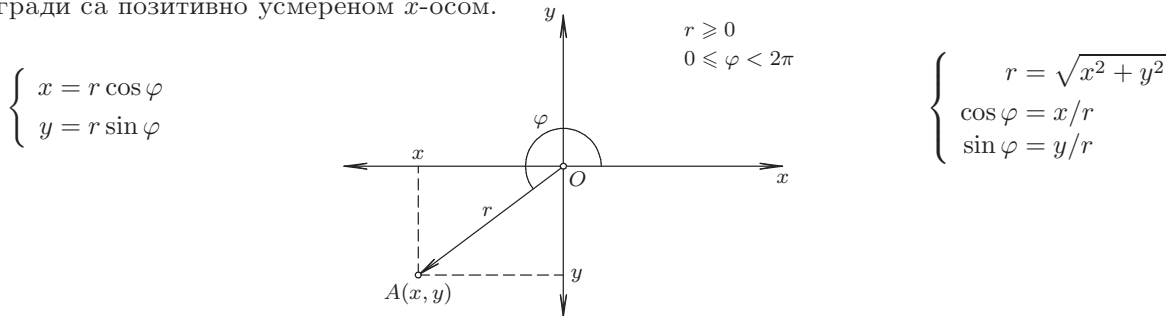


8. Равне фигуре и обртна тела

8.1. Поларне координате

Крива у равни, или фигура одређена њоме, може бити задата на разне начине. У овој глави се бавимо случајевима када је крива задата експлицитно или параметарски, у Декартовим (правоуглим) или поларним координатама.

За почетак ћемо се подсетити *поларних координата*. Посматрајмо тачку  $A$  у координатној равни. Позиција тачке  $A$  је одређена растојањем  $OA = r$  од координатног почетка  $O$  и углом  $\varphi$  који вектор  $\vec{OA}$  гради са позитивно усмереном  $x$ -осом.



Декартове координате тачке једнозначно одређују њене поларне координате и обрнуто.

Нешто општије, центар поларних координата може да буде и нека тачка  $R_0(x_0, y_0)$  различита од координатног почетка. У том случају је

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi.$$

8.2. Површина фигуре у равни

(1°) Експлицитно задата крива

Видели смо да одређени интеграл функције представља површину испод графика. Прецизније, за произвољну непрекидну функцију  $f$ , површина између криве  $y = f(x)$  и  $x$ -осе на интервалу  $[a, b]$  једнака је

$$P = \int_a^b |y| dx.$$

Слично, ако је фигура у равни одређена кривим  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  за  $a \leq x \leq b$ , њена површина је

$$P = \int_a^b |y_1 - y_2| dx.$$

(2°) Крива у параметарском облику

Посматрајмо нешто општију ситуацију када је фигура одређена кривом  $\gamma$  задатом параметарски:

$$\gamma: \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \tag{1}$$

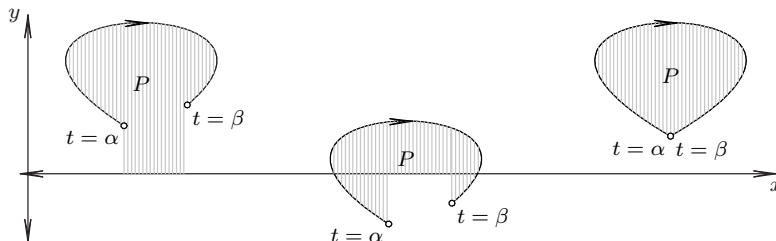
Претпоставимо на кратко да је функција  $x(t)$  растућа, а  $y(t)$  ненегативна на интервалу  $[\alpha, \beta]$ . Површина између криве  $\gamma$  и  $x$ -осе је једнака

$$P = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \tag{2}$$

Сличне резултате добијамо у другим случајевима. Дакле:

- (а) Ако је  $x(t)$  растућа и  $y(t) \geq 0$ , или је  $x(t)$  опадајућа и  $y(t) \leq 0$ , онда је  $P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$ ;
- (б) Ако је  $x(t)$  опадајућа и  $y(t) \geq 0$ , или је  $x(t)$  растућа и  $y(t) \leq 0$ , онда је  $P = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$ .

