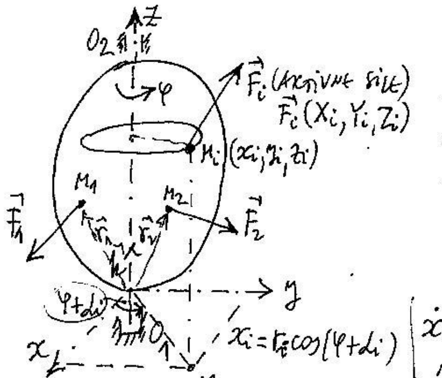


ROTACIJA KRUTOG TELA OKO NEPOMIČNE OSE OZ

POŠTO SISTEM IMA JEDAN STEPEN SLOBODE KRETANJA, NEKA JE GENERA-SANA KOORDINATA UGAO φ T.J. $q_1=\varphi$ PROBLEM MOŽEMO REŠITI I POMO LAGRANŽEVE DIF. JED. II VRSTE:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad (*)$$

$x_i = r_i\cos(\varphi+\alpha_i)$

$y_i = r_i\sin(\varphi+\alpha_i)$

$z_i = \text{const}$

$\left[\begin{matrix}\alpha_i\\ r_i\end{matrix}\right\}\text{const}\Big]$

$$\begin{aligned}\dot x_i &= -r_i\sin(\varphi+\alpha_i)\dot\varphi = -y_i\dot\varphi\\ \dot y_i &= r_i\cos(\varphi+\alpha_i)\dot\varphi = x_i\dot\varphi\\ \dot z_i &= 0\end{aligned} \qquad \left\{\begin{aligned}\delta x_i &= -y_i\,\delta\varphi\\ \delta y_i &= x_i\,\delta\varphi\\ \delta z_i &= 0\end{aligned}\right.$$

$$T = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2 = \lim_{n\to\infty}\sum\frac{1}{2}m_i(\dot x_i^2+\dot y_i^2+\dot z_i^2) = \lim_{n\to\infty}\sum\frac{1}{2}m_i(x_i^2+y_i^2)\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i^2+y_i^2)}_{J_{Oz}}\Big]\dot\varphi^2$$

$$T = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot\varphi^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = J_{Oz}\dot\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = J_{Oz}\ddot\varphi$$

$$\delta A = \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + \cancelto{0}{Z_i\delta z_i} = -X_iy_i\delta\varphi + Y_ix_i\delta\varphi = \sum_{i=1}^{n}(Y_ix_i - X_iy_i)\delta\varphi = M_{Oz}\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{\delta}{\delta\varphi}(A) = M_{Oz} \qquad \Rightarrow \text{JEDNAČINE } (*) \Rightarrow \qquad \boxed{J_{Oz}\ddot\varphi = M_{Oz}} \quad (**)$$

NAPOMENA: IZVELI SMO NA PREDAVANJIMA DIF. JED KRETANJA (**) U DELU VEKTORSKA DINAMIKA (POGLEDATI U SVESKAMA) POMOĆU TEOREME O PROMENI MOMENTA KOLIČINE KRETANJA: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$ (***)
T.J. KADA SMO VEKTORSKU DIF. JED KRETANJA (***) SKALARNO POMNOŽILI JEDINIČNIM VEKTOROM OZ OSE

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \Big/\cdot\vec{k} \;\Rightarrow\; \frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz} \quad (L_{Oz} = J_{Oz}\dot\varphi) \;\Rightarrow\; J_{Oz}\ddot\varphi = M_{Oz}.$$

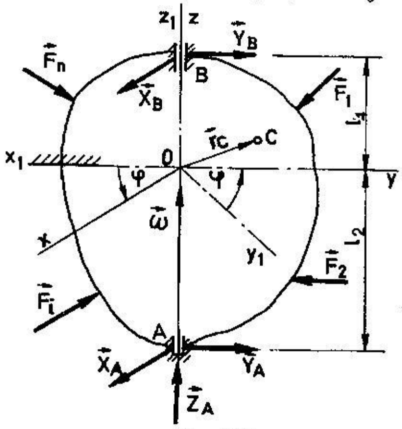
SVE OSTALE JEDNAČINE KOJE SMO TADA IZVELI BI SE SLIČNIM POSTUPKOM (UZ ODGOVARAJUĆI IZBOR GENERALISANIH KOORDINATA) MOGLE DOBITI (IZVESTI) POMOĆU LAGRANŽEVOG FORMALIZMA (LAGRANŽEVE DIF. JED. PRVE I DRUGE VRSTE).

