

MATEMATIKA 2

Lekcija 9- Jednačine totalnog diferencijala

Jednačina

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

naziva se jednačina totalnog diferencijala ako je leva strana totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y , tj.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

uaga (1) $\int du = \int 0$
 $u = C$
 o.p.

Ako je tako, onda je $u(x, y) = C$ opšte rešenje jednačine (1).

Teorema. Pretpostavimo da funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode po y i x , respektivno, u nekoj prostopovezanoj oblasti D xy -ravni. Potreban i dovoljan uslov da leva strana jednačine (1) bude totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y , jeste da važi jednakost

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

u svakoj tački oblasti D .

Napomena. Ako je za funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ ispunjeno (2), onda je

$$u(x, y) = C$$

opšte rešenje jednačine (1), gde je C proizvoljna konstanta, a funkcija $u(x, y)$ se nalazi po formuli

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy. \quad (3)$$

Primer 1. Proverimo da li je jednačina

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0 \quad (4)$$

jednačina totalnog diferencijala, i nađimo njeno opšte rešenje.

Rešenje. Ovde je $M(x, y) = e^{-y}$ i $N(x, y) = -(2y + xe^{-y})$, pa je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}, \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

- Bore je
 uzetu
 uauheme
 fopmure.
 Bugeu kako
 se puyabaz
 upmure
 uje sam
 gojaa (Hauicam
 myuon).

1A | 17.1.1 Наћи општа решења једначина

a) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$

b) $y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0.$

Решење:

a) $M = x^3 + 3xy^2$

$N = y^3 + 3x^2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial N}{\partial x}$

на једн. изг (a) јесу једн.

потпуно
диференцијална,

изг.

$Mdx + Ndy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

Изједначавамо изразе који стоје уз dx , изг. dy

$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \right\}$

Решавамо овај систем
парцијалних диференцијалних
једначина првог реда
(линеарних)

$u = (x^3 + 3xy^2)x$

$\int du = \int (x^3 + 3xy^2) dx$

$u = \int x^3 dx + 3y^2 \int x dx + \varphi(y)$

константна
у односу
функције
која зависи
само y

$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y)$

убацимо

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y) \right) = y^3 + 3x^2y$

$\cancel{3x^2y} + \varphi'(y) = y^3 + \cancel{3x^2y}$

$\frac{d\varphi}{dy} = y^3$

$\int d\varphi = \int y^3 dy$

убацимо

$\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + C_1$

O.P.

$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C_1 = C_2$

$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C$

(где $C = C_2 - C_1$)

б) Решење $x^2 = C$ (сачи)

ПР. 2.

Од две криве кривих задатих
диференцијалном једначином
 $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1+\sqrt{x^2+y^2})y dy = 0$

избавимо ову која пролази кроз тачку $(0,1)$.

Решење:

Правимо прво О.Р. (фамију кривих која
залежи од произвољне константе C .)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1+x\sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = (-1+\sqrt{x^2+y^2})y \end{cases}$$

$$\rightarrow \int du = \int (1+x\sqrt{x^2+y^2}) dx$$

$$u = x + \int x\sqrt{x^2+y^2} dx + \varphi(y)$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$2x dx = dt$$

$$x dx = \frac{dt}{2} \quad (y = \text{const})$$

$$u = x + \frac{1}{2} \int t^{1/2} dt + \varphi(y)$$

$$u = x + \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} + \varphi(y)$$

избавимо

$$u = x + \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{3/2} + \varphi(y)$$

$$\frac{1}{2} (x^2+y^2)^{1/2} \cdot 2y + \varphi'(y) = -y + y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi'(y) = -y$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -y$$

$$\int d\varphi = \int -y dy$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

О.Р.

$$x + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C$$

$$(C = C_2 - C_1)$$

Од две криве избавимо
ову која пролази
кроз тачку
 $(0,1)$, тј.

субституирамо у О.Р.

$x=0, y=1$ и
једначину C .

Имамо

$$0 + \frac{1}{3} \sqrt{(0^2+1^2)^3} - \frac{1^2}{2} = C$$

$$C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Зачим смо
ПАРТИКУЛАРНО
РЕШЕЊЕ

$$x + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{6}$$

tj., (4) je jednačina totalnog diferencijala. Prema formuli (3), nalazimo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int e^{-y} dx + \int \left[-(2y + xe^{-y}) - \frac{\partial}{\partial y} \int e^{-y} dx \right] dy \\ &= e^{-y} x + \int \left[-(2y + xe^{-y}) - \frac{\partial}{\partial y} (xe^{-y}) \right] dy \\ &= e^{-y} x + \int (-2y - xe^{-y} + xe^{-y}) dy \\ &= e^{-y} x - y^2. \end{aligned}$$

Znači, $e^{-y}x - y^2 = C$ je opšte rešenje jednačine (4).