Одавде се лако можемо уверити коју површину мери интеграл (2) ако је  $\gamma$  из (1) произвољна глатка крива без самопресека. Посебно нам је користан случај када је крива  $\gamma$  затворена, тј.  $x(\alpha) = x(\beta)$  и  $y(\alpha) = y(\beta)$ .



Приметимо да се променом оријентације мења знак интеграла у (1). Пошто површина мора бити позитивна, за резултат се узима апсолутна вредност.

Пример 8.1. Наћи површину области између криве  $y = x^3 - x^2$  и праве  $y = 4(x - 1)$ .

Решење. Пре него што применимо формулу, треба да знамо две ствари:

- (1°) Интервал  $[a, b]$ , тј. пројекцију дате области на  $x$ -осу. За њега нам је нужно да одредимо пресечне тачке дате криве и праве.
- (2°) Знак израза  $y_1 - y_2$ . У зависности од њега,  $|y_1 - y_2|$  може бити једнако  $y_1 - y_2$  или  $y_2 - y_1$ . Знак се може променити само у некој од пресечних тачака.

Пресечне тачке задовољавају  $y = x^3 - x^2 = 4(x - 1)$ , тј.  $0 = x^3 - x^2 - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$ , па је  $x \in \{-2, 1, 2\}$ . Дакле, област између кривих лежи између  $x = -2$  и  $x = 2$ , те је тражена површина

$$P = \int_{-2}^2 |y_1 - y_2| dx, \quad \text{где су } y_1 = x^3 - x^2 \text{ и } y_2 = 4(x - 1).$$

Како је  $y_1 - y_2 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$  позитивно за  $-2 < x < 1$  и негативно за  $1 < x < 2$ , следи да је

$$P = \int_{-2}^1 (y_1 - y_2) dx + \int_1^2 (y_2 - y_1) dx = \int_{-2}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx - \int_1^2 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}.$$

Пример 8.2. Наћи површину испод *циклоиде* дате једначинама  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  за  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Решење. Тражена површина је

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \left( \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi \approx 9,42478. \end{aligned}$$

(3°) Фигура у поларним координатама

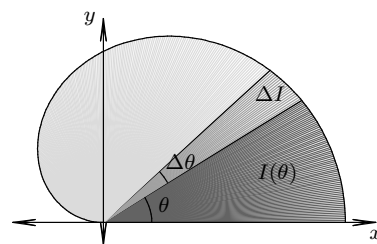
Нека је сада фигура описана условом  $r \leq r(\varphi)$  за  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  у поларним координатама.

Означимо са  $I(\theta)$  површину фигуре одређене кривом  $\gamma$  у области у којој је  $\alpha \leq \varphi \leq \theta$ . Ако је  $\Delta\theta$  веома мало,  $\Delta I = I(\theta + \Delta\theta) - I(\theta)$  је блиско кружном исечку с полупречником  $r(\theta)$  и централним углом  $\Delta\theta$ , те је његова површина  $\frac{1}{2}r(\theta)r(\theta + \Delta\theta) + o(\Delta\theta)$ .

У лимесу имамо  $I'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2$ , па је  $I(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{2}r(\varphi)^2 d\varphi$ .

Следи да је површина дате фигуре

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$



Истакнимо добијене резултате:

### Шерђење 8.1.

- (1°) Површина фигуре између кривих  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  за  $a \leq x \leq b$  је  $P = \int_a^b |y_1 - y_2| dx$ ;  
(2°) површина фигуре омеђене кривом  $\gamma : \{x = x(t), y = y(t)\}$  за  $\alpha \leq t \leq \beta$  и  $x$ -осом је  $P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t) dt$ ;  
(3°) површина фигуре дате у поларним координатама условима  $r \leq r(\theta)$  за  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  једнака је  $P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ .

### 8.3. Дужина лука криве

#### (1–2°) Крива задата експлицитно или параметарски

Претпоставимо да је крива задата параметарски у равни, условима (1), и означимо са  $\ell(\tau)$  дужину лука криве за  $\alpha \leq t \leq \tau$ .