PRILIKA JE DA SE JOŠ JEDNOM PODSETIMO PREDAVANJA (POSLEDNJE PRED PREKID NASTAVE) KOJE JE BILO POSVEĆENO PRIMENI TEOREMA O PROMENI KOLIČINE KRETANJA I MOMENTA KOLIČINE KRETANJA. NA PROBLEM ODREĐIVANJA REAKCIJA VEZA I DIF. JEDNAČINE OBRTANJA KRUTOG TELA OKO NEPOMIČNE OSE. (POGLEDATI U SVESKAMA); KO NIJE BIO NA TOM ČASU MOŽE U PRILOGU NAĆI TO PREDAVANJE ZAJEDNO SA PRIMEROM.

ODOMAĆENO JE NA TEHNIČKIM FAKULTETIMA DA SE OVAJ PROBLEM REŠAVA PRIMENOM "DALAMBEROVOG PRINCIPA", ALI U CILJU HOMOGENIZACIJE DINAMIKE MI SMO OVAJ PROBLEM REŠAVALI "DIREKTNOM" PRIMENOM TEOREMA VEKTORSKE DINAMIKE $\dot{\vec{K}} = \vec{F}_R^s \qquad \dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$
JER SE I U SAMOM "DALAMBEROVOM PRINCIPU" TAKOĐE "POSREDNO" MORAJU KORISTITI OVE VEKTORSKE TEOREME; ŠTO VODI NEPOTREBNOM USLOŽNJAVANJU MATERIJE.

Diferencijalne jednačine obrtanja krutog tela oko nepokretne ose. Reakcije veza.

Obrtanje krůtog tela oko nepokretne ose, kao što je poznato iz kinematike, odredjeno je jednom nezavisnom koordinatom, tj. uglom φ. Ovaj ugao merimo izmedju koordinatnih ravni z_1x_1 i zx (sl. 101), nepokretnog $0x_1y_1z_1$ i pokretnog sistema $0xyz$, od kojih je ovajdrugi vezan za telo, a tačka 0 proizvoljno izabrana na osi obrtanja $0z$, odnosno $0z_1$.



Sl. 101

U ovom slučaju telo je vezano potpornim ležištem A i cilindričnim ležištem B. Saglasno principu oslobadjanja od veza, uticaje veza A i B zamenjujemo reakcijama

$$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k} ,$$

$$\vec{F}_B = X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k} ,$$

gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori osa pokretnog trijedra $0xyz$. Kod reakcije $\vec{F}_B$ pretpostavljamo postojanje i projekcije Z_B radi donošenja odredjenih zaključaka.

Kao što smo videli, kretanje svakog krutog tela opisujemo jednačinama (16.1) i (16.2). Umesto jednačine (16.1) u ovom slučaju ćemo koristiti njoj ekvivalentnu teoremu o promeni količine kretanja sistema. Tako je kretanje opisano jednačinama

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^a + \vec{F}_A + \vec{F}_B \;; \tag{16.4}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^a + \vec{M}_0(\vec{F}_A) + \vec{M}_0(\vec{F}_B). \tag{16.5}$$

Zadatak nam je da odredimo jednačinu kretanja tela i reakcije veza. Zato jednačine (16.4) i (16.5) treba prikazati u vidu skalarnih jednačina. Pri tome vektore $\vec{K}$ i $\vec{L}_0$ odredjujemo preko njihovih projekcija na ose pokretnog sistema 0xyz. Ovo činimo zato jer se u odnosu na pokretni sistem, sistem 0xyz vezan za telo, ne menjaju vrednosti koordinata centra masa i momenata inercije.

