Математика 2

Душан Ђукић

8 – 9. Диференцијалне једначине првог реда

1. Основни појмови

Диференцијална једначина је једначина по *непознатој функцији*, дата у облику везе између функције, њених извода и променљиве. У свом општем облику то је једначина облика

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)} = 0,$$

где је x променљива и $y = y(x)$ непозната функција. Ако је највише извод који учествује у једначини извод n-тог реда, кажемо да је то *једначина n-тог реда*. Циљ решавања диференцијалне једначине је да се нађе непозната функција.

У овом предмету бавићемо се само једначинама првог реда, дакле, онима облика

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{или (у експлицитном облику)} \quad y' = f(x, y).$$

Наш први сусрет са диференцијалним једначима били су неодређени интеграли.

Пример 1. (а) Најједноставнија је диференцијална једначина облика

$$y' = f(x).$$

Њено решење је, наравно, функција $y = \int f(x)\,dx + C$.

(б) Мало сложеније делује диференцијална једначина

$$yy' = f(x).$$

Овде нам интеграција по dx даје $\int f(x)\,dx = \int yy'dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + \text{const}$, одакле добијамо опште решење:

$$y = \sqrt{2\int f(x)\,dx + C}, \quad \text{где је } C \text{ произвољна константа.}$$

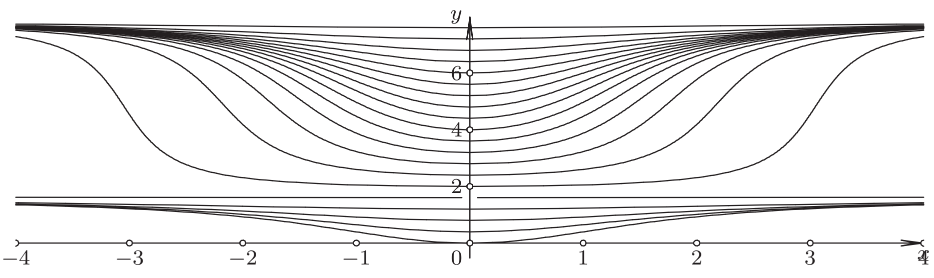
Опште решење y дате диференцијалне једначине првог реда чини фамилија функција, у зависности од константног параметра C. То решење ћемо обично добијати у једном од три облика:

- *експлицитном*: $y = f(x, C)$, где је функција f позната;
- *имплицитном*: $f(x, y, C) = 0$, где је функција f позната;
- *параметарском*: $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где су везе вредности x и y с параметром t познате.

У нашим примерима трећи случај ћемо виђати најређе.

Свака функција која задовољава дату диференцијалну једначину зове се *партикуларно решење*. Конкретна вредност константе C, као и њоме одређено партикуларно решење, могу се одредити ако је познат додатни услов за функцију y, То може бити нпр. *почетни услов* - вредност $y(x_0)$ у датој тачки x_0.

Пример 2. На слици су приказани графици решења диференцијалне једначине $y' = x(1 - \sin y)$ за разне почетне вредности $y(0)$.



Под одређеним претпоставкама почетни услов гарантује јединственост решења.

Тврђење 1 (Теорема Пикара). Посматрајмо диференцијалну једначину $y' = f(x, y)$, уз почетни услов $y(x_0) = y_0$.

Ако је f непрекидно диференцијабилна функција чији је извод ограничен, онда наведена диференцијална једначина има јединствено решење y у околини тачке x_0. □

Онда када претпоставке теореме Пикара нису задовољене, могу да постоје решења која се не уклапају у облик општег решења ни за један избор константе C. Таква решења се зову *сингуларна* и обично их изгубимо приликом решавања једначине, нпр. када негде делимо једначину нечим што може бити нула. Испитивање сингуларних решења је ван оквира овог предмета.

Пример 3. Посматрајмо једначину

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Како је $y' = dy/dx$, њу можемо записати у облику $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$. Овде нам је дозвољена интеграција обеју страна, дајући $\sqrt{y} = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = x + C$. Тако смо добили опште решење:

$$y = (x + C)^2, \quad \text{где је } C \text{ произвољна константа.}$$

Међутим, ова једначина има и једно сингуларно решење: $y = 0$. Оно не одговара ниједној вредности C. Њега смо изгубили дељењем једначине са y.

2. Неки типови решивих једначина

Успешним решењем диференцијалне једначине можемо да сматрамо сваки облик (општег) решења које је комбинација елементарних функција и интеграла. Ипак, релативно мало диференцијалних једначина, чак и првог реда, решиво је на овај начин. Размотрићемо неколико основних типова диференцијалних једначина које се могу решити.

(1°) *Једначина са раздвојеним променљивим.*

Ово је једначина облика

$$y' = f(x)g(y),$$

где су f и g дате функције. И овде и надаље подразумевамо интеграбилност.

Како је $y' = \frac{dy}{dx}$, ова једначина се може записати у облику „са раздвојеним променљивим" - x је десно, а y лево:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

тако да нам интеграција обеју страна даје опште решење у имплицитном облику:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Пример 4. Решити диференцијлну једначину

$$y' = x^2y^2.$$

Решење. Раздвојићемо променљиве: $\frac{dy}{dx} = x^2y^2$, тј. $\frac{dy}{y^2} = x^2dx$. Интеграцијом добијамо $-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int x^2dx = \frac{x^3+C}{3}$, одакле је

$$y = -\frac{3}{x^3 + C}.$$

(2°) *Хомогена једначина.*

Ово је једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где је f дата функција.