При кретању параметра  $t$  од  $\tau$  до  $\tau + \Delta\tau$ , координате  $x$  и  $y$  тачке на кривој промене се редом за  $\Delta x \approx x'(\tau)\Delta\tau$  и  $\Delta y \approx y'(\tau)\Delta\tau$ . При томе је тачка на кривој прешла приближно праволинијски пут чија је дужина (по Питагориној теореми)  $\Delta\ell = \ell(\tau + \Delta\tau) - \ell(\tau) = \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \cdot \Delta\tau + o(\tau)$ .

Пуштањем  $\Delta\tau \rightarrow 0$  добићемо  $\ell'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\ell}{\Delta\tau} = \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}$ . Следи да је дужина лука криве (1) једнака

$$\ell = \ell(\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

У случају тродимензионалне криве  $\gamma$  у простору задате условима  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  и  $z = z(t)$  за  $\alpha \leq t \leq \beta$ , добија се формула за дужину криве  $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ .

Одавде одмах добијамо одговарајућу формулу и ако је крива дата експлицитно, условом  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Наиме, тада улогу параметра  $t$  преузима  $x$  и важи  $x'(t) = 1$  и  $y'(t) = y'(x)$ , те претходна формула постаје

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Пример 8.3. Одредити дужину криве дате једначином  $y = \operatorname{ch} x$  за  $0 \leq x \leq 1$ .

Решење. Како је  $y' = \operatorname{sh} x$ , тражена дужина је

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1,1752.$$

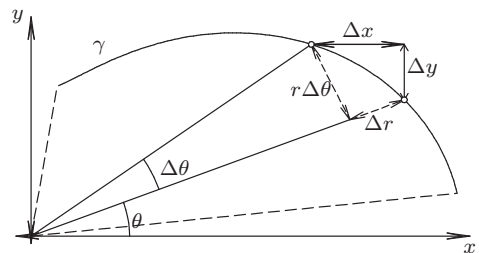
#### (3°) Крива у поларним координатама

Нека је крива  $\gamma$  задата у поларним координатама условом  $r = r(\varphi)$  за  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

Означимо са  $\ell(\theta)$  дужину дела криве  $\gamma$  у области у којој је  $\alpha \leq \varphi \leq \theta$ . Ако је  $\Delta\theta$  веома мало и параметар  $t$  се креће од  $\theta$  до  $\theta + \Delta\theta$ , тачка на кривој прелази пут који се може апроксимирати хипотенузом правоуглог троугла са катетама  $r\Delta\theta$  и  $\Delta r \approx r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta) \approx r'\Delta\theta$ . Следи да је  $\Delta\ell = \ell(\theta + \Delta\theta) - \ell(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \Delta\theta + o(\Delta\theta)$ .

Пуштањем  $\Delta\theta \rightarrow 0$  добијамо  $\ell'(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$ , па је

$$\ell = \ell(\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$



Пример 8.4. Наћи дужину кардиоиде, дате у поларним координатама условом  $r = 1 - \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Решење. Имамо  $r' = \sin \theta$ , па је тражена дужина

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \left( -4 \cos \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Истакнимо добијене резултате:

Шерђење 8.2.

- (1°) Дужина криве дате условом  $y = y(x)$  за  $a \leq x \leq b$  је  $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ ;
- (2°) дужина криве  $\gamma : \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$  за  $\alpha \leq t \leq \beta$  је  $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ ;
- (3°) дужина криве  $r = r(\theta)$  за  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  у поларним координатама је  $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ .

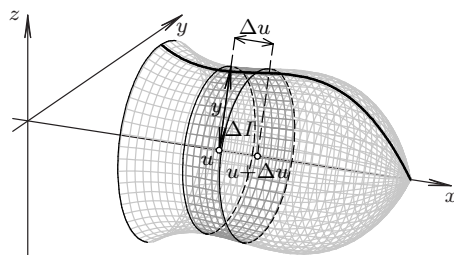
**8.4. Запремина обртног тела**

Обртно тело је тело у простору које се добија ротацијом криве  $\gamma$  око неке праве - *осе ротације*. Овде за осу ротације узимамо  $x$ -осу. Ротирање криве  $\gamma$  око  $x$ -осе чини обртно тело  $\Phi$ .

(1°) Експлицитно задата крива

Прво разматрамо случај када је крива  $\gamma$  задата експлицитно, једначином  $y = y(x)$  за  $a \leq x \leq b$ .