Kao što nam je poznato iz kinematike, apsolutni izvod vektora, odredjenog projekcijama na ose pokretnog trijedra, ima dva dela: lokalni i prenosni. Zato su apsolutni izvodi vektora $\vec{K}$ i $\vec{L}_0$:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

i

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{L}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_0$$

tako da jednačine (16.4) i (16.5) pišemo u obliku

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{F}_R^a + \vec{F}_A + \vec{F}_B, \tag{16.6}$$

$$\frac{\tilde{d}\vec{L}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_0 = \vec{M}_0^a + \vec{M}_0(\vec{F}_A) + \vec{M}_0(\vec{F}_B). \tag{16.7}$$

Kako je

$$\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$$

i

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt} = \frac{dK_x}{dt}\vec{i} + \frac{dK_y}{dt}\vec{j} + \frac{dK_z}{dt}\vec{k},$$

a s druge strane je

$$\vec{K} = m\vec{V}_C = m\vec{\omega} \times \vec{r}_C = m\omega_z\vec{k} \times \vec{r}_C = -m\omega_z y_C\vec{i} + m\omega_z x_C\vec{j},$$

to je očevidno

$$\frac{dK_x}{dt} = -m\alpha_z y_C - m\omega_z \cdot \frac{dy_C}{dt} = -m\alpha_z y_C,$$

$$\frac{dK_y}{dt} = m\alpha_z x_C + m\omega_z \frac{dx_C}{dt} = m\alpha_z x_C,$$

$$\frac{dK_z}{dt} = 0,$$

jer je $\dot{x}_C = \dot{y}_C = 0$.

Dalje je

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = \omega_z \vec{k} \times \vec{K} = m\omega_z^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -y_C & x_C & 0 \end{vmatrix} = -m\omega_z^2 x_C \vec{i} - m\omega_z^2 y_C \vec{j}. \tag{16.9}$$

Prema definiciji momenta količine kretanja imamo

$$\vec{L}_0 = \int_V (\vec{r} \times \vec{v})dm = \int_V (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r})dm = \vec{\omega}\int_V (\vec{r} \cdot \vec{r})dm - \int_V \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})dm =$$

$$= \omega_z \vec{k} \int_V (x^2 + y^2 + z^2)dm - \omega_z \int_V (xz\, \vec{i} + yz\, \vec{j} + z^2 \vec{k})\, dm,$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke tela, a $\vec{v}$ njena brzina. Sada je očevidno

$$L_{0x} = -\omega_z \int_V xz\, dm = -\omega_z J_{xz},$$

$$L_{0y} = -\omega_z \int_V yz\, dm = -\omega_z J_{yz},$$

$$L_{0z} = \omega_z \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - z^2)dm = \omega_z J_z,$$

tako da su projekcije lokalnog izvoda vektora $\vec{L}_0$:

$$\frac{dL_{0x}}{dt} = -\alpha_z J_{xz}, \quad \frac{dL_{0y}}{dt} = -\alpha_z J_{yz}, \quad \frac{dL_{0z}}{dt} = \alpha_z J_z. \qquad (16.10)$$

Dalje je

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \omega_z^2 = \omega_z^2 J_{yz} \vec{i} - \omega_z^2 J_{xz} \vec{j}. \qquad (16.11)$$

Pored izvršenih priprema za projiciranje jednačina (16.4) i (16.5), odredimo i momente reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ u odnosu na ose sistema 0xyz. Kako su vektori položaja tačaka A i B

$$\vec{r}_A = -\ell_2 \vec{k}, \qquad \vec{r}_B = +\ell_1 \vec{k},$$

to je

$$\vec{M}_0(\vec{F}_A) = \vec{r}_A \times \vec{F}_A = -\ell_2 \vec{k} \times (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}) = -\ell_2 X_A \vec{j} + \ell_2 Y_A \vec{i},$$

$$\vec{M}_0(\vec{F}_B) = \vec{r}_B \times \vec{F}_B = +\ell_1 \vec{k} \times (X_B \vec{i} + Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k}) = +\ell_1 X_B \vec{j} - \ell_1 Y_B \vec{i}. \qquad (16.12)$$

Imajući u vidu da je $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$ i $\vec{\alpha} = \ddot{\varphi} \vec{k}$, na osnovu dobijenih projekcija (16.8), (16.9), (16.10), (16.11) i (16.12), projekcije jednačina (16.6) i (16.7) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}
-m\ddot{\varphi} y_C - m\dot{\varphi}^2 x_C &= X_R^a + X_A + X_B, \\
m\ddot{\varphi} x_C - m\dot{\varphi}^2 y_C &= Y_R^a + Y_A + Y_B, \\
0 &= Z_R^a + Z_A + Z_B, \\
-\ddot{\varphi} J_{xz} + \dot{\varphi}^2 J_{yz} &= M_{0x}^a - \ell_1 Y_B + \ell_2 Y_A, \\
-\ddot{\varphi} J_{yz} - \dot{\varphi}^2 J_{xz} &= M_{0y}^a + \ell_1 X_B - \ell_2 X_A, \\
J_z \ddot{\varphi} &= M_{0z}^a.
\end{aligned} \qquad (16.13)$$