Уводимо смену $z = \frac{y}{x}$, тако да је $y' = f(z)$. (Овако препознајемо хомогену једначину: након увођења ове смене y' зависи само од z, не и од x.) Тада је $y = zx$ и (као извод производа) $y' = z + xz'$, па дата једначина постаје

$$z + xz' = f(z), \quad \text{тј.} \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

То је једначина са раздвојеним променљивим, а такве умемо да решимо.

Пример 5. Решити диференцијлну једначину

$$(x+y)y' = y.$$

Решење. Уверимо се да је ово хомогена једначина: сменом $y = xz$ и $y' = xz' + z$ она постаје

$$y' = \frac{y}{x+y} = \frac{\cancel{x}z}{\cancel{x}(z+1)}, \quad \text{што заменом } y' = xz' + z \text{ даје} \quad xz' = \frac{z}{z+1} - z = \frac{-z^2}{z+1}.$$

Раздвајање променљивих даје $\frac{(z+1)\,dz}{z^2} = -\frac{dx}{x}$, одакле је интеграцијом $\ln z - \frac{1}{z} = -\ln x$. Најзад, $z = \frac{y}{x}$, па имамо $\ln\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = -\ln x$, тј.

$$y \ln y = x.$$

(3°) *Линеарна једначина.*

Ово је једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

где су P и Q дате функције по x.

Размотримо прво простију једначину: $y' + P(x)y = 0$. То је једначина са раздвојеним променљивим: $\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$. Интеграцијом налазимо $\ln y = \int P(x)\,dx + \text{const}$, те је њено (једно) решење

$$y_0 = e^{-\int P(x)dx}.$$

Вратимо се једначини (1) и потражимо њено решење у облику $y = y_0 \cdot z$. Тада је $y' = y_0 z' + y_0' z$, па (1) постаје

$$y_0 z' + \big(\cancelto{0}{y_0' + P(x)y_0}\big)z = Q(x).$$

Одавде дељењем са y_0 и интеграцијом налазимо z, а одатле и $y = y_0 z$:

$$y = y_0\left(C + \int \frac{Q(x)}{y_0}\,dx\right) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx\right). \tag{2}$$

Пример 6. Решити једначину

$$(x^2-1)y' = x^2 + 2y.$$

Решење. Записаћемо једначину као $y' - \frac{2}{x^2-1}\cdot y = \frac{x^2}{x^2-1}$. У горњим ознакама је

$$P(x) = -\frac{2}{x^2-1} \quad \text{и} \quad Q(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

Тада је $\int P(x)dx = \ln\frac{x+1}{x-1}$, па нам формула (2) даје

$$y = \frac{x-1}{x+1}\left(C + \int \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2}{x^2-1}\,dx\right) = \frac{x-1}{x+1}\left(C + x - \frac{1}{x-1} + 2\ln(x-1)\right).$$

(4°) *Бернулијева једначина.*

Ово је једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k, \tag{3}$$

где су P и Q дате функције по x.

Увешћемо смену $y = z^\alpha$, при чему ћемо константу α одабрати касније. Тада је $y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$ (по правилу сложене функције), чиме (3) постаје

$$\alpha z^{\alpha-1} z' + P(x) z^\alpha = Q(x) z^{k\alpha}.$$

Одабиром

$$\alpha = \frac{1}{1-k}, \quad \text{тј.} \quad y = z^{\frac{1}{1-k}} \tag{4}$$

биће $\alpha - 1 = k\alpha$, те ће ова једначина након скраћивања $z^{\alpha-1}$ постати линеарна, а такве умемо да решимо:

$$\alpha z' + P(x)z = Q(x).$$

Пример 7. Решити једначину

$$xy' = y - xy^{3/2}.$$

Решење. Ово је Бернулијева једначина у којој је $k = \frac{3}{2}$, па користимо $\alpha = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} = -2$, тј. смену $y = z^{-2}$. Тада је $y' = -2z^{-3}z'$, што дату једначину своди на

$$-2xz^{-3}z' = z^{-2} - xz^{-3}, \quad \text{тј} \quad z' + \frac{z}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Ово је линеарна једначина ($P(x) = \frac{1}{2x}$ и $Q(x) = \frac{1}{2}$) коју једноставно решавамо по формули (2):

$$z = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad \text{тј.} \quad y = z^{-2} = \frac{9x}{(x^{3/2} + C_1)^2} \quad (C_1 = 3C = \text{const}).$$

3. Једначина потпуног диференцијала

Свака диференцијална једначина облика ($\frac{dy}{dx} =$) $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ може се записати у облику

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0. \tag{5}$$

Оваква једначина се зове *једначина потпуног диференцијала* ако постоји непрекидно диференцијабилна функција $F(x,y)$ - *потенцијал* једначине - таква да је

$$F'_x = A(x,y) \ \text{ и } \ F'_y = B(x,y), \qquad \text{тј.} \qquad dF = A\,dx + B\,dy.$$

Тада се једначина (5) своди на $dF = 0$, те је њено решење

$$F(x,y) = \text{const}.$$

Неопходан услов за постојање функције F је да важи

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (= F''_{xy}).$$

С друге стране, ово је и довољан услов. Потенцијал F бисмо нашли на следећи начин.

