Prikazivanje kinetičke energije preko generalisanih brzina i koordinata

Sistem od n materijalnih tačaka, odredjen sa 3n Dekartovih koordinata x_i, y_i, z_i, na koji dejstvuju idealne, holonomne veze, čije su jednačine

$$f_\alpha (x_1, y_1, z_1; \ldots\ldots x_n, y_n, z_n; t) = 0 \qquad (1.3)$$

$$(\alpha = 1,2,\ldots, k)$$

ima s= 3n-k nezavisnih koordinata.

Ako je položaj materijalnog sistema odredjen sa s generalisanih koordinata q_j (j = 1,2, . . . ,s), tada vektori položaja $\vec{r}_i$ (i = 1,2, ... ,n)tačaka sistema u opštem slučaju zavise od generalisanih koordinata i vremena

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i (q_1, \ldots, q_{s-1}; q_s; t) \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (1.4)$$

Ovim vektorskim jednačinama odgovara 3n skalarnih jednačina

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, \ldots\ldots, q_s; t) , \\ y_i &= y_i(q_1, \ldots\ldots, q_s; t) ; \qquad (1.5) \\ z_i &= z_i(q_1, \ldots\ldots, q_s; t), \quad (i=1,2,\ldots,n) , \end{aligned}$$

koje, kada se zamene u jednačine veza (1.3) dovode do identičnosti.

Kinetička energija materijalnog sistema je definisana jednakošću

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 \qquad (1.6)$$

Imajući u vidu da je vektor brzine k-te tačke sistema

$$\vec{v}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

i ako iskoristimo identičnost $v_k^2 = \vec{v}_k . \vec{v}_k$, tada izraz (1.6) za kinetičku energiju sistema dobija oblik

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 .$$

Posle naznačenog skalarnog množenja ona se može napisati u obliku

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} \tag{1.7}$$

gde je :

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \right)^2 \dot{q}_s^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots + 2 \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_{s-1}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right] ; \tag{1.8}$$

$$E_{k2} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \dot{q}_1 + \ldots \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \dot{q}_s \right) ; \tag{1.9}$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 \tag{1.10}$$

Uvedemo li oznake

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} , \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} ,$$

funkcije E_{k1} i E_{k2} možemo napisati u oblicima

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \; ; \quad E_{k2} = \sum_{i=1}^{s} B_i \dot{q}_i \tag{1.11}$$

Koeficijenti A_{ij} zovu se koeficijenti inercije, a saglasno njihovom definisanju, lako je zaključiti da su simetrični u odnosu na svoje indekse, tj.

$$A_{ij} = A_{ji} . \tag{1.12}$$

Očevidno je takodje da koeficijenti A_{ij} i B_i zavise od generalisanih koordinata q_i $(i=1,2,\ldots,s)$ i vremena t, a ne zavise od generalisanih brzina $\dot{q}_i$ $(i=1,2, \ldots ,s)$.

Ako se veze stacionarne svi vektori $\partial \vec{r}_k / \partial t$ su jednaki nuli, pa su takodje i kinetičke energije E_{k2} i E_{k3} jednake nuli. Tada preostaje samo kinetička energija E_{k1} u obliku kvadratne forme po generalisanim brzinama, tj. tada je

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \,. \tag{1.13}$$

Pojam forme je uveden u linearnoj algebri i odnosi se na polinome. Kvadratni polinom drugog reda je kvadratna forma drugog reda.

Napominjemo i to da je kinetička energija (1.13) sistema uvek pozitivno definitivna forma. Upravo, kinetička eneergija kao zbir proizvoda pozitivnih veličina $m_i v_i^2/2$, može biti jednaka nuli samo kada su svi članovi forme jednaki nuli, tj. kada se sistem nalazi u miru.

O nekim svojstvima kvadratne forme

Kvadratna forma promenljivih $q_1, q_2, \ldots, q_s$ jeste funkcija drugog reda od ovih promenljivih

$$V = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{ij} q_i q_j \,, \qquad k_{ij} = k_{ji} \quad (i,j = 1,2, \ldots, s).$$

Na primer, za funkciju dveju promenljivih q_1 i q_2 kvadratna forma je oblika

$$V = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} k_{ij} q_i q_j = k_{11} q_1^2 + k_{22} q_2^2 + 2k_{12} q_1 q_2 \,.$$

Determinanta sastavljena od koeficijenata forme oblika

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2s} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & & & \\ k_{s1} & k_{s2} & \ldots & k_{ss} \end{vmatrix}$$

zove se diskriminantna kvadratne forme.

Kvadratna forma je odredjena ili definitna, ako je jednaka nuli kada su sve promenljive jednake nuli.

Kvadratna forma je pozitivno odredjena (definitna) ako je ona pozitivna za sve vrednosti promenljivih, koje nisu jednovremeno jednake nuli.