Означимо са  $I(t)$  површину дела тела  $\Phi$  између равни  $x = a$  и  $x = u$ . Ако је  $\Delta u$  веома мало, део обртног тела између равни  $x = u$  и  $x = u + \Delta u$  је близак ваљку полупречника основе  $y$  и висине  $\Delta u$ . Зато је запремина овог дела тела  $\Delta I = I(u + \Delta u) - I(u) = \pi y^2 \Delta u + o(\Delta u)$ .



Пуштањем  $\Delta u \rightarrow 0$  добијамо  $I'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta u} = \pi y^2$ . Према томе, запремина целог обртног тела је

$$V = I(b) = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

(2°) Крива у параметарском облику

Нека је сада крива  $\gamma$  дата условима (1). Ако је  $x(t)$  растућа функција за  $t \in [\alpha, \beta]$ , имамо  $dx = x'(t)dt$ , па је запремина

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y(t)^2 x'(t) dt. \tag{3}$$

Општији случај, када  $x(t)$  није монотона функција на интервалу  $[\alpha, \beta]$ , разматра се исто као и у случају површине одређене кривом у претходном одељку, тако да и тада формула (3) остаје на снази до на знак (тј. за резултат се узима апсолутна вредност интеграла).

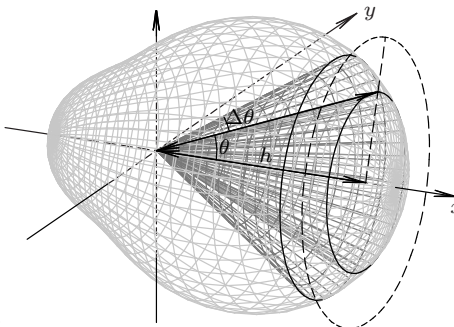
Пример 8.5. Нека су  $a$  и  $b$  ( $|a| < b$ ) константе. Ротирањем круга  $x = a \cos t, y = b + a \sin t$  за  $0 \leq t \leq 2\pi$  око  $x$ -осе добија се *торус*. Његова запремина је

$$V = \left| \pi \int_0^{2\pi} y^2 \cdot x' dt \right| = \pi \int_0^{2\pi} (b + a \sin t)^2 \cdot a \sin t dt = \pi a \int_0^{2\pi} (b^2 \sin t + 2ab \sin^2 t + a^2 \sin^3 t) dt = 2\pi^2 a^2 b.$$

(3°) Крива у поларним координатама

Размотримо и случај поларних координата. У овом случају област  $r \leq r(\theta)$  ротира око  $x$ -осе.

Означимо са  $I(\theta)$  запремину дела тела  $\Phi$  у области у којој је  $\alpha \leq \varphi \leq \theta$ . Ако је  $\Delta\theta$  веома мало,  $\Delta I = I(\theta + \Delta\theta) - I(\theta)$  је блиско разлици две купе заједничке висине  $h = r \cos \theta$ , полупречника основе  $htg\theta$  и  $htg(\theta + \Delta\theta)$ . Зато је запремина овог дела обртног тела  $\Delta I \approx \frac{1}{3}\pi h^2 (tg^2(\theta + \Delta\theta) - tg^2\theta) \cdot h d\varphi = \frac{1}{3}\pi (r \cos \theta)^3 (tg^2\theta)' \Delta\theta + o(\Delta\theta) = \frac{2}{3}\pi r^3 \sin \theta + o(\Delta\theta)$  када  $\Delta\theta \rightarrow 0$ .



У лимесу имамо  $I'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta\theta} = \frac{2}{3}\pi r^3 \sin \theta$ . Следи да је запремина читавог тела  $\Phi$

$$V = I(\beta) = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin \varphi d\varphi.$$

Истакнимо добијене резултате:

Шерђеје 8.3. Нека је  $V$  запремина обртне површи добијене ротирањем криве  $\gamma$  око  $x$ -осе.

(1°) Ако је  $\gamma$  дата условом  $y = y(x)$  за  $a \leq x \leq b$ , онда је  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ ;

(2°) Ако је  $\gamma$  дата условима  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  за  $\alpha \leq t \leq \beta$ , онда је  $V = \int_\alpha^\beta y(t)^2 x'(t) dt$ ;

(3°) Ако је  $r \leq r(\varphi)$  за  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  у поларним координатама, онда је  $V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin \varphi d\varphi$ .