- Из једначине $F'_x = A(x,y)$ налазимо $F = \int A\,dx + E(y)$ - по претпоставци, $E'_x = 0$, тј. E је константа по x, али може да зависи од y.
- Сада је $F'_y = B(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\int A\,dx\big) + E'(y)$, па је $E'(y) = B - \frac{\partial}{\partial y}\big(\int A\,dx\big)$. Одавде налазимо функцију $E(y) = \int \big[B - \frac{\partial}{\partial y}\big(\int A\,dx\big)\big]\,dy$, што нам коначно одређује функцију F:

$$F(x,y) = \int A\,dx + \int \left(B - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int A\,dx\right)\right)\,dy.$$

Пример 8. Једначина

$$(e^y + ye^x)dx + \big(e^x + (x+1)e^y\big)dy = 0$$

је једначина потпуног диференцијала. Заиста, како је $A = e^y + ye^x$ и $B = e^x + (x+1)e^y$, важи $A'_y = B'_x = e^x + e^y$.

Одредимо потенцијал F. Из $F'_x = e^y + ye^x$ следи $F = \int (e^y + ye^x)\,dx = xe^y + ye^x + E(y)$. Даље, из $e^x + (x+1)e^y = F'_y = xe^y + e^x + E'(y)$ следи $E'(y) = e^y$, тј. $E(y) = e^y + \text{const}$. Добили смо

$$F(x,y) = (x+1)e^y + ye^x + \text{const}.$$

Према томе, решење дате диференцијалне једначине је $(x+1)e^y + ye^x = C$.

Поставља се питање шта радити ако једначина (5) *није* једначина потпуног диференцијала. У том случају можемо покушати да нађемо функцију $\mu = \mu(x,y)$ множењем са којом ће (5) постати једначина потпуног диференцијала. Другим речима, функција μ мора да буде таква да важи

$$\frac{\partial(\mu \cdot A)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot B)}{\partial x}, \quad \text{што се своди на} \quad (A'_y - B'_x)\mu = B \cdot \mu'_x - A \cdot \mu'_y.$$

Ово је парцијална диференцијална једначина по $\mu(x,y)$ која је у општем случају још теже решива него полазна једначина. Ипак, функцију μ често можемо да одредимо ако знамо у ком облику је треба тражити.

Пример 9. Интеграциони фактор једначине

$$(x^2 + y^2)dx + 2ydy = 0$$

је облика $\mu = f(x)$. Наћи тај фактор.

Решење. Важи

$$\big((x^2 + y^2)f(x)\big)'_y = \big(2yf(x)\big)'_x, \quad \text{тј.} \quad 2yf(x) = 2yf'(x),$$

одакле је $f'(x) = f(x)$, тј. $df/f = dx$. Интеграцијом добијамо $\ln f(x) = x + \text{const}$, тј. $f(x) = Ce^x$ за неку константу C. Према томе, $\mu = e^x$ је интеграциони фактор.

Заиста, једначина

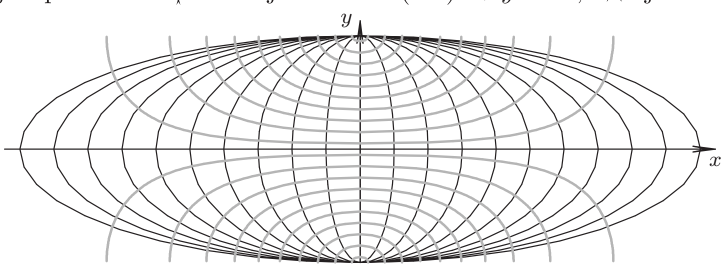
$$(x^2 + y^2)e^x\, dx + 2ye^x dy = 0$$

јесте једначина потпуног диференцијала.

4. Ортогоналне и изогоналне трајекторије

Нека је $\mathcal{K}$ фамилија кривих датих једначинама $f(x, y, C) = 0$, где је C слободна константа. *Ортогонална трајекторија* је свака крива која сече све криве из ове фамилије под правим углом. Овакве криве су од интереса у описивању правоуглих криволинијских координатних система (сетимо се нпр. система поларних координата).

Пример 10. На слици је приказана фамилија елипси $(Cx)^2 + y^2 = 1$, где је $C > 0$.



Сиве криве представљају ортогоналне трајекторије на ову фамилију елипси. Једна од ортогоналних трајекторија је и x-оса.

Одређивање ортогоналних трајекторија се по правилу своди на диференцијалне једначине. Наиме, ако се константа C из једначине криве изражава једначином $C = g(x, y)$, диференцирањем по x ова константа нестаје, дајући диференцијалну једначину облика

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6}$$

Решења ове једначине су криве фамилије $\mathcal{K}$.