Pokažimo da diskriminanta pozitivno odredjene forme nije jednaka nuli. U tom cilju postavimo sistem homogenih linearnih jednačina

$$\sum_{i=1}^{s} k_{ij} q_i = 0 \qquad (j=1,2, \ldots, s).$$

Kao što je poznato ovaj sistem uvek ima nulto rešenje $q_i = 0$ ($i=1,2, \dots, s$), a ako je $\Delta = 0$ tada ima rešenja različita od nule. Označimo ih sa q_i' ($i=1, 2, \dots, s$) i tada je

$$\sum_{i=1}^{s} k_{ij} q_i' = 0 \qquad (j=1,2, \dots, s),$$

tj. imamo sistem u kome nisu sve promenljive istovremeno jednake nuli. Množeći svaku jednačinu sistema sa q_j', redosledom za $j=1,2, \dots, s$ i sabiranjem, dobijamo

$$V = \sum_{j=1}^{s} q_j' \sum_{i=1}^{s} k_{ij} q_i' = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{ij} q_i' q_j' = 0.$$

Ovim smo pokazali da je kvadratna forma V jednaka nuli ako su vrednosti promenljivih $q_1', \dots, q_s'$ pri uslovu $\Delta = 0$, razume se pod uslovom da sve promenljive nisu jednovremeno jednake nuli. Ovo, medjutim, nije moguće za pozitivno odredjenu formu i prema tome za nju je $\Delta \neq 0$.

Uvedimo oznake za dijagonalne glavne minore diskriminante

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ \cdot & & & \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rr} \end{vmatrix} \quad (r= 1,2, \dots, s)$$

i

$$\Delta_s = \Delta$$

i navedimo bez dokazivanja opšti kriterijum linearne algebre, koji omogućava rasudjivanje o definitnosti kvadratne forme.

Da bi kvadratna forma bila pozitivno definitna potrebno je i dovoljno da su ispunjeni uslovi

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_s > 0.$$

Analogno, uslovi da je kvadratna forma negativno definitna su:

$$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 < 0, \dots, \Delta_s < 0.$$

Pojam definitnosti kvadratne forme veoma često se susreće u mehanici i njenoj praktičnoj primeni - u teoriji oscilacija, teoriji stabilnosti itd. Posebno, pozitivno definitna forma, i to kvadratna, je potencijalna energija elastičnog sistema pri važnosti uopštenog Hukovog zakona, kao i kinetička energija materijalnog sistema sa holonomnim i zadržavajućim vezama.

Linearizacija diferencijalnih jednačina kretanja

Postupkom linearizacije diferencijalnih jednačina kretanja proizvoljnog oscilatornog sistema

- odredjujemo stepen tačnosti rešavanja problema;
- preciziramo da u diferencijalnim jednačinama kretanja učestvuju generalisane brzine $\dot{q}_i$ i generalisane koordinate q_i, kao male veličine prvog reda, samo na prvom stepenu, tj. da su formirane samo od linearnih članova, što za sobom povlači zanemarivanje članova višeg reda i
- diferencijalne jednačine kretanja sistema svodimo na linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, čijom integracijom dobijamo rešenja u zatvorenom obliku.

Samom linearizacijom svodi se odgovarajući problem oscilatornog kretanja na oscilacije sa malom amplitudom, tj. na male oscilacije. Stvarni problem oscilatornog kretanja ovim rešavamo približno, odnosno dovoljno tačno za male promene koordinata i njihovih brzina. Kao što je poznato, ovako dobijena rešenja imaju veliki značaj u tehničkoj praksi.

Kako diferencijalne jednačine kretanja formiramo primenom Lagranžeovih jednačina II vrste, to se proces linearizacije može uprostiti formiranjem aproksimativnih izraza za kinetičku i potencijalnu energiju sistema sa odgovarajućom tačnošću.

Pre svega, potsetimo se, da je kod sistema, na koji dejstvuju holonomne, stacionarne, idealne, zadržavajuće veze, kinetička energija, u opštem slučaju, funkcija svih generalisanih brzina $\dot{q}_i$ i generalisanih koordinata q_i. Takodje, poznato nam je, da je potencijalna energija funkcija svih generalisanih koordinata q_i. Sa druge strane, prvi izvodi

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} \; ; \; \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \; ; \; \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \; ,$$

koji su sadržani u Lagranžeovim jednačinama II vrste, smanjuju red malih veličina za jedan. To upravo znači, da formiranje diferencijalnih jednačina sa linearnim članovima zahteva aproksimativno formiranje funkcija E_k i E_p sa tačnošću do malih veličina drugog reda po svim promenljivim od kojih zavise. Ovo se postiže razvijanjem ovih funkcija u red po promenljivim i zadržavanjem samo kvadratnih članova, odnosno odbacivanjem članova reda većih od dva.

Uvodeći generalisane koeficijente krutosti, s obzirom da funkciju potencijalne energije izračunavamo sa tačnošću do malih veličina drugog reda, to izrazi (1.16) i (1.17), prema jednakostima (1.18) i (1.20) mogu biti napisani u obliku

$$E_p \approx \frac{1}{2}\,(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \ldots + c_{ss}q_s^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \ldots + 2c_{s-1,s}q_{s-1}q_s),$$

ili kraće

$$(1.23)$$

$$E_p\,(q_1, q_2, \ldots, q_s) \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)\Bigg|_{\substack{q_i=0\\ q_j=0}} q_i q_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_iq_j \qquad (1.24)$$

Lagranž-Dirihleova teorema o stabilnosti ravnoteže materijalnog sistema u konzervativnom polju sile. Toričelijev princip.