Пример 8.6. Бернулијева лемнискаџа (заправо, њена четвртина) је дата у поларним координатама условом  $r^2 = \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Нађи запремину тела добијеног ротирањем ове криве око  $x$ -осе.

Решење. Тражена запремина је

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/4} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/4} \cos^{3/2} \theta \sin \theta d\theta \stackrel{t=\cos \theta}{\underset{dt=-\sin \theta d\theta}{=}} \frac{2}{3}\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^{3/2} dt = \frac{4}{15}\pi \left(1 - \frac{1}{2^{5/4}}\right) \approx 0,48552.$$

## 8.5. Површина обртне површи

(1–2°) Крива задата експлицитно или параметарски

Претпоставимо да је крива задата параметарски, условима (1).

Означимо са  $P(t)$  површину обртне површи за  $\alpha \leq t \leq t$ . Као што смо видели у одељку о дужини криве, ако је  $\delta t$  веома мало, део ове криве за  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$  има дужину  $\Delta \ell \approx \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Delta t$ . Ротирањем око  $x$ -осе овај део криве чини уску површ блиску зарубљеној купи чија је изводница  $\Delta \ell$ , а полупречници обеју основа  $\approx y(t)$ . Површина овог дела површи је  $\Delta P = 2\pi y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Delta t + o(\Delta t)$  када  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Добијамо  $P'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = 2\pi y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ , па интеграција даје формулу

$$P = P(\beta) = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Одавде одмах добијамо одговарајућу формулу и ако је крива дата експлицитно, условом  $y = y(x)$  за  $a \leq x \leq b$ . Улогу параметра  $t$  преузима  $x$ , те претходна формула постаје

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Пример 8.7. Асџироида је крива дата једначином  $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ . Нађи површину тела добијеног ротирањем ове криве око  $x$ -осе.

Решење. Крива је симетрична у односу на обе осе, па можемо да посматрамо само део у првом квадранту и резултат помножимо са 2. Сменом  $x^{2/3} = \cos^2 t$  и  $y^{2/3} = \sin^2 t$  добијамо параметризацију  $x = \cos^3 t$  и  $y = \sin^3 t$  за  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Пошто је  $x' = -3 \cos^2 t \sin t$  и  $y' = 3 \sin^2 t \cos t$ , имамо  $x'^2 + y'^2 = (3 \sin t \cos t)^2$  и

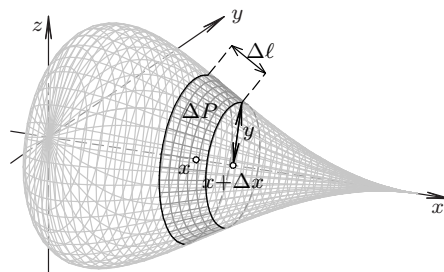
$$P = 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3 \sin t \cos t dt \stackrel{u=\sin t}{\underset{du=\cos t dt}{=}} 2\pi \int_0^1 3u^4 du = \frac{6}{5}\pi \approx 3,76991.$$

(3°) Крива у поларним координатама

Најзад, ако је крива  $\gamma$  задата у поларним координатама условом  $r = r(\theta)$  за  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , имаћемо  $\Delta \ell \approx \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \Delta \theta$  и  $\Delta P \approx 2\pi y \sqrt{r^2 + r'^2} \Delta \theta = 2\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} \Delta \theta$ , што нас води закључцима  $P'(\theta) = 2\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2}$  и

$$P = P(\beta) = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi) \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Пример 8.8. Израчунати површину тела добијеног ротирањем круга  $x^2 + y^2 = 2y$  око  $x$ -осе.



Решење. У поларним координатама дати круг се представља условом  $r^2 = 2r \sin \varphi$ , тј.  $r = 2 \sin \varphi$ , при чему је  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Тада је  $r' = 2 \cos \varphi$ , а тражена површина је

$$P = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot r \sin \varphi \, d\varphi = 2\pi \int_0^\pi 2 \cdot 2 \sin^2 \varphi \, d\varphi = 4\pi.$$

Истакнимо и ове резултате:

Шерђење 8.4. Нека је  $P$  површина обртне површи добијене ротирањем криве  $\gamma$  око  $x$ -осе.