Посматрајмо сада ортогоналну трајекторију γ. Она сече неку криву ω из фамилије $\mathcal{K}$ у некој тачки $P(x, y)$. Нека је y' нагиб трајекторије γ у тачки P. Будући ортогонална на γ, крива ω у тачки P има нагиб $-1/y'$, што по (6) значи да тај нагиб задовољава једначину

$$F\big(x, y, -\tfrac{1}{y'}\big) = 0. \tag{7}$$

Према томе, диференцијална једначина (7) описује ортогоналне трајекторије на фамилију $\mathcal{K}$.

Пример 11. Наћи ортогоналне трајекторије за фамилију $\mathcal{K}$ елипси $(Cx)^2 + y^2 = 1$ из Примера 10.

Решење. Прво ћемо одредити диференцијалну једначину која описује ову фамилију. Имамо $C = \frac{1}{x}\sqrt{1 - y^2}$, што диференцирањем по x даје

$$0 = C' = -\frac{1}{x^2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \text{што се своди на} \quad F(x, y, y') = xyy' - y^2 + 1 = 0.$$

Ортогоналне трајекторије описује једначина $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$, тј. $xy/y' = 1 - y^2 = 0$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $x\, dx = (\frac{1}{y} - y)\, dy$. Њено опште решење добијамо интеграцијом:

$$x^2 = 2\ln y - y^2 + C_1,$$

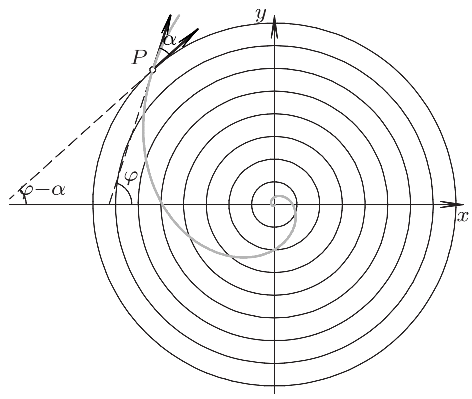
и то је једначина ортогоналних трајекторија.

Изогонална трајекторија је свака крива која сече све криве из фамилије $\mathcal{K}$ под датим углом α.

Ортогоналне трајекторије су специјалан случај изогоналних за угао $\alpha = 90°$.

Изогоналне трајекторије одређујемо слично као ортогоналне. Посматрајмо изогоналну трајекторију γ и тачку $P(x, y)$ на њој. Тангента на γ у тачки P чини са x-осом угао φ и има нагиб $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Крива из фамилије $\mathcal{K}$ која пролази кроз тачку P у тој тачки има тангенту која са x-осом чини угао $\varphi - \alpha$ и има нагиб $\tilde{y}' = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha}$. Према (6), тај нагиб задовољава једначину $F(x, y, \tilde{y}') = 0$, тј.

$$F\big(x, y, \tfrac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha}\big) = 0. \tag{8}$$



Према томе, изогоналне трајекторије на фамилију $\mathcal{K}$ описује диференцијална једначина (8).

Пример 12. Наћи изогоналне трајекторије за фамилију $\mathcal{K}$ концентричних кругова $x^2 + y^2 = C^2$ под датим углом α.

Решење. Диференцирањем једначине $x^2 + y^2 = C^2$ по x налазимо диференцијалну једначину $F(x, y, y') = x + yy' = 0$. Изогоналне трајекторије описује једначина $F\big(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha}\big) = x + y\frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha} = 0$. Из ње можемо да изразимо y' као

$$y' = \frac{y\operatorname{tg}\alpha - x}{x\operatorname{tg}\alpha + y},$$

што је хомогена једначина. Сменом $y = xz$ и $y' = xz' + z$ она постаје $\frac{x\,dz}{dx} = xz' = \frac{z\operatorname{tg}\alpha - 1}{z + \operatorname{tg}\alpha} - z$, што се своди на $\frac{z + \operatorname{tg}\alpha}{1 + z^2}\,dz = -\frac{dx}{x}$. Интеграцијом добијамо $\frac{1}{2}\ln(1 + z^2) + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{arctg} z = -\ln x$, што заменом $z = \frac{y}{x}$ постаје

$$\ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

5. Задаци

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = 1 - y - 2y^2$.
2. Решити диференцијалну једначину $y' = e^{x-y}$.
3. Наћи решење диференцијалне једначине $x^2y' = x^2 + xy + y^2$ уз почетни услов $y(\frac{1}{2}) = 0$.
4. Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$.
5. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$, а затим и партикуларно решење које задовољава услов $y(1) = 1$.
6. Погодном сменом свести једначину облика $y' = f\big(\frac{y+b}{x+a}\big)$ на хомогену, где су a и b константе.
7. Решити диференцијалну једначину $y' = \frac{2x+y-2}{x+2y+1}$.
8. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = y + \sin 2x$.
9. Решити диференцијалну једначину $x(x+1)y' = xy + (x+1)^2$ за $x > -1$, уз почетни услов $y(1) = 0$.
10. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' + y\sin x = 2x^3\cos x^2 e^{\cos x}$.
11. Наћи опште решење једначине $y'(x + e^y) = 1$. Ако је $y(0) = -2$, израчунати $y(2)$.
12. Решити диференцијалну једначину $y'\cos x = y\sin x + y^4$.
13. Наћи партикуларно решење једначине $y' + \frac{2}{x}y = \sqrt{y}\sin x$ које испуњава услов $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}$.
14. Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$ које задовољава услов $y(1) = 2$.
15. Дата је једначина $z' = \frac{e^z - xe^x + 1}{(x+1)e^z}$. Сменом $y = e^x + e^z$ свести је на линеарну, а затим је решити.