Izvedene jednačine (16.13) koristimo za opisivanje obrtnog kretanja krutog tela. Prvih pet jednačina služe za odredjivanje nepoznatih reakcija veza, kojih je ukupno šest. Upravo, kako se projekcije Z_A i Z_B javljaju samo u trećoj jednačini, to je očevidno da ležište B mora biti cilindrično, tj. da je $Z_B = 0$. Odredjivanju reakcija prethodi rešavanje šeste jednačine

$$\ddot{\varphi} J_z = M_{0z}^a, \qquad (16.14)$$

koja na desnoj strani ne sadrži nepoznate reakcije veza, već samo glavni moment aktivnih sila u odnosu na osu obrtanja 0z. Ona dozvoljava rešavanje prvog i drugog zadatka dinamike. U slučaju rešavanja drugog zadatka dinamike predstavlja diferencijalnu jednačinu obrtnog kretanja krutog tela oko nepokretne ose i uz date početne uslove odredjuje zakon obrtanja $\varphi = \varphi(t)$.

Napomena: Umesto Dalamberovog principa, svi zadaci ovog tipa mogu se jednako efikasno rešiti i korišćenjem teoreme o kretanju centra mase materijalnog sistema i teoreme o promeni kinetičkog momenta materijalnog sistema:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s,\qquad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{OR}^s. \tag{11}$$

Za kruto telo koje se obrće oko ose Oz, vektor ubrzanja centra mase dat je izrazom:

$$\vec{a}_C = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_C)+\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_C. \tag{12}$$

Pošto je:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k},\ \vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k}, \tag{13}$$

$$\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}, \tag{14}$$

projekcije ubrzanja centra mase krutog tela na ose $Oxyz$ iznose:

$$\begin{Bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_C\omega^2 - y_C\varepsilon \\ -y_C\omega^2 + x_C\varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

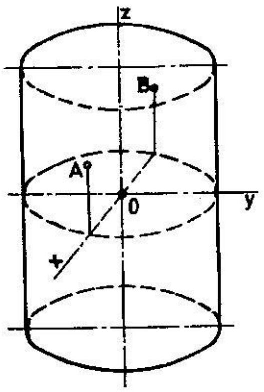
Projekcije izvoda kinetičkog momenta krutog tela $d\vec{L}_O/dt$ koje se obrće oko nepomične ose date su sledećom matričnom relacijom:

$$\begin{Bmatrix} (dL_O/dt)_x \\ (dL_O/dt)_y \\ (dL_O/dt)_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

koja se, uzimajući u obzir (13), svodi na:

$$\begin{Bmatrix} (dL_O/dt)_x \\ (dL_O/dt)_y \\ (dL_O/dt)_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{yz}\omega^2 - J_{xz}\varepsilon \\ -J_{xz}\omega^2 - J_{yz}\varepsilon \\ J_z\varepsilon \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

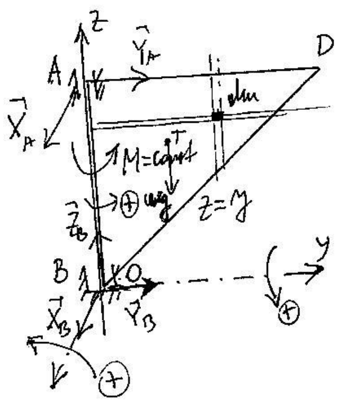
Skalarne jednačine koje slede iz Dalamberovog principa (4,5), uzimanjem u obzir izraza (1), ekvivalentne su jednačinama koje slede iz zakona dinamike (11), uzimanjem u obzir izraza (15) i (17).



Tablica, sastavljena iz aksijalnih i centrifugalnih momenata inercije, oblika

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

zove se <u>tenzor inercije</u> u datoj tački, i predstavlja geometrijsku karakteristiku rasporeda masa sistema u odnosu na tu tačku.