(1°) Ако је  $\gamma$  дата условом  $y = y(x)$  за  $a \leq x \leq b$ , онда је  $P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$ ;

(2°) Ако је  $\gamma$  дата условима  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  за  $\alpha \leq t \leq \beta$ , онда је  $P = 2\pi \int_\alpha^\beta y \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt$ ;

(3°) Ако је  $\gamma : r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) у поларним координатама, важи  $P = 2\pi \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot r \sin \varphi \, d\varphi$ .

## 8.6. Задаци

1. Израчунати површину области ограничене кривом  $y = \sqrt{1 - x^2}$  и правом  $y = \frac{x+1}{2}$ .
2. Наћи површину области између кривих  $y = 2|x|$  и  $y = 6 + 3x - x^2$ .
3. Одредити површину унутрашњости кардиоиде, дате условом  $r = 1 - \cos \theta$  за  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
4. Израчунати површину области омеђене кривом  $\gamma : (x, y) = (\sin t - \sin 5t, \cos t - \cos 5t)$  за  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
5. Наћи дужину дела параболе  $y = x^2$  у области  $0 \leq x \leq 1$ .
6. Наћи дужину лука криве  $y = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$  за  $x \in [1, e]$ .
7. Израчунати дужину криве дате у поларним координатама једначином  $r = e^\varphi$ ,  $-1 \leq \varphi < 1$ .
8. Наћи дужину лука циклоиде:  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
9. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око  $x$ -осе криве  $y = \sin x + \frac{1}{2}$  за  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
10. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око  $x$ -осе криве  $y = x\sqrt[3]{1 - x^3}$  за  $0 \leq x \leq 1$ .
11. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око  $x$ -осе фигуре ограничене правим  $x = 0$  и  $y = 2e$  и кривом  $y = (x + 1)e^x$ .
12. Крива  $y = (x^2 + 2x^{-2})^{-3/4}$  ( $x \geq 0$ ) ротира око  $x$ -осе. Наћи запремину добијеног тела.
13. Одредити запремину тела добијеног ротирањем криве  $y = x + x^3$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) око  $y$ -осе.
14. Наћи површину тела добијеног ротирањем криве  $r = 1 + \cos \varphi$  за  $0 \leq \varphi \leq \pi$  око  $x$ -осе.
15. Израчунати површину сфере полупречника 1.
16. Крива  $y = (x - \frac{1}{3})\sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) ротира око  $x$ -осе. Наћи површину добијеног тела.
17. Израчунати површину тела које се добија ротирањем дела криве  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) око  $x$ -осе.
18. Израчунати површину тела које се добија ротирањем лука криве  $y = 9x - x^3$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , око  $x$ -осе.
19. Израчунати површину тела које се добија ротирањем око  $x$ -осе фигуре ограничене правим  $y = 0$  и  $y = 2x$  и параболом  $y = (x - 4)^2$ .
20. Наћи површину тела насталог ротирањем криве  $r = \cos^2 \varphi$  за  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  око  $x$ -осе.

## 8.7. Решења

1. Прво нађимо пресеке праве и криве:  $\sqrt{1-x^2} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 4(1-x^2) = (x+1)^2 \Rightarrow (x+1)(5x-3) = 0$ , па су пресеци у  $x = -1$  и  $x = \frac{3}{5}$ . Тражена површина је

$$\int_{-1}^{\frac{3}{5}} \left( \sqrt{1-x^2} - \frac{x+1}{2} \right) dx = \left( \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} \right) \Big|_{-1}^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5} \approx 0,70715.$$

2. Испитајмо где се две криве секу, тј. решимо једначину  $6+3x-x^2 = 2|x|$ . Може бити  $6+3x-x^2 = 2x$  (чија су решења  $x \in \{-2, 3\}$ ) или  $6+3x-x^2 = -2x$  (решења  $x \in \{-1, 6\}$ ), при провера потврђује само решења  $x = -1$  и  $x = 3$ . Делови тражене површине за  $-1 \leq x \leq 0$  и  $0 \leq x \leq 3$  су

$$P_1 = \int_{-1}^0 (6+3x-x^2+2x) dx = \frac{19}{6} \quad \text{и} \quad P_2 = \int_0^3 (6+3x-x^2-2x) dx = \frac{27}{2},$$

па је укупна површина  $P = P_1 + P_2 = \frac{50}{3}$ .