U analitičkoj mehanici je pokazano da su u položaju ravnoteže konzervativnih sistema generalisane sile jednake nuli

$$Q_i = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,s). \qquad (1.25)$$

Smatraćemo da generalisane sile zavise od generalisanih koordinata, tj. da je sistem holonoman stacionaran. U tom slučaju jednačine (1.25) možemo smatrati jednačinama u odnosu na koordinate q_i ($i=1,2,\ldots,s$). Rešavanjem ovih jednačina odredjujemo položaje tačaka sistema u kojima se sistem nalazi u ravnoteži. U mnogim slučajevima položaji ravnoteže sistema mogu biti odredjeni iz elementarnih razmatranja ili primenom uslova ravnoteže statike.

Nadjeni položaji ravnoteže mogu biti stabilni i nestabilni. Na primer, obično fizičko klatno sa horizontalnom osom je u gornjem položaju u labilnoj ravnoteži. Takav položaj je praktično neostvarljiv i mi kažemo da je telo u položaju labilne ravnoteže. Medjutim, donji položaj ravnoteže je stabilan i lako se ostvaruje.

Opšta pitanja položaja ravnoteže, kao što smo videli, pripadaju opštim zadacima o stabilnosti kretanja i rešavaju se metodama Ljapunova, ali izlaze iz okvira ovog kursa. Mi se ograničavamo samo na specijalne kriterijume stabilnosti ravnoteže. Na bazi Ljapunovljeve teoreme o stabilnosti ravnoteže sistema, prema kojoj, ako izvedemo sistem iz položaja ravnoteže na proizvoljan način i saopštimo mu početne brzine, ali tako, da udaljenja od položaja ravnoteže nisu velika, s tim da sistem nastavi kretanje zadržavajući malim generalisane koordinate i generalisane brzine, ne udaljavajući se od položaja ravnoteže, mogu se formulisati i drugi dovoljno tačni uslovi stabilnosti ravnoteže.

Matematički kriterijum, koji daje jednostavne dovoljne uslove stabilnosti ravnoteže formulisao je 1788.g. Lagranž, a strogi dokaz je izveo Ležen-Dirihle 1846.g. Teorema Lagranž-Dirihlea glasi:

ako su sve veze sistema holonomne, idealne i zdržavajuće, a sve zadane sile konzervativne, i ako u nekom položaju S^* potencijalna energija sistema ima strogi minimum, a trenutne brzine svih tačaka sistema su jednake nuli, tada je S^* položaj stabilne ravnoteže sistema.

Važi i obrnuta teorema:

položaj ravnoteže sistema je stabilan, ako je u njegovoj okolini priraštaj potencijalne energije pozitivan.

Ne upuštajući se u strogo dokazivanje ove teoreme imamo u vidu da je potencijalna energija (1.24) pozitivno definitna kvadratna forma i da je kvadratni deo potencijalne energije, odnosno cela potencijalna energija, u blizini položaja ravnoteže $q_i(0) = q_i^*$ $(i=1,2,\ldots,s)$ pozitivna. I kako je $E_p(0) = 0$, to će potencijalna energija u tom položaju imati minimum, tako da je položaj ravnoteže stabilan.

Da bismo objasnili pojam "strogi minimum", imamo u vidu da prema definiciji potencijalna energija $E_p(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, kao funkcija više promenljivih, dostiže minimum u položaju sistema odredjenog koordinatama q_i^* $(i = 1,2,\ldots,q_s)$ u slučaju kada je

$$E_p(q_1, q_2, \ldots, q_s) \geqslant E_p(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_s^*) \qquad (1.26)$$

i pri uslovu

$$|q_i - q_i^*| < \varepsilon \qquad (i=1,2,\ldots,s),$$

gde je $\varepsilon > 0$ mala veličina. I ako umesto znaka $\geqslant$ u izrazu (1.26) uzmemo znak $>$, tada govorimo o strogom minimumu.

Za sistem sa jednim stepenom slobode, s obzirom da smo usvojili da generalisane koordinate merimo od položaja ravnoteže, drugi izvod potencijalne energije mora biti veći od nule, kao uslov njenog minimuma, tj.

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0 . \qquad (1.27)$$

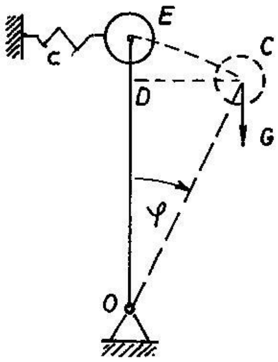
Očevidno je da se odredjivanje položaja stabilne ravnoteže sistema svodi na odredjivanje ekstremnih vrednosti funkcija sa više promenljivih. Poznato je da je ovaj posao vrlo komplikovan, pa se, i pored važnosti Lagranž-Dirihleove teoreme za neograničen-konačan broj stepeni slobode, ova teorema primenjuje u naznačenom obliku samo za sisteme sa jednim stepenom slobode.

Uzgred napomenimo i to da iz Lagranž-Dirihleve teoreme, ako na sistem dejstvuju samo sile težine, proističe i tzv. Toričelijev princip, koji glasi:

materijalni sistem je u položaju stabilne ravnoteže ako mu je težište u najnižem položaju.