Primer 2. Dokažimo da je jednačina sa razdvojenim promenljivima jednačina totalnog diferencijala.

Rešenje. Neka je $P(x)dx = Q(y)dy$ jednačina sa razdvojenim promenljivima. Ona je ekvivalentna jednačini

$$P(x)dx + [-Q(y)]dy = 0, \quad (5)$$

a to je jedna jednačina oblika (1). ($M(x, y) = P(x)$, $N(x, y) = -Q(y)$.) Kako je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (-Q)}{\partial x} = 0,$$

to je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, odakle, prema Teoremi, sledi da je leva strana jednačine (5) totalni diferencijal funkcije u dveju nezavisno promenljivih x i y .

Integracioni množilac. Ako jednačina (1) nije jednačina totalnog diferencijala, tada je moguće potražiti funkciju $\lambda(x, y)$ tako da jednačina

$$\lambda(x, y) M(x, y) dx + \lambda(x, y) N(x, y) dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Takva funkcija se zove integracioni faktor ili integracioni množilac. Prema Teoremi, uslov za to je

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$M \frac{\partial \lambda}{\partial y} - N \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \lambda = 0. \quad (6)$$

Znači, ako je funkcija λ integracioni množilac diferencijalne jednačine (1) tada ta funkcija zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (6). Lako je

integracioni
faktor

videti da važi i obrnuto. Time se problem rešavanja jednačine (1) svodi na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine (6). Međutim, u opštem slučaju teže je rešiti jednačinu (6) nego jednačinu (1). Zato se najčešće postupa tako što se pokušava odrediti funkcija λ u nekom specijalnom obliku, na primer, $\lambda = \lambda(x)$, $\lambda = \lambda(y)$ ili $\lambda = \lambda(xy)$.

Potražimo integracioni množilac u obliku $\lambda = \lambda(\mu)$, gde je $\mu = \mu(x, y)$ poznata funkcija. Jednačina (6) tako postaje

$$\left(M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \lambda'(\mu) + \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \lambda(\mu) \right] = 0$$

ili

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x}}. \quad (7)$$

Ako se funkcija na desnoj strani jednačine (7) može prikazati kao funkcija promenljive μ , tj., ako je

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x}} = G(\mu),$$

onda jednačina (7) predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda u odnosu na nepoznatu funkciju $\lambda = \lambda(\mu)$, koja razdvaja promenljive i čiji je oblik

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = G(\mu) d\mu.$$

Jedno rešenje te jednačine je funkcija $\lambda(\mu) = e^{\int G(\mu) d\mu}$.

Specijalno, diferencijalna jednačina (1) ima integracioni faktor koji zavisi samo od promenljive x ($\mu(x, y) = x$), odnosno samo od promenljive y ($\mu(x, y) = y$), ako postoji funkcija G jedne nezavisno promenljive, takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = G(x),$$

(i tada je $\lambda(x) = e^{\int G(x) dx}$), odnosno takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = G(y),$$

(i tada je $\lambda(y) = e^{\int G(y) dy}$).

Ortogonalne i izogonalne trajektorije. U nekim primenama često se javlja sledeći problem: ako je data familija krivih $\Phi(x, y, C) = 0$ u xy -ravni,

3A

Пр.

Наћи о.р. (рекурент) $\mathcal{H}$

$$\underbrace{y(2x-y+2)}_{M_1} dx + \underbrace{2(x-y)}_{N_1} dy = 0.$$

Регулар.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy - y^2 + 2y) = 2x - 2y + 2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2 \neq \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и ошче не изражај}$$

Испробамо истражити фактор λ облику $\lambda = \lambda(x)$
или $\lambda = \lambda(y)$ (убеи по прво протано)

Да ли је $\lambda = \lambda(x)$? Да ли је

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = G(x) \quad (\text{функција од } x)$$

||

$$\frac{2x - 2y + 2 - 2}{2(x-y)} = \frac{2(x-y)}{2(x-y)} = 1$$

Знам $G(x) = 1$, решење функција од x

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int dx$$

$$\ln \lambda = x + \tilde{C} = 0 \quad (\text{дупано} \\ \text{и ајјеноу обрнуто} \\ \text{израј})$$

$$\boxed{\lambda = e^x}$$

испитујемо постоји
једнакост са e^x , годубено

$$\underbrace{e^x \cdot y(2x-y+2)}_{M_1} dx + \underbrace{2e^x(x-y)}_{N_1} dy = 0$$