16. Решити диференцијалну једначину $(x+x^2)y' + xe^y = 1$. Може да се користи смена $y = \ln z$.

17. Погодном сменом свести следеће једначине на неки од обрађених типова (раздвојене променљиве, хомогена, линеарна, Бернулијева):
(а) $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$; (б) $y' = p(x)e^y + q(x)$.

18. Постоји ли функција $z(x, y)$ чији је тотални диференцијал $2e^x \sin(x+y)dx + e^x[e^{y-x} + \sin(x+y) + \cos(x+y)]dy$? Одредити је ако постоји.

19. Наћи интеграциони фактор једначине $y(4x-3y-3)dx - x(4x-3y-4)dy = 0$, ако је познато да је он облика $\mu(x, y) = x^2 f(y)$.

20. Наћи интеграциони фактор једначине $(x+y^2)dx - 2xydy$, ако је познато да он има облик $\mu(x, y) = \lambda(x)$. Уз помоћ њега решити наведену једначину.

21. Одредити диференцијалну једначину чије је опште решење (а) $xe^y + ye^x = C$, (б) $y = Cx^3 + C^3x$.

22. Наћи ортогоналне трајекторије фамилије парабола $x^2 + 1 = ky$ $(k \in \mathbb{R})$.

23. Наћи ортогоналну трајекторију на фамилију кривих $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$ $(C \in \mathbb{R})$ која пролази кроз тачку $(4, 1)$.

24. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = \frac{x+k}{x-k}$ $(k \in \mathbb{R})$. Затим наћи ортогоналну трајекторију фамилије кривих $y = \frac{x+k}{x-k}$ која пролази кроз тачку $(1, 0)$.

25. Наћи (а) ортогоналне трајекторије; (б) изогоналне трајекторије под углом $45°$ фамилије кривих $y = \sin(x+C)$.

6. Решења

1. Ово је једначина са раздвојеним промењљивим. Заиста, $\frac{dy}{dx} = 1 - y - 2y^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{1-y-2y^2}$. Интеграција обе стране даје
$$x = \int \frac{dy}{1-y-2y^2} = \int \left(\frac{1}{3(1+y)} + \frac{2}{3(1-2y)} \right) dy = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+y}{1-2y} \right| + C_1.$$
Добијено решење се може средити: $e^{3x} = C\frac{1+y}{1-2y}$, где је $C = e^{3C_1}\operatorname{sgn}\frac{1+y}{1-2y}$, и најзад $y = \frac{e^{3x}-C}{2e^{3x}+C}$.
<u>*Питање за размишљање:*</u> Где се овде уклапају константна решења $y \equiv -1$ и $y \equiv \frac{1}{2}$?

2. Ако једначину запишемо као $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}$, видимо да је то једначина са раздвојеним промењљивим: $\frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{e^x}$. Интеграцијом добијамо $e^{-y} = C + e^{-x}$, тј. $y = -\ln(C + e^{-x})$.

3. Дата једначина је хомогена: ако ставимо $\frac{y}{x} = z$, онда $y' = z^2 + z + 1$ зависи само од z. Тако се сменом $y = xz$ и $y' = xz' + z$ она своди на
$$xz' + z = z^2 + z + 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{dz}{z^2+1} = \frac{dx}{x}.$$
Интеграцијом добијамо $\operatorname{arctg} z = \ln|x| + C$, што даје $y = x \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$.
Додатни услов $y(\frac{1}{2}) = 0$ нам одређује константу C. Заменом $x = \frac{1}{2}$ и $y = 0$ у добијени израз за y добијамо $0 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\ln\frac{1}{2} + C)$; одатле је $C = \ln 2$, те је $y = x \operatorname{tg} \ln|2x|$.

4. Ово је хомогена једначина $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$. Сменом $y = xz$ и $y' = xz' + z$ своди се на $xz' = \sin z$, тј. $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$. Пошто је
$$\int \frac{dz}{\sin z} = \left| \begin{matrix} t = \cos y \\ dt = -\sin y\, dy \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\cos^2 z}{2\sin^2 z} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right|,$$
интеграцијом добијамо $\ln|\operatorname{tg}\frac{z}{2}| = \ln|x| + C_1$, тј. $y = 2x \operatorname{arctg}(Cx)$.
<u>*Питање.*</u> Да ли и избор $C = \infty$ даје решење једначине?