3. Површина је  $P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1-2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = 3\pi \approx 9,42478$ .

4. Дата крива је затворена, јер је  $(x, y) = (0, 0)$  за  $t = 0$  и  $t = \frac{\pi}{2}$ . Површина области унутар ње је

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^{\pi/2} y(t)x'(t) dt \right| = \left| \int_0^{\pi/2} (\sin t - \sin 5t)(5 \sin 5t - \sin t) dt \right| = \left| \int_0^{\pi/2} (6 \sin t \sin 5t - \sin^2 t - 5 \sin^2 5t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{6(\cos 4t - \cos 6t) - (1 - \cos 2t) - 5(1 - \cos 10t)}{2} dt \right| = \left| \int_0^{\pi/2} -3 dt \right| = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. Тражена дужина је

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx \stackrel{t=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[ t\sqrt{t^2+1} + \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \right] \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1,47894. \end{aligned}$$

6. Дужина дате криве је

$$\begin{aligned} \ell &= \int_1^e \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}} dx \\ &= \int_1^e \left(2x + \frac{1}{8x}\right) dx = \left(x^2 + \frac{1}{8} \ln x\right) \Big|_1^e = e^2 - \frac{7}{8} \approx 6,51406. \end{aligned}$$

7. Дужина криве је  $\ell = \int_{-1}^1 \sqrt{r^2+r'^2} d\varphi = \int_{-1}^1 \sqrt{2e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \int_{-1}^1 e^\varphi d\varphi = \sqrt{2}(e - e^{-1}) \approx 3,32397$ .

8. Тражена дужина је

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2+y'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

9. Запремина је

$$V = \pi \int_0^{2\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4}\right) dx = \pi \left(\frac{3}{4}x - \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi^2 \approx 14,8044.$$

10. Запремина је  $V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x^3)^{2/3} dx \stackrel{t=1-x^3}{=} \frac{1}{3}\pi \int_0^1 t^{2/3} dt = \frac{1}{5}\pi \approx 0,62832$ .

11. Функција  $f(x) = (x+1)e^x$  је растућа и  $f(0) = 1$  и  $f(1) = 2e$ . Дакле, дата фигура је у области  $0 \leq x \leq 1$ . Запремина цилиндра које се добија ротирањем целе ове области између  $x$ -осе и праве  $y = 2e$  је

$$V_1 = \pi \int_0^1 (2e)^2 dx = 4\pi e^2.$$

Запремина „шупљине” нашег обртног тела, тј. дела између  $x$ -осе и криве  $y = f(x)$ , је

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx = \frac{1}{4} \pi e^{2x} (2x^2 + 2x + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \pi (5e^2 - 1).$$

Тражена запремина је  $V_1 - V_2 = \frac{1}{4} \pi (11e^2 + 1) \approx 64,6223$ .

12. Запремина је

$$V = \pi \int_0^\infty y^2 dx = \pi \int_0^\infty x^3 (x^4 + 2)^{-3/2} dx \stackrel{t=x^4+2}{\Big|_{dt=4x^3 dx}} \Big| = \frac{\pi}{4} \int_2^\infty t^{-3/2} dt = -\frac{\pi}{4} \cdot 2t^{-1/2} \Big|_2^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11072.$$

13. Пошто се ротира око  $y$ -осе, у формули за запремину  $x$  и  $y$  мењају улоге. При томе је  $0 \leq y \leq 10$ :

$$V = \pi \int_0^{10} x^2 dy = \pi \int_0^2 x^2 (1 + 3x^2) dx = \pi \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{328}{15} \pi = 68,6962.$$

14. Тражена запремина је

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi r^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi \stackrel{t=1+\cos \varphi}{\Big|_{dt=-\sin \varphi d\varphi}} \Big| = \frac{2}{3} \pi \int_0^2 t^3 dt = \frac{8}{3} \pi \approx 8,37758.$$