Обо мора бити решење постоји
диференцијала, иј. $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ (пошто
проверити)

$$\text{О.Р.} \quad \boxed{y e^x (2x-y) = C} \quad (\text{сави})$$

Показати да једначина

$$(*) \quad (x+2y)dx + y dy = 0$$

има интегралног фактора облика

$\lambda = \lambda(x+y)$ и дакле њен општи интеграл.

Решение,

$$\mu = x+y, \quad \lambda = \lambda(\mu) = \lambda(x+y)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = x+2y \\ N = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \mu}{\partial x} = 2 \neq 0 = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ па једначина } (*) \\ \text{није једначина потпуног} \\ \text{диференцијала} \end{array}$$

$$G(\mu) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} - N \frac{\partial \mu}{\partial y}} = \frac{-2}{x+2y-y} = -\frac{2}{x+y} = -\frac{2}{\mu}$$

$$(7) \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2}{\mu} d\mu$$

$$\ln x = -2 \ln \mu$$

$$\lambda = \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \quad \text{и.т.т., факт.}$$

Помноживо са њим једн. (*), добијемо

$$\frac{x+2y}{(x+y)^2} dx + \frac{y}{(x+y)^2} dy = 0$$

Ово јесу једн. потпуног диференцијала

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \end{array} \right. \rightarrow \int d\mu = \int \frac{y}{(x+y)^2} dy, \quad \mu = \int \frac{(y+x)+x}{(x+y)^2} dy$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{x+y}{(x+y)^2} + \psi'(x) = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \quad \text{а.р.}$$

$$\psi'(x) = 0 \quad \psi(x) = C_1$$

$$\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} = C$$

naći drugu familiju krivih $\Psi(x, y, C) = 0$, tako da svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x, y, C) = 0$ pod pravim uglom. Tada se familija krivih $\Psi(x, y, C) = 0$ zove familija ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Analitički, to znači sledeće. Ako je $F(x, y, y') = 0$ diferencijalna jednačina familije krivih $\Phi(x, y, C) = 0$, onda diferencijalna jednačina ortogonalnih trajektorija te familije ima oblik

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

jer uslov normalnosti tangenti sa koeficijentima pravca k_1 i k_2 glasi: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Da zaključimo: ako želimo da nađemo ortogonalne trajektorije familije $\Phi(x, y, C) = 0$, najpre nađemo njenu diferencijalnu jednačinu $F(x, y, y') = 0$ i u njoj y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$. Integraljenjem tako dobijene diferencijalne jednačine

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

dobijamo familiju ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Primer 3. Nađimo ortogonalne trajektorije familije krugova sa centrom u koordinatnom početku:

$$x^2 + y^2 = C. \quad (8)$$

Rešenje. Najpre nađimo diferencijalnu jednačinu familije krugova. Diferenciranjem jednačine (8) dobijamo

$$2x + 2yy' = 0, \quad \text{tj.} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

To je diferencijalna jednačina familije krugova. Ako u toj jednačini y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$, dobijemo