5. Дата једначина је хомогена. Заменом $y = xz$ добијамо једначину $xz' = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z}$, а одатле $\int \frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}dz = C + \int \frac{dx}{x}$. Интеграл с леве стране се може решити сменом $t = \arcsin z$, чиме се он своди на $\int(1+\sin t)dt = t - \cos t = \arcsin z - \sqrt{1-z^2}$. Следи да је
$$\arcsin\frac{y}{x} - \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} = C + \ln|x|.$$
Ако је $y(1) = 1$, заменом $x = y = 1$ добијамо $C = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

6. Ако уведемо смене $\bar{y} = y + b$ и $\bar{x} = x + a$, онда је $dy = d\bar{y}$ и $dx = d\bar{x}$, па тако имамо хомогену једначину $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\frac{\bar{y}}{\bar{x}})$. Она се решава сменом $\bar{y} = z \cdot \bar{x}$, тј. $y + b = z(x+a)$.

7. Потражимо смену попут оне из претходног задатка: $\bar{x} = x + a$ и $\bar{y} = y + b$ за неке константе a и b. Имамо
$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = y' = \frac{2x+y-2}{x+2y+1} = \frac{2\bar{x}+\bar{y}-(2a+b+2)}{\bar{x}+2\bar{y}+(1-a-2b)}.$$
Подесимо зато a и b тако да буде $2a+b+2 = 1-a-2b = 0$. Добијамо $a = -\frac{5}{3}$ и $b = \frac{4}{3}$. Полазна једначина постаје $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{2\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}+2\bar{y}}$. Сменом $\bar{y} = z \cdot \bar{x}$ добићемо $\bar{x}\frac{dz}{d\bar{x}} = \frac{z+2}{2z+1} - z$, што се своди на
$$\frac{2z+1}{z^2-1}dz = -\frac{2d\bar{x}}{\bar{x}}.$$
Интеграција даје $\frac{3}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\ln|z+1| = -2\ln|\bar{x}| + \text{const}$, што се може записати и као $\bar{x}^4(z+1)(z-1)^3 = C$, тј. $(y+x-\frac{1}{3})(y-x+3)^3 = C$.

8. Ово је линеарна диференцијална једначина у којој је $P(x) = -1$ и $Q(x) = \sin 2x$. По формули (2) је
$$y_0 = e^{-\int P(x)dx} = e^x \quad \text{и} \quad y = y_0\big(C + \int y_0^{-1}Q(x)dx\big) = e^x\big(C + \int e^{-x}\sin 2x\,dx\big).$$
Сада $I(x) = \int e^{-x}\sin 2x dx$ рачунамо парцијалном интеграцијом: уз $J(x) = \int e^{-x}\cos 2x dx$ имамо
$$I(x) = \left|\begin{smallmatrix} u=\sin 2x & dv=e^{-x} \\ du=2\cos 2x dx & v=-e^{-x}\end{smallmatrix}\right| = -e^{-x}\sin 2x + 2J(x) = \left|\begin{smallmatrix} u=\cos 2x & dv=e^{-x} \\ du=-2\sin 2x dx & v=-e^{-x}\end{smallmatrix}\right| = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4I(x),$$
одакле је $I(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x - \frac{2}{5}e^{-x}\cos 2x$. Дакле, $y = Ce^x - \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$.

9. Ово је линеарна једначина $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{x+1}{x}$; у њој је $P(x) = -\frac{1}{x+1}$ и $Q(x) = \frac{x+1}{x}$, па је по формули (2) опште решење
$$y = e^{\int \frac{dx}{x+1}}\left(C + \int \frac{x+1}{x}e^{-\int\frac{dx}{x+1}}dx\right) = (x+1)(C + \ln x).$$
Ако је $y(0) = 2$, онда имамо $y = 0 = (1+1)(C + \ln 1)$, тј. $C = 0$, па добијамо $y = (x+1)\ln x$.

10. Опет користимо формулу (2). Овде је $P(x) = \sin x$, $Q(x) = 2x^3\cos x^2 e^{\cos x}$ и $y_0 = e^{\cos x}$, па имамо
$$y = e^{\cos x}\left(C + \int 2x^3\cos x^2 dx\right)dx = \left|\begin{smallmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx\end{smallmatrix}\right| = e^{\cos x}\left(C + \int t\cos t\,dt\right).$$
Преостали интеграл рачунамо парцијалном интеграцијом:
$$\int t\cos t\,dt = \left|\begin{smallmatrix} u=t & v=\sin t \\ du=dt & dv=\cos t dt\end{smallmatrix}\right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = t\sin t + \cos t = x^2\sin x^2 + \cos x^2,$$
чиме смо добили коначно решење: $y = e^{\cos x}(C + x^2\sin x^2 + \cos x^2)$.

11. Ако дату једначину запишемо као
$$\frac{dy}{dx}\cdot(x+e^y) = 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{dx}{dy} = x + e^y,$$
препознајемо линеарну једначину, али овде је x *функција*, а y *променљива*. Како је $P(y) = -1$ и $Q(y) = e^y$, по формули (2) њено опште решење је $x = e^y(y+C)$. Почетни услов $y(0) = -2$ нам даје $C = 2$, тј.
$$x = e^y(y+2).$$
Заменом $x = 2$ добијамо $2e^{-y} = y + 2$. У овој једначини лева страна опада, а десна расте, па она може имати највише једно решење y, а то решење лако погодимо: $y = y(2) = 0$.