Primer 1, (sl.3). Odrediti moguće položaje ravnoteže klatna, težine G, sa oprugom krutosti c, ako je rastojanje centra inercije C od tačke vešanja 0 jednako ℓ. U gornjem položaju klatna opruga je nedeformisana. Masu štapa i opruge, kao i trenje u horizontalnom ležištu 0 zanemariti.

Rešenje: Sistem ima jedan stepen slobode. Njegov je položaj odredjen generalisanom koordinatom $q = \varphi$.. Potencijalna energija sistema se sastoji iz potencijalne energije E_{p1} opruge i potencijalne energije E_{p2} sile teže.



Sl. 3

Za nulti položaj potencijalne energije uzećemo gornji položaj klatna. Zato pri prelazu klatna iz proizvoljnog položaja, odredjenog koordinatom φ u nulti položaj, izvršeni rad sile u opruzi $F = c.\widehat{EC} = c.\ell\varphi$, predstavljaće potencijalnu energiju opruge u proizvoljnom položaju, i ona iznosi

$$E_{p1} = - c\,\ell^2 \int_{\varphi}^{0} \varphi\, d\varphi = \frac{c\,\ell^2\,\varphi^2}{2} . \qquad (a)$$

Rad savladjivanja sile teže, pri prelazu klatna iz proizvoljnog u nulti položaj, biće potencijalna energija E_{p2}, tj.

$$E_{p2} = - G.\overline{DE} = - G\,\ell\,(1 - \cos\varphi). \qquad (b)$$

Sabiranjem izraza (a) i (b) za ukupnu potencijalnu energiju sistema dobijamo

$$E_p = \frac{c\,\ell^2\varphi^2}{2} - G\,\ell\,(1-\cos\varphi)\,.$$

Sada formiramo jednačinu ravnoteže

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = -G\,\ell\sin\varphi + c\,\ell^2\varphi = 0 \qquad \text{(c)}$$

koju smo mogli dobiti postavljanjem uslova ravnoteže poluge. Koreni ove jednačine odredjuju moguće položaje ravnoteže klatna.

Dalje je potrebno postaviti dva pitanja.

1. Kako izabrati parametre sistema, da bi klatno moglo biti u ravnoteži u zadanom položaju. Ako je položaj ravnoteže odredjen uglom φ_o sa vertikalom, zamenom ovog ugla u jednačinu (c) nalazimo

$$c\,\varphi_o\,\ell - G\sin\varphi_o = 0\,,$$

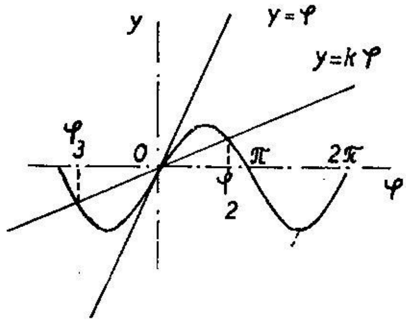
ili

$$\frac{G}{c\,\ell} = \frac{\varphi_o}{\sin\varphi_o}\,.$$

Za $\varphi_o = \frac{\pi}{3}$, treba da bude $G/g\ell = 2\pi\,/\,3\sqrt{3}$, tako da je iz ovog izraza uvek moguće kombinovati parametre G, c i ℓ, da ugao od 60^o sa vertikalom bude položaj ravnoteže sistema.

2. Odrediti položaj ravnoteže klatna, ako su parametri G, c i ℓ zadani. U tom slučaju jednačinu (c) pišemo u obliku

$$\sin\varphi = \frac{c\,\ell}{G}\varphi = k\varphi\,, \qquad \text{(d)}$$



Sl. 4

gde je $k = c\,\ell/G$ poznata konstanta. Rešavanjem prethodne jednačine odredjujemo sve moguće položaje ravnoteže ovog sistema. Najjednostavnije je naći preseke krivih $y_1 = \sin\varphi$ i $y_2 = k\,\varphi$ (sl.4). Na slici je prikazan slučaj trivijalnog rešenja $\varphi_1 = 0$ za k=1, i slučaj, kada pored rešenja φ_1 imamo i rešenja $\varphi_2 = -\,\varphi_3$. Ovo znači da jedan položaj ravnoteže može biti vertikalan, a drugi pod nekim uglom $\varphi_2<\pi$, merenjem udesno, ili $|\varphi_3| < \pi$, merenjem ulevo.

Detaljnijom analizom lako je utvrditi neke posebne vrednosti koeficijenta k. Ako je, na primer $k>1$, tj. $c\,\ell > G$, tada prava $y=k\varphi$ ne preseca sinusoidu $y=\sin\varphi$, i u tom slučaju imamo trivijalan koren $\varphi_1=0$. Isto tako, ako izaberemo k da je $k=\cos\varphi_o=\sin\varphi_o/\varphi_o$ koeficijent k iznosi $k\approx 0{,}129$,

MALE OSCILACIJE KONZERVATIVNOG SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE OKO POLOŽAJA STABILNE RAVNOTEŽE

Slobodne oscilacije sistema

Posmatramo proizvoljan konzervativan sistem materijalnih tačaka M_i $(i=1,2,\dots,n)$, na koji osim elastičnih sila $\vec{F}_{ei}$ dejstvuju holonomne, stacionarne, idealne veze, i koji ima jedan stepen slobode. Položaj ovog sistema je odredjen jednom generalisanom koordinatom q.