HOMOGENA TANKA PLOČA ABD OBLIKA PRAVOUGLOG TROUGLA ($\overline{AB}=\overline{AD}=R$) POD DEJSTVOM SPREGA SILA MOMENTA M SE MOŽE ROTIRATI OKO KATETE AB; U A JE CILINDRIČNO, A U B SFERNO LEŽIŠTE. ODREDITI:

1) REAKCIJE VEZA U A I B U FUNKCIJI VREMENA;

2) POKAZATI DA KOMPONENTA Y_A NE MOŽE BITI JEDNAKA NULI.

($M=const$)(PLOČA JE MASE m) $\underbrace{\quad}_{T.J.}$ ($x_C=0$ $J_{xz}=0$)

$$-m\ddot{\varphi}y_C - m\dot{\varphi}^2\cancel{x_C} = X_A + X_B \qquad (1) \qquad -m\ddot{\varphi}y_C = X_A + X_B$$

$$m\ddot{\varphi}\cancel{x_C} - m\dot{\varphi}^2 y_C = Y_A + Y_B \qquad (2) \qquad -m\dot{\varphi}^2 y_C = Y_A + Y_B$$

$$0 = Z_B - mg \qquad (3) \qquad Z_B = mg$$

$$-\ddot{\varphi}\cancel{J_{xz}} + \dot{\varphi}^2 J_{yz} = -Y_A R - mg\frac{R}{3} \qquad (4) \qquad J_{yz}\dot{\varphi}^2 = -Y_A R - mg\frac{R}{3}$$

$$-\ddot{\varphi}J_{yz} - \dot{\varphi}^2\cancel{J_{xz}} = X_A R \qquad (5) \qquad -J_{yz}\ddot{\varphi} = X_A R$$

$$J_{Oz}\ddot{\varphi} = M \qquad (6) \qquad \ddot{\varphi} = const$$

IZ (6) SE ODREĐUJE KRETANJE $\ddot{\varphi} = \frac{M}{J_{Oz}}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{M}{J_{Oz}}t + C_1$ (AKO JE $\dot{\varphi}(0)=0 \Rightarrow C_1=0$) $\dot{\varphi} = \frac{M}{J_{Oz}}t$

$\varphi = \frac{M}{2J_{Oz}}t^2 + C_2$ (AKO JE $\varphi(0)=0 \Rightarrow C_2=0$) $\varphi = \frac{M}{2J_{Oz}}t^2$

$$J_{Oz} = \sigma\iint_A y^2\,dA = \frac{2m}{R^2}\int_0^R\left(\int_{z=y}^R y^2\,dy\right)dz = \frac{mR^2}{6}$$

$$J_{yz} = \sigma\iint_A yz\,dy\,dz = \frac{2m}{R^2}\int_0^R\left(\int_{z=y}^R yz\,dy\right)dz = \frac{mR^2}{4}$$

$(5) \Rightarrow \quad X_A = -\frac{J_{yz}}{R}\ddot{\varphi} \Rightarrow \quad X_A = -\frac{3}{2}\frac{M}{R} \qquad (1) \Rightarrow \quad X_B = -\frac{M}{2R}$

$(4) \Rightarrow \quad Y_A = -\frac{mg}{3} - \frac{J_{yz}\dot{\varphi}^2}{R} \Rightarrow \quad Y_A = -\frac{mg}{3} - \frac{9M^2t^2}{mR^3} \qquad (*)$

$(2) \Rightarrow \quad Y_B = -m\dot{\varphi}^2 y_C - Y_A \Rightarrow \quad Y_B =$ (IZRAČUNATI U $f(t)$)

$[\,Y_A \neq 0 \ \forall t\,] \Leftarrow \quad (*) \quad t = \sqrt{-\frac{m^2gR^3}{27M^2}}$ T.J. $t = k(i)$ NE POSTOJI t_* KOJE BI ČINILO DA JEDNAČINA (*) BUDE NULA.

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: ZA VEŽBU UZETI ISTU PLOČU SAMO NEKA JE $M=0$ T.J. NEKA **SE** PLOČA ROTIRA KONSTANTNOM UGAONOM BRZINOM ω_0. PITANJE: KOLIKA TREBA DA JE NUMERIČKA VREDNOST TE UGAONE BRZINE ($\omega_0=?$) PA DA KOMPONENTA REAKCIJE VEZE Y_B U SFERNOM ZGLOBU BUDE JEDNAKA NULI.