15. Сфера се може добити ротирањем полукруга  $y = \sqrt{1-x^2}$  за  $-1 \leq x \leq 1$  око  $x$ -осе. Како је  $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  и  $1 + y'^2 = \frac{1}{1-x^2}$ , површина сфере је (као што већ знамо)

$$P = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 dx = 4\pi \approx 12,5664.$$

16. Имамо  $y' = \frac{9x-1}{6\sqrt{x}}$  и  $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{81x^2+18x+1}{36x}} = \frac{9x+1}{6\sqrt{x}}$ . Тражена површина је онда

$$P = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \left( x - \frac{1}{3} \right) \frac{9x+1}{6\sqrt{x}} dx = 2\pi \int_0^1 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x - \frac{1}{18} \right) dx = \frac{5}{9} \pi \approx 1,74533.$$

17. Површина је

$$P = 2\pi \int_0^\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} dx \stackrel{t=\cos x}{\Big|_{dt=-\sin x dx}} \Big| = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt \\ = \pi [t\sqrt{t^2+1} + \ln(t + \sqrt{t^2+1})] \Big|_{-1}^1 = 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 14,4236.$$

18. Површина је  $P = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^3 x(9-x^2) \sqrt{1+(9-3x^2)^2} dx$ . Ако уведемо смену  $t = 9 - 3x^2$ ,  $dt = -6x dx$ , онда је  $9 - x^2 = 6 + \frac{1}{3}t$  и

$$P = \frac{1}{3} \pi \int_{-18}^9 \left( 6 + \frac{1}{3}t \right) \sqrt{t^2+1} dt = \frac{1}{3} \pi \left( 3t\sqrt{t^2+1} + 3 \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + \frac{1}{9}(t^2+1)^{3/2} \right) \Big|_{-18}^9 \\ = \pi \left( \frac{805}{27} \sqrt{13} + \frac{325}{27} \sqrt{82} + \ln(9 + \sqrt{82}) + \ln(18 + \sqrt{325}) \right) \approx 700,502.$$

19. Парабола сече праву  $y = 2x$  за  $x = 2$  (и  $x = 8$ , али та пресечна тачка не одговара опису), а  $x$ -осу за  $x = 4$ . Спољашњост обртног тела састоји се из три дела:

(1°) Површи настале ротирањем сегмента праве  $y = 2x$  за  $0 \leq x \leq 2$ . Њена површина је  $P_1 = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^2 2x\sqrt{5} dx = 8\pi\sqrt{5}$ .

(2°) Површи настале ротирањем дела параболе  $y = (x-4)^2$  за  $2 \leq x \leq 4$ . Њена површина је  $P_2 = 2\pi \int_2^4 (x-4)^2 \sqrt{1+(2(x-4))^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_{-4}^0 u^2 \sqrt{1+u^2} du$  (смена  $u = 2(x-4)$ ), па добијамо  $P_2 = \frac{\pi}{32} [u(2u^2+1)\sqrt{u^2+1} - \ln(u + \sqrt{u^2+1})] \Big|_{-4}^0 = \pi \left( \frac{33}{8} \sqrt{17} - \frac{1}{32} \ln(4 + \sqrt{17}) \right)$ .

Укупна површина је  $P = P_1 + P_2 = \pi [8\sqrt{5} + \frac{33}{8} \sqrt{17} - \frac{1}{32} \ln(4 + \sqrt{17})] \approx 109,424$ .

20. Имамо  $r' = 2 \sin \varphi \cos \varphi$  и  $r^2 + r'^2 = (4 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi = \frac{5-3 \cos 2\varphi}{2} \cdot \cos^2 \varphi$ . Површина је

$$P = 2\pi \int_0^{\pi/2} r \sqrt{r^2 + r'^2} \sin \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{5-3 \cos 2\varphi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \sqrt{5-3 \cos 2\varphi} \sin 2\varphi d\varphi \stackrel{t=5-3 \cos 2\varphi}{\Big|_{dt=6 \sin 2\varphi d\varphi}} \Big| = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_2^8 \frac{8-t}{6} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{6} dt = \frac{94}{135} \pi \approx 2,18748.$$