Saglasno u svemu što je do sada rečeno o malim oscilacijama sistema, pretpostavljamo da položaju ravnoteže sistema odgovara koordinata $q = 0$. Ovaj položaj stabilne ravnoteže usvajamo i za nulti položaj potencijalne energije sistema. Takodje smatramo da su za vreme oscilovanja sistema generalisana koordinata q i njena brzina $\dot{q}$ za sve vreme male po veličini, tj. da su male veličine prvog reda. Ovo nam omogućuje primenu metode približnog ispitivanja kretanja, zasnovanom na uprošćavanju nelinearnih diferencijalnih jednačina kretanja i zamenjivanju istih približnim linearnim jednačinama.

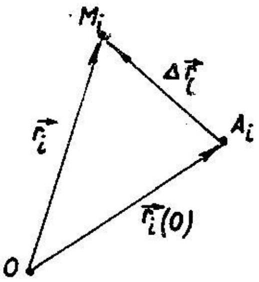
Pri kretanju materijalnog sistema, saglasno sa već pomenutim u analitičkoj mehanici i 1.4, izmedju vektora položaja tačaka M_i materijalnog sistema i generalisane koordinate postoje veze

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q) \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{2.1}$$

a položaji tačaka A_i u položaju stabilne ravnoteže sistema su odredjeni vektorima položaja

$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{io} \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{2.2}$$

Razvijanjem funkcija (2.1) u Maklorenov red u okolini $q=0$, za slučaj malih oscilacija sistema, možemo se zadržati na prvim članovima redova. Tako dobijamo



Sl. 6

$$\vec{r}_i(q) = \vec{r}_i(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{q=0} q + \dots \tag{2.3}$$

$$(i=1,2,\dots,n),$$

gde su $\left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{q=0}$ konstantni vektori, kao i vektori $\vec{r}_i(0)$, (sl.6). Diferenciranjem jednačina (2.3) po vremenu odredjujemo brzine tačaka sistema

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i(q)}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{q=0} \dot{q} \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{2.4}$$

tako da je kinetička energija sistema

$$2E_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \dot{q}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2_{\Big|q=0} = a\,\dot{q}^2, \quad (2.5)$$

gde je inercijalni koeficijent a odredjen izrazom

$$a = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2_{\Big|q=0} = \text{const.} \quad (2.6)$$

Saglasno razmatranjima u 1.8 , za sisteme sa jednim stepenom slobode, potencijalna energija ima oblik

$$2E_p = cq^2 , \quad (2.7)$$

pri čemu je $E_p(0) = 0$. Očevidno je da postoji strogi minimum funkcije $E_p(q)$ u položaju $q=0$, ako je $c > 0$.

Jednačina Lagranža u ovom slučaju dobija oblik

$$a\ddot{q} + cq = 0 \quad (2.8)$$

i očevidno je ekvivalentna jednačini $\frac{1}{2}a\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2 = \text{const.}$, koja izražava zakon o održanju mehaničke energije. Kako je $\omega^2 = c/a > 0$, jednačina kretanja sistema postaje

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (2.9)$$

Njeno je rešenje, kao što je poznato

$$q = A\cos(\omega t - \varphi_o), \quad (2.10)$$

gde su: A - amplituda, φ_o - početna faza i ω - kružna frekvencija sistema. Konstante A i φ_o su konstante integracije, koje odredjujemo iz početnih uslova, zavisnih od početne konfiguracije sistema i početnih brzina. Kružna frekvencija sistema ω je konstanta sistema, odredjena parametrima a i c i ne zavisi od početnih uslova.

Period ovih slobodnih neprigušenih oscilacija je odredjen izrazom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} . \quad (2.11)$$

Bližu predstavu o oscilovanju sistema dobićemo, ako vektore pomeranja pojedinih tačaka $\Delta\vec{r}_i = \overrightarrow{A_iM_i}$ (sl.6), prema (2.3), prikažemo u funkciji vremena

$$\Delta\vec{r}_i(q) = \vec{r}_i(q) - \vec{r}_i(0) = \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{\Big|q=0} q = \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{\Big|q=0} A\cos(\omega t - \varphi_o) \quad (2.12)$$

$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Iz ovako napisanih jednačina kretanja tačaka M_i $(i=1,2, \dots ,n)$ sistema možemo izvesti niz zaključaka:

1. Kako je vektor $(d\vec{r}_i/dq)_{|q=0}$ = const., putanje svih tačaka M_i sistema su prave linije, koje prolaze kroz odgovarajuće ravnotežne položaje tačaka A_i. Njihove su jednačine u vektorskom obliku

$$\vec{r}_i\,(q) = \vec{r}_i\,(0) + \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{|q=0} q\;, \tag{2.13}$$

gde koordinata q igra ulogu parametra.

2. Elongacije $s_i = |\Delta\vec{r}_i(q)|$ pojedinih tačaka sistema od svojih ravnotežnih položaja

$$s_i = |\Delta\vec{r}_i(q)| = \left|\left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{|q=0}\right| q = \left|\left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)_{|q=0}\right| .A.\cos(\omega t - \varphi_o) = h_i\cos(\omega t - \varphi_o) \tag{2.14}$$

su različite, jer su im različite amplitude

$$h_i = A\left|\left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)\right|_{q=0} . \tag{2.15}$$

Pri tome, na veličine amplituda pojedinih tačaka utiču početni uslovi preko množitelja A, koji je zajednički za sve tačke sistema. Odavde proizilazi da odnosi amplituda pojedinih tačaka sistema ne zavise od početnih uslova. I zato, ako se ima u vidu da oblik oscilacija zavisi od odnosa amplituda različitih tačaka sistema, ni oblik oscilacija sistema ne zavisi od početnih uslova.