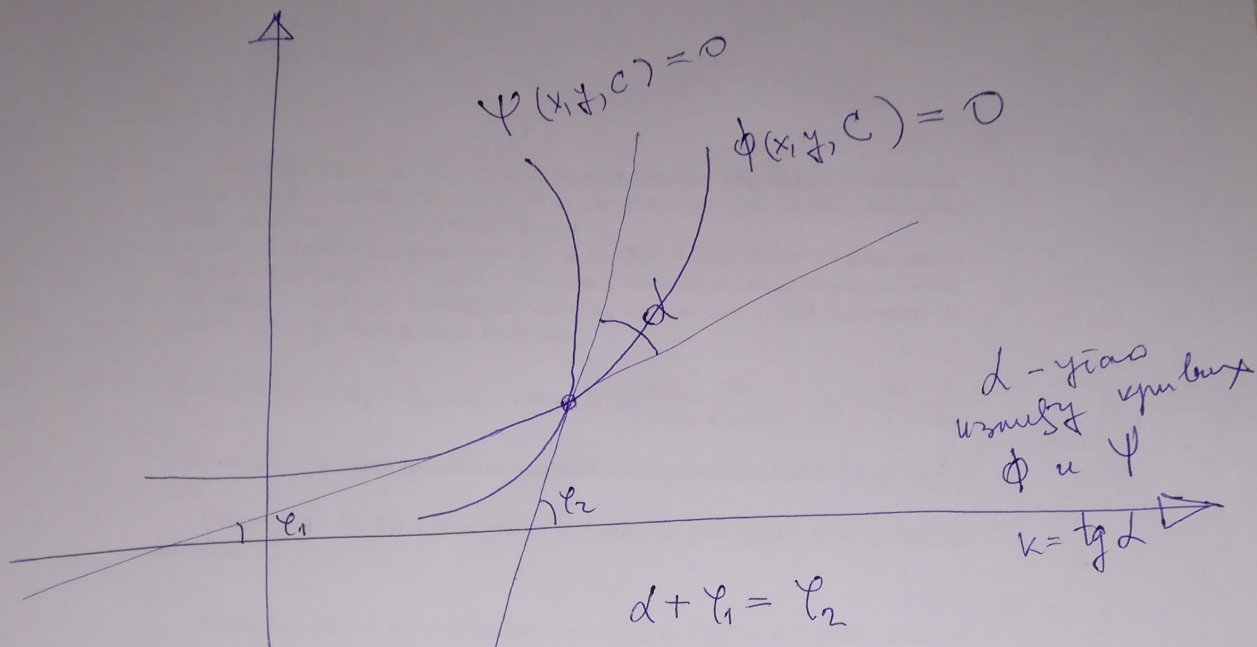
$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}, \quad \text{odnosno} \quad y' = \frac{y}{x},$$

što je diferencijalna jednačina tražene familije ortogonalnih trajektorija. Njenim rešavanjem, nalazimo

$$y = Cx \quad (x \neq 0).$$

Ovo je familija ortogonalnih trajektorija familije (8).

4A



α - угол
измеряемый
между ϕ и ψ

$$\alpha + \gamma_1 = \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \alpha$$

$$\tan \gamma_1 = \frac{\tan \gamma_2 - \tan \alpha}{1 + \tan \gamma_2 \cdot \tan \alpha} =$$

$$k_1 = \frac{k_2 - k}{1 + k_1 k_2}$$

Familija krivih $\Psi(x, y, C) = 0$ zove se familija izogonalnih trajektorija pod uglom α familije $\Phi(x, y, C) = 0$, ako svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x, y, C) = 0$ pod uglom $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Ugao između ma koje krive L_C iz familije $\Phi(x, y, C) = 0$ i neke izogonalne trajektorije L u njihovoj presečnoj tački M smatra se orijentisanim od tangente krive L_C ka tangenti krive L , a merni broj α ugla α je takav da je $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Na taj način se dobija

$$\alpha + \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 - \alpha, \quad \tan \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_2 - \tan \alpha}{1 + \tan \varphi_2 \tan \alpha}, \quad k_1 = \frac{k_2 - k}{1 + k k_2},$$

tako da diferencijalna jednačina izogonalnih trajektorija glasi $F\left(x, y, \frac{y'-k}{1+k y'}\right) = 0$.

Primer 4. Nađimo izogonalne trajektorije pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{4}$ familije krugova

$$x^2 + y^2 = C.$$

Rešenje. Ako u diferencijalnoj jednačini $x + y y' = 0$ familije krugova, y' zamenimo sa $\frac{y'-1}{1+y'}$ (jer je $\tan \frac{\pi}{4} = 1$), dobijemo diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{y-x}{y+x}$. To je diferencijalna jednačina familije izogonalnih trajektorija pod uglom $\frac{\pi}{4}$ datih krugova. Nije teško videti da je to jedna homogena diferencijalna jednačina prvog reda i da je njeno opšte rešenje:

$$\ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \arctan \frac{y}{x} = C.$$

Решение примера 4.

$$k = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{y'-1}{1+y'} = -\frac{x}{y}$$

$$y'y - y = -x - xy'$$

$$y'(y+x) = y-x$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctg u = -\ln x + C$$

$$\ln x + \ln \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} + \arctg \frac{y}{x} = C$$

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} + \arctg \frac{y}{x} = C$$

O.p.

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

константа

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

$$u = \frac{y}{x}, \quad u = u(x)$$

$$y = xu$$

$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = \frac{u-1}{u+1}$$

$$xu' = \frac{u-1}{u+1} - u$$

$$xu' = \frac{u-1-u^2-u}{u+1}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}$$

$$\frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{du}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$$