12. Ово је Бернулијева једначина $y' = y\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}y^4$ у којој је $k = 4$, па по (4) уводимо смену $y = z^{\frac{1}{1-k}} = z^{-\frac{1}{3}}$. Добијамо линеарну једначину

$$z' + 3z\operatorname{tg} x = -\frac{3}{\cos x}$$

у којој је $P(x) = 3\operatorname{tg} x$ и $Q(x) = -\frac{3}{\cos x}$, па по формули (2) добијамо $y_0 = e^{-3\int P(x)\,dx} = \cos^3 x$ и $z = \cos^3 x\left(C - 3\int\frac{dx}{\cos^4 x}\right)$. Остаје само да се израчуна

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x} = \left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right| = \int(1+t^2)dt = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + \text{const.}$$

Најзад добијамо $z = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x$ и $y = \left(C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x\right)^{-1/3}$.

13. Ово је Бернулијева једначина у којој је $k = \frac{1}{2}$. На основу (4), њу сменом $y = z^2$ сводимо на линеарну, $z' = -\frac{1}{x}\cdot z + \frac{1}{2}\sin x$, и решавамо по формули (2):

$$z = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(C + \frac{1}{2}\int\sin x e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right) = -\frac{1}{x}\left(C + \frac{1}{2}\int x\sin x\,dx\right) = -\frac{C}{x} - \frac{\sin x}{2x} + \frac{\cos x}{2}.$$

Следи да је $y = \left(-\frac{C}{x} - \frac{\sin x}{2x} + \frac{\cos x}{2}\right)^2$, а из услова $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}$ налазимо $2C+1 = \pm 2$, тј. $C \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$.

14. Ако једначину запишемо као

$$(x^2y+1)x\cdot\frac{dy}{dx} = -2y, \quad \text{тј.} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{(x^2y+1)x}{2y} = -\frac{1}{2y}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^3,$$

препознајемо Бернулијеву једначину по $x = x(y)$ у којој је $k = 3$. Сменом $x = z^{-\frac{1}{2}}$ сводимо је на линеарну, $z' - \frac{1}{y}\cdot z = 1$, коју решавамо по формули (2). Налазимо $x^{-2} = z = y(C + \ln|y|)$. Заменом $y(1) = 2$ налазимо $C = \frac{1}{2} - \ln 2$, те добијамо решење у облику $x^2y\left(\frac{1}{2} + \ln|\frac{y}{2}|\right) = 1$.

15. Диференцирањем једнакости $e^z = y - e^x$ добијамо $e^z z' = y' - e^x$. Тако дата једначина постаје линеарна:

$$y' - \cancel{e^x} = \frac{y \cancel{- e^x - xe^x} + 1}{x+1}, \quad \text{тј.} \quad y' = \frac{y+1}{x+1}.$$

Њено опште решење је $y = C(x+1) - 1$, одакле налазимо и $z = \ln\left(C(x+1) - 1 - e^x\right)$.

16. Ако је $y = \ln z$, онда је $e^y = z$ и $y' = \frac{z'}{z}$, те дата једначина постаје Бернулијева:

$$(x+x^2)z' - z = -xz^2.$$

Сменом $z = u^{-1}$ добијамо линеарну једначину $u' + \frac{1}{x+x^2}u = \frac{1}{x+1}$, чије је решење по формули (2) $u = |\frac{x+1}{x}|(C + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1})$. Како је $u = e^{-y}$, следи

$$y = \ln|x| - \ln\left|1 + (x{+}1)(C + \ln|x{+}1|)\right|.$$

17. (а) Сменом $y = \frac{1}{z}$ и $y' = -\frac{z'}{z^2}$ дату једначину сводимо на хомогену: $-z' = a + b(\frac{z}{x})^2$

(б) Ставимо $e^{-y} = z$, тј. $y = -\ln z$ и $y' = -\frac{z'}{z}$. Множењем са z добијамо линеарну једначину $z' = -q(x)z - p(x)$.

18. Овде је $A = 2e^x\sin(x+y)$ и $B = e^y + e^x(\sin(x+y) + \cos(x+y))$, и заиста је $A'_y = B'_x = 2e^x\cos(x+y)$, што потврђује да функција z постоји. Сада добијамо редом

$$z'_x = A \quad\Rightarrow\quad z = \int A\,dx = 2\int e^x\sin(x{+}y)\,dx = e^x\left(\sin(x{+}y) - \cos(x{+}y)\right) + E(y) \quad\Rightarrow$$
$$z'_y = e^x\left(\cos(x{+}y) + \sin(x{+}y)\right) + E'(y) = B \quad\Rightarrow\quad E'(y) = e^y.$$

одавде следи да је $E(y) = e^y + C$, тако да је $z = e^x\left(\sin(x{+}y) - \cos(x{+}y)\right) + e^y + C$.

19. Испитајмо под којим условом је $Adx + Bdy$ потпуни диференцијал, где су $A = x^2y(4x{-}3y{-}3)f(y)$ и $B = -x^3(4x{-}3y{-}4)f(y)$: важи

$$A'_y = x^2y(4x-3y-3)f'(y) + x^2(4x-6y-3)f(y),$$
$$B'_x = x^2(-16x+9y+12)f(y),$$

па се услов $A'_y = B'_x$ своди на $x^2y(4x{-}3y{-}3)f'(y) + 5x^2(4x{-}3y{-}3)f(y) = 0$, тј. $yf'(y) + 5f(y) = 0$, чије је решење $f(y) = Cy^{-5}$. Према томе, $\mu(x,y) = x^2y^{-5}$ је интеграциони фактор.