3. Faza oscilacije $(\omega t - \varphi_o)$ je za sve tačke sistema ista, tj. sve tačke sistema osciluju u fazi, oscilacije sistema su sinhrone. Drugim rečima, ceo sistem se jednovremeno vraća u ravnotežni položaj, kao i što jednovremeno dostiže maksimalna udaljenja od njega. Trenutci prolaza kroz ravnotežne položaje su odredjeni jednakostima

$$\omega t_n - \varphi_o = n\frac{\pi}{2}\;, \quad n = \pm 1,\ \pm 3, \dots ,$$

a trenutci dostizanja maksimalnih udaljenja od ravnotežnih položaja, jednakostima

$$\omega t_n - \varphi_o = n\pi\;, \quad n = 0,1,2, \dots$$

Period oscilovanja (2.11) ne zavisi od početnih uslova, već od mehaničkog karaktera sistema, tj. veličina c i a. Takodje ne zavisi ni od izbora generalisane koordinate.

Sistemi sa jednim stepenom slobode, koji vrše male oscilacije oko položaja ravnoteže, zovu se linearni oscilatori.

Slobodne prigušene oscilacije sistema

Pri realnim uslovima kretanja materijalnih sistema, za razliku od prethodno proučenog idealizovanog slobodnog kretanja sistema, na tačke sistema dejstvuju holonomne, stacionarne, realne veze. Za praktične potrebe dovoljno je ograničiti se na proučavanje kretanja sistema na koji dejstvuju:

a) sile viskoznog trenja, proporcionalne prvom stepenu brzina tačaka;

b) sile suvog trenja, proporcionalne, prema Kulonovom zakonu trenja klizanja normalnom pritisku tačaka na vezu.

Male oscilacije sistema sa otporom proporcionalnim prvom stepenu brzine

Na tačke M_i ($i=1,2,\dots,n$) materijalnog sistema, osim konzervativnih (elastičnih) sila $\vec{F}_{ei}$ dejstvuju i sile trenja

$$\vec{F}_{wi} = -\beta_i \vec{v}_i \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{2.16}$$

proporcionalne prvom stepenu brzine odgovarajuće tačke, gde su koeficijenti β_i konstantni pozitivni brojevi. Ovakvi se sistemi sa jednim stepenom slobode zovu linearni oscilatori sa trenjem.

Dejstvujućem sistemu sila trenja odgovara jedna generalisana sila trenja

$$Q^w = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{wi} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq}, \tag{2.17}$$

koja, prema (2.16), ima oblik

$$Q^w = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq} = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq} = -\dot{q} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2 =$$

$$= -\dot{q} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2_{q=0} = -\mathbf{b}\dot{q}, \tag{2.18}$$

gde je

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2_{q=0} = \text{const.} > 0 \tag{2.19}$$

konstantni koeficijent prigušivanja.

Kao što smo već videli, aproksimativne izraze za kinetičku i potencijalnu energiju u ovom slučaju pišemo u obliku

$$E_k \approx \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \qquad E_p \approx \frac{1}{2} c q^2,$$

a uveli smo i Relejevu funkciju disipacije

$$\Phi \approx \frac{1}{2} b \dot{q}^2 ,$$

tako da je

$$Q^w = - \frac{d\Phi}{d\dot{q}} = - \dot{q}b.$$

Ovom kretanju sistema odgovara diferencijalna jednačina kretanja

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0,$$

koja posle uvodjenja oznaka

$$\omega^2 = \frac{c}{a} \quad \text{i} \quad 2\delta = \frac{b}{a} ,$$

dobija oblik

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = 0 , \tag{2.20}$$

nama poznat iz dinamike tačke.

Rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda (2.20), slobodnih prigušenih oscilacija sistema, odgovara svemu što je proučeno u dinamici tačke. Zato ćemo samo ukratko ponoviti vrste i elemente ovog kretanja.

Opšti integral jednačine (2.20)

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0, \tag{2.21}$$

čiji su koreni λ_1 i λ_2

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} .$$

Zavisno od odnosa prigušenja δ i kružne frekevencije sistema ω razlikujemo tri moguća slučaja:

$\delta < \omega$ – malo prigušenje ;
$\delta > \omega$ – veliko prigušenje ;
$\delta = \omega$ – granični slučaj prigušenja .

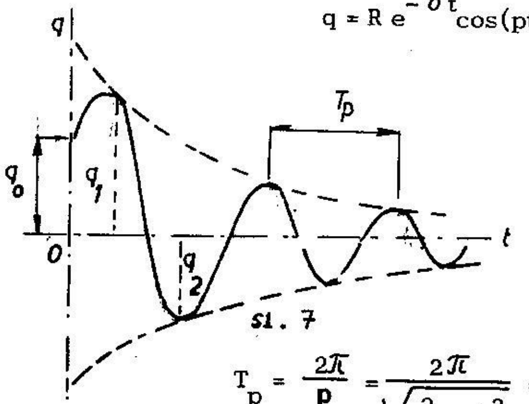
1. Malo prigušenje sistema ($\delta < \omega$)

Sa oznakom

$$p^2 = \omega^2 - \delta^2$$

koreni jednačine (2.21) su konjugovano kompleksni i opšti integral jednačine (2.20) ima oblik

$$q = R\,e^{-\delta t}\cos(pt - \theta)\,, \qquad (2.22)$$



sl. 7

čiji je dijagram prikazan na sl.7.

