' = \frac{1+e^{\frac{1}{\frac{y}{x}}}}{\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}-1\right)e^{\frac{1}{\frac{y}{x}}}}$$ хомогена

Пробајте да је решите. Немогуће, или мало би јако тешко. Ја не бих губио силно време.

У (*) се намеће однос $\frac{x}{y}$. Хајде, пошто је тако, нека x представља функцију, а y независно променљиву, тј. $x = x(y)$. Напишимо (*) у облику

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)e^{\frac{x}{y}}}{1+e^{\frac{x}{y}}}$$

ово је хомогена ДЈ

уведимо смену $\frac{x}{y} = u$, $u = u(y)$

$$x = yu$$

$$\frac{dx}{dy} = u + yu'$$

убацимо

$$u + yu' = \frac{(u-1)e^u}{1+e^u}$$

$$y \cdot \frac{du}{dy} = \frac{(u-1)e^u}{1+e^u} - u; \quad y\frac{du}{dy} = \frac{\cancel{ue^u} - e^u - u - \cancel{ue^u}}{1+e^u}$$

$$\int \frac{1+e^u}{u+e^u}\,du = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln\left(u+e^u\right) = -\ln y + \ln C; \text{ тј. } y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = C$$

О.Р. $x + y e^{\frac{x}{y}} = C$

65

Решение 4161

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x+2y = \underset{k}{2}(2x+y)$$

Смена! $2x+y = z, \quad z = z(x)$

$$2+y' = z'$$

$$y' = z'-2$$

$$z'-2 = \frac{z+1}{2z-3}$$

$$z' = \frac{z+1}{2z-3} + 2$$

$$z' = \frac{z+1+4z-6}{2z-3}$$

$$\left(\frac{dz}{dx} =\right) z' = \frac{5z-5}{2z-3}$$

$$\frac{2z-3}{z-1}\,dz = 5\,dx$$

$$\frac{2z-2-1}{z-1}\,dz = 5\,dx$$

$$2\int dz - \int \frac{dz}{z-1} = 5\,dx$$

$$2z - \ln|z-1| = 5x + C$$

$\boxed{\text{о.р.}}$ $2(2x+y) - \ln|2x+y-1| = 5x + C$

$\boxed{6B}$

Решение (4162)

$$y' = \frac{x+y+1}{-x+y+2}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

смяна $\begin{cases} x = X + \alpha, \\ y = Y + \beta; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$Y' = \frac{X + Y + \overbrace{\alpha + \beta + 1}^{=0}}{-X + Y \underbrace{- \alpha + \beta + 2}_{=0}}$$

$$+\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ -\alpha + \beta + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2\beta + 3 = 0$$

$$\beta = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha = \beta + 2 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

смяна $\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{3}{2} \end{cases}$

$$Y' = \frac{X+Y}{-X+Y}$$

$$Y' = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{-1 + \frac{Y}{X}}$$

хомогенна

смяна: $\frac{Y}{X} = Z$

$Y = XZ$

$Y' = Z + XZ'$

$$\cancel{Z} + XZ' = \frac{1+Z}{-1+Z}$$

$$XZ' = \frac{1+Z}{-1+Z} - Z$$

$$X\frac{dZ}{dX} = \frac{1+Z+Z-Z^2}{Z-1}$$

$$-\int \frac{Z-1}{Z^2-2Z-1}\,dZ = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{2}\ln|Z^2-2Z-1| = -\ln|X| + \ln|C|$$

$$\sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - 2\frac{Y}{X} - 1} = \cancel{\ln}\left|\frac{C}{X}\right|$$

$$C_1 \ (C_1 = |C|)$$

О.Р. $Y^2 - 2YX - \cancel{X} = C_1$

$\boxed{\text{О.Р.}}$ $(y+\frac{3}{2})^2 - 2(y+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2}) + \cancel{X} = C_1$

сами завършете!

6Г

Решење (4169)

$$y' + \frac{1}{1+x} y = -x^2$$ (линеарна дј)

$$y = uv$$
$$y' = u'v + uv'$$
$$u'v + \underbrace{uv' + \frac{1}{1+x} uv}_{} = -x^2$$
$$u'v + u\Big(\underbrace{v' + \frac{1}{1+x} v}_{=0}\Big) = -x^2$$

$$v' + \frac{1}{1+x} v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{1+x} v$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x+1}$$
$$\ln v = -\ln(x+1) + \underbrace{C_1}_{=0}$$
$$\boxed{v = \frac{1}{x+1}}$$

$$u' \cdot \frac{1}{x+1} = -x^2$$
$$\frac{du}{dx} = -x^2(x+1)$$
$$\int du = -\int (x^3 + x^2)\,dx$$
$$\boxed{u = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C}$$

$$y = uv$$
$$y = \frac{C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{x+1}$$ $\boxed{\text{о.р.}}$

6Д

Решење 4200

$$y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$$ бернулијева $(\alpha = \frac{1}{2} \neq 0, 1)$

$$y = uv$$
$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{4}{x} uv = x\sqrt{uv}$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{4}{x}v\right)}_{=0} = x\sqrt{uv}$$

$$v' - \frac{4}{x} v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4}{x} v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{4}{x}\, dx$$

$$\ln v = 4\ln x + \cancel{C_1} = 0$$

$$\boxed{v = x^4}$$

$$u' \cdot x^4 = x\sqrt{u \cdot x^4}$$

$$u' \cdot \cancel{x^4} = \cancel{x^3}\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{u}$$

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\cancel{\sqrt{u} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln}$$

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2}(\ln|x| + \ln|C|)$$
$$\ln|Cx|$$

$$u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|$$

О.Р. $$y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$$

или овако

$$\sqrt{u} = \ln\sqrt{x} + \tilde{C}$$
$$u = (\ln\sqrt{x} + \tilde{C})^2$$
$$y = x^4(\ln\sqrt{x} + \tilde{C})^2$$
О.Р.

$$\cancel{\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|}$$

$$\cancel{\sqrt{u} = \frac{1}{2}\ln|Cx|;\ u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|}$$

$$y = uv$$

$$\cancel{y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|} \quad \text{~~О.Р.~~}$$

65