20. Једначина $A\,dx + B\,dy$, где су $A = (x+y^2)\lambda(x)$ и $B = -2xy\lambda(x)$, је потпуни диференцијал ако важи

$$A'_y = B'_x, \quad \text{тј.} \quad 2y\lambda(x) = -2y\lambda(x) - 2xy\lambda'(x).$$

Добили смо диференцијалну једначину $2\lambda(x) + x\lambda'(x) = 0$ чије је опште решење $\lambda(x) = \frac{C}{x^2}$. Множењем са $\lambda(x) = \frac{1}{x^2}$ дата једначина постаје једначина потпуног диференцијала, тј.

$$dz = \frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0.$$

Одредимо функцију z: из $z'_x = \frac{x+y^2}{x^2}$ следи $z = \int \frac{x+y^2}{x^2}dx = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + E(y)$. Затим из услова $z'_y = -\frac{2y}{x} + E'(y)$ налазимо $E'(y) = 0$, тј. $E(y) = C = \text{const.}$

Следи да је $\ln|x| - \frac{y^2}{x} + C = 0$ за неку константу C, што нам даје опште решење $y^2 = x(C + \ln|x|)$.

21. (а) Диференцирање по x даје $e^y + ye^x + y'e^x = C' = 0$, тј. $y' = -y - e^{y-x}$.

(б) Диференцирање даје $y' = 3Cx^2 + C^3$, па враћањем $C^3 = y' - 3Cx^2$ у полазну једначину добијамо $y = Cx^3 + (y' - 3Cx^2)x$, одакле изражавамо $C = \frac{xy'-y}{2x^3}$. Сада полазна једначина постаје

$$y = Cx^3 + C^3x = \frac{xy'-y}{2} + \frac{(xy'-y)^3}{8x^8}.$$

22. Диференцијалну једначину дате фамилије кривих налазимо диференцирањем константе $k = \frac{x^2+1}{y}$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+1}{y}\right) = \frac{2xy - (x^2+1)y'}{y^2}, \quad \text{дакле} \quad y' = \frac{2xy}{x^2+1}.$$

По (7), диференцијална једначина ортогоналних трајекторија је $-\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{x^2+1}$. То је једначина са раздвојеним променљивим $-\frac{(x^2+1)dx}{x} = 2ydy$, чијом интеграцијом добијамо $y^2 = C - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$.

23. Диференцијалну једначину дате фамилије кривих добијамо диференцирањем константе C: $0 = \frac{\partial}{\partial x}\big(\sqrt{y} - \sqrt{x}\big) = \frac{y'}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, тј. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. Ортогоналне трајекторије тада описује једначина

$$-\frac{1}{y'} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\,dx + \sqrt{y}\,dy = 0.$$

Интеграцијом добијамо једначину трајекторија: $x^{3/2} + y^{3/2} = C_1$. Константу C_1 налазимо из припадности тачке $(4,1)$: $C_1 = 4^{3/2} + 1^{3/2} = 9$.

24. Нађимо диференцијалну једначину која описује дате криве. Из $x + k = y(x-k)$ изражавамо $k = \frac{xy-x}{y+1}$, па диференцирање даје

$$0 = \frac{(xy' + y - 1)(y+1) - (xy-x)y'}{(y+1)^2} = \frac{2xy' + y^2 - 1}{(y+1)^2} \quad \text{и одатле} \quad 2xy' + y^2 - 1 = 0.$$

Ортогоналне трајекторије описује једначина $-\frac{2x}{y'} + y^2 - 1 = 0$, тј. $2x\,dx = (y^2-1)\,dy$, одакле је

$$x^2 = \int 2xdx = \int (y^2-1)dy = \frac{1}{3}y^3 - y + C.$$

Заменом $(x,y) = (1,0)$ добијамо $C = 1$, па је тражена ортогонална трајекторија $x^2 = \frac{1}{3}y^3 - y + 1$.

25. Нађимо прво диференцијалну једначину која одређује ове криве: како је $y' = \cos(x+C)$, имамо

$$y'^2 + y^2 = \sin^2(x+C) + \cos^2(x+C) = 1, \quad \text{тј.} \quad y' = \pm\sqrt{1-y^2}.$$

(а) Ортогоналне трајекторије задовољавају једначину $\frac{1}{y'} = \pm\sqrt{1-y^2}$, тј. $\pm dx = \sqrt{1-y^2}\,dy$. Интеграцијом налазимо

$$\pm 2x = y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y.$$

(б) По (8), изогоналне трајекторије под углом 45° задовољавају једначину $\frac{1+y'}{1-y'} = \pm\sqrt{1-y^2}$. Из ње налазимо $\frac{(\sqrt{1-y^2}\pm 1)dy}{\sqrt{1-y^2}\mp 1} = dx$, одакле интеграцијом добијамо $x = y + \frac{2}{y} \pm 2\big(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} + \arcsin y\big) + C$.