Najmanji vremenski interval izmedju dva uzastopna trenutka t_n i t_{n+1}, u kojima je $q_n = q_{n+1}$ i $\dot{q}_n = \dot{q}_{n+1}$ zove se prividni period oscilovanja prigušenih oscilacija i ima veličinu

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-(\frac{\delta}{\omega})^2}} = \frac{T_\omega}{\sqrt{1-\psi^2}}\,, \qquad (2.23)$$

gde je $\psi = \frac{\delta}{\omega}$ bezdimenzioni koeficijent prigušenja.

Iz odnosa dveju uzastopnih amplituda ovih oscilacija

$$\chi = \frac{|q_n|}{|q_{n+1}|} = e^{\frac{\delta T_p}{2}}\,,$$

koji se zove dekrement oscilacije, uvidjamo da se amplitude smanjuju po zakonu geometrijske progresije sa količnikom

$$e^{\delta T_p/2}$$

Prirodni logaritam dekrementa χ zove se logaritamski dekrement

$$\mathcal{D} = \ln\chi = \frac{\delta T_p}{2} = \frac{\delta\pi}{p}\,.$$

Praktičnu primenu imaju i obrasci

$$\mathcal{D} = \frac{\delta T_p}{2} = \frac{\delta\pi}{p} = \frac{\delta\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\pi\frac{\delta}{\omega}}{\sqrt{1-(\frac{\delta}{\omega})^2}} = \frac{\pi\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}\,,$$

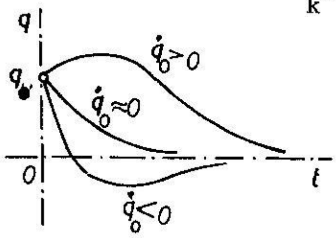
$$\psi = \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{\pi^2 + \mathcal{D}^2}}\,,$$

jer se jedanput odredjeni logaritamski dekrement može iskoristiti za odredjivanje koeficijenta prigušivanja Ψ, a zatim i δ preko poznate kružne frekvencije ω.

2. Veliko prigušenje ($\delta > \omega$)

U ovom slučaju koreni karakteristične jednačine su realni i različiti. Uz pomoć oznake

$$k^2 = \delta^2 - \omega^2$$



Sl.8

opšti integral diferencijalne jednačine kretanja (2.20) ima oblik

$$q = e^{-\delta t} (A.\mathrm{Ch}\,kt + B.\mathrm{Sh}\,kt).$$

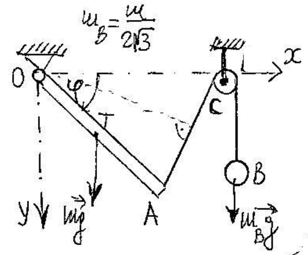
Ovakvo kretanje je aperiodično, kao što se vidi iz dijagrama na sl.8. Oblik jednačine kretanja očevidno zavisi od početne brzine $\dot{q}_o$.

3. Kritično prigušivanje sistema ($\delta = \omega$).

Koreni karakteristične jednačine u ovom slučaju su realni i jednaki i opšti integral diferencijalne jednačine kretanja ima oblik

$$q = e^{-\delta t} (A + Bt)$$

iz koga se vidi da je kretanje aperiodično.



Sistem se kreće u vertikalnoj ravni. Sastoji se od štapa 0A mase m i dužine R, kao i tereta D mase $^{m}/_{2\sqrt3}$, koturače C i užeta BCD (dužine L) zanemarljivih masa. Rastojanje 0A=0C=R. Veza u tački 0 je zglobna. Odrediti stabilni ravnotežni položaj i period "malih" oscilacija oko tog položaja.

KINEMATSKA VEZA: $y_B = L - 2R\sin\frac{\varphi}{2}$ $\quad (y_B = \widehat{ACB} - \widehat{AB})$

$$A = A(m\vec g) + A(m_B\vec g) = mg\,y_T + m_B g\,y_B$$

$$A = \frac{mgR}{2}\sin\varphi + m_B g\left(L - 2R\sin\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \Pi \equiv E_p = -A$$

$$\Pi = -\frac{mgR}{2}\sin\varphi + 2m_B gR\sin\frac{\varphi}{2} + \hat C$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi_*=?} = 0}_{\text{POTREBAN USLOV}} \qquad \underbrace{\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi_*} > 0}_{\text{DOVOLJAN USLOV}}$$

ili:

$$\delta A = mg\,\delta\left(\frac{R}{2}\sin\varphi\right) + m_B g\,\delta\left(L - 2R\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\delta A = \left(\frac{mgR}{2}\cos\varphi - \frac{m}{2\sqrt3}gR\cos\frac{\varphi}{2}\right)\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{mgR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt3}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi_*} = -\frac{mgR}{2}\cos\varphi_* + m_B gR\cos\frac{\varphi_*}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt3\cos\varphi_1 = \cos\frac{\varphi_1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{3}} \qquad \left(m_B = \frac{m}{2\sqrt3}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi_1=\frac{\pi}{3}} = \frac{mgR}{2}\sin\varphi_1 - \left(\frac{m}{2\sqrt3}\right)gR\left(\frac12\right)\sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{5\sqrt3}{24}mgR > 0 \qquad \Pi_{\varphi_1=\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{(\text{STROGI})} \min$$

$$T = T_{\check{s}tapa} + T_B = \frac12 J_{0z}\dot\varphi^2 + \frac12 m_B v_B^2 \qquad J_{0z} = \frac13 mR^2 \qquad v_B = -R\dot\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$T = \frac16 mR^2\dot\varphi^2 + \frac12\left(\frac{m}{2\sqrt3}\right)R^2\dot\varphi^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac13 mR^2\dot\varphi + \frac{m}{2\sqrt3}R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\dot\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \underbrace{-\frac{m}{2\sqrt3}R^2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\dot\varphi^2}_{b}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac13 mR^2\ddot\varphi \underbrace{- \frac{m}{2\sqrt3}R^2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\dot\varphi^2}_{b} + \frac{m}{2\sqrt3}R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\ddot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi \qquad Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}$$

$$\frac13 mR^2\ddot\varphi + \frac{mR^2}{2\sqrt3}\cos^2\frac{\varphi}{2}\ddot\varphi - b - (-b) = Q_\varphi$$

KAKO JE: $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3} + \psi}$ $\quad \ddot\varphi = \ddot\psi \quad \left[\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac12(1+\cos\varphi)\right]$

$\sin\psi \approx \psi$, $\cos\psi \approx 1$

$$\frac13 mR^2\ddot\psi + \frac{mR^2}{4\sqrt3}\underbrace{\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}+\psi\right)\right]\ddot\psi}_{\frac{mR^2}{4\sqrt3}\left[1+\cos\frac{\pi}{3}\cos\psi - \sin\frac{\pi}{3}\sin\psi\right]\ddot\psi} = \underbrace{\frac{mgR}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\psi\right) - \frac{1}{\sqrt3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\psi}{2}\right)\right]}_{Q_\psi \approx -\frac{5\sqrt3}{24}mgR\psi}$$

($\cos\psi \to 1$, $\psi\ddot\psi \to 0$)

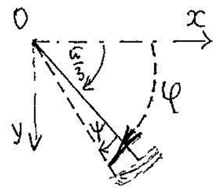
$$\left(\frac13 mR^2 + \frac34\frac{mR^2}{\sqrt3}\right)\ddot\psi \cong Q_\psi$$

$$\frac{(8+3\sqrt3)}{24}mR^2\ddot\psi = -\frac{5\sqrt3}{24}\psi(mgR)$$

$$\boxed{\ddot\psi + \frac{5\sqrt3\left(\frac{g}{R}\right)}{(8+3\sqrt3)}\psi = 0}$$ U LINEARNOM SMISLU

$$T = 2\pi/\omega \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{5\sqrt3}{(8+3\sqrt3)}\frac{g}{R}}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{(8+3\sqrt3)}{5\sqrt3}\frac{R}{g}} \approx 7.75\sqrt{\frac{R}{g}}$$

[HARMONISKO OSCILOVANJE OKO POLOŽAJA $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$]*)



$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \psi$$

(*) NAPOMENA: LINEARIZACIJA NIJE VRŠENA OKO POLOŽAJA $\boxed{\psi=0}$ VEĆ OKO POLOŽAJA $\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{3}}$ T.J. LINEARIZACIJA JE MOGUĆA (IMA SMISLA) SAMO TAMO GDE POTENCIJALNA ENERGIJA IMA STROGI MINIMUM — ZNAČI TAMO GDE JE TO STABILAN RAVNOTEŽNI POLOŽAJ. DA BI VEŽBALI FORMIRANJE LAGRANŽEVE DIF. JED. DRUGE VRSTE OVDE SMO LINEARIZOVALI DIREKTNO IZ TE FORMIRANE JEDNAČINE. JEDNOSTAVNIJI NAČIN DA SE ODREDI PERIOD (I NAPIŠE DIF. JED. DRUGOG REDA) OSCILOVANJA JE POMOĆU KOEFICIJENATA INERCIJE "a" I KOEFICIJENATA GENERALISANE KRUTOSTI "c".

$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$ KOD NAS $T = \frac{1}{2} a(\varphi) \dot{\varphi}^2$ $a(\varphi) = \left[\frac{1}{3} mR^2 + \frac{mR^2}{4\sqrt{3}} \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right]$ $a\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{(8+3\sqrt{3})}{24}$

$\Pi(q) \cong \frac{1}{2} c q^2$ KOD NAS $\Pi(\varphi) = \frac{1}{2} c \varphi^2$ $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi_1 = \frac{\pi}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{24} mgR$

DIF. JED. LINEARIZOVANA JE $a\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$

A PERIOD $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{(8+3\sqrt{3})}{5\sqrt{3}} \frac{R}{g}} \approx 7.75 \sqrt{\frac{R}{g}}$.