

## 9. Диференцијалне једначине првог реда

### 1. Основни појмови

*Диференцијална једначина* је једначина по *непознатој функцији*, дата у облику везе између функције, њених извода и променљиве. У свом општем облику то је једначина облика

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где је  $x$  променљива и  $y = y(x)$  непозната функција. Ако је највиши извод који учествује у једначини извод  $n$ -тог реда, кажемо да је то *једначина  $n$ -тог реда*. Циљ решавања диференцијалне једначине је да се нађе непозната функција.

У овом предмету бавићемо се само једначинама првог реда, дакле, онима облика

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{или (у експлицитном облику)} \quad y' = f(x, y).$$

Наш први сусрет са диференцијалним једначинама били су неодређени интегрални.

Пример 1. (а) Најједноставнија је диференцијална једначина облика

$$y' = f(x).$$

Њено решење је, наравно, функција  $y = \int f(x) dx + C$ .

(б) Мало сложеније делује диференцијална једначина

$$yy' = f(x).$$

Овде нам интеграција по  $dx$  даје  $\int f(x) dx = \int yy' dx = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + \text{const}$ , одакле добијамо опште решење:

$$y = \sqrt{2 \int f(x) dx + C}, \quad \text{где је } C \text{ произвољна константа.}$$

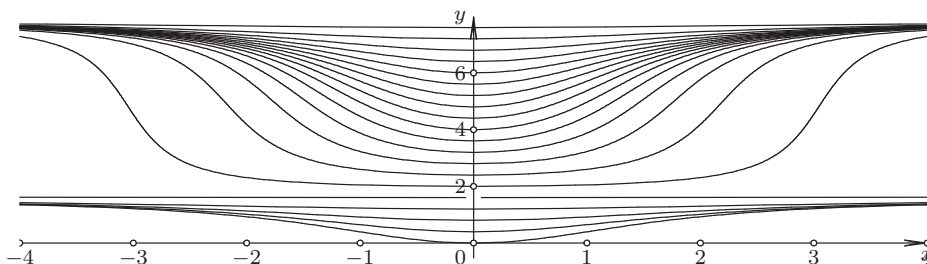
Опшће решење у дате диференцијалне једначине првог реда чини фамилија функција, у зависности од константног параметра  $C$ . То решење ћемо обично добијати у једном од три облика:

- *експлицитном*:  $y = f(x, C)$ , где је функција  $f$  позната;
- *имплицитном*:  $f(x, y, C) = 0$ , где је функција  $f$  позната;
- *параметарском*:  $x = x(t, C)$  и  $y = y(t, C)$ , где су везе вредности  $x$  и  $y$  с параметром  $t$  познате.

У нашим примерима трећи случај ћемо виђати најређе.

Свака функција која задовољава дату диференцијалну једначину зове се *партикуларно решење*. Конкретна вредност константе  $C$ , као и њоме одређено партикуларно решење, могу се одредити ако је познат додатни услов за функцију  $y$ . То може бити нпр. *почетни услов* - вредност  $y(x_0)$  у датој тачки  $x_0$ .

Пример 2. На слици су приказани графици решења диференцијалне једначине  $y' = x(1 - \sin y)$  за разне почетне вредности  $y(0)$ .



Под одређеним претпоставкама почетни услов гарантује јединственост решења.

Шерђеје 1 (Теорема Пикара). Посматрајмо диференцијалну једначину  $y' = f(x, y)$ , уз почетни услов  $y(x_0) = y_0$ .

Ако је  $f$  непрекидно диференцијабилна функција чији је извод ограничен, онда наведена диференцијална једначина има јединствено решење  $y$  у околини тачке  $x_0$ .  $\square$

Онда када претпоставке теореме Пикара нису задовољене, могу да постоје решења која се не уклапају у облик општег решења ни за један избор константе  $C$ . Таква решења се зову *сингуларна* и обично их изгубимо приликом решавања једначине, нпр. када негде делимо једначину нечим што може бити нула. Испитивање сингуларних решења је ван оквира овог предмета.

Пример 3. Посматрајмо једначину

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Како је  $y' = dy/dx$ , њу можемо записати у облику  $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$ . Овде нам је дозвољена интеграција обеју страна, дајући  $\sqrt{y} = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = x + C$ . Тако смо добили опште решење:

$$y = (x + C)^2, \quad \text{где је } C \text{ произвољна константа.}$$

Међутим, ова једначина има и једно сингуларно решење:  $y = 0$ . Оно не одговара ниједној вредности  $C$ . Њега смо изгубили дељењем једначине са  $y$ .

## 2. Неки типови решивих једначина

Успешним решењем диференцијалне једначине можемо да сматрамо сваки облик (општег) решења које је комбинација елементарних функција и интеграла. Ипак, релативно мало диференцијалних једначина, чак и првог реда, решиво је на овај начин. Размотрићемо неколико основних типова диференцијалних једначина које се могу решити.

(1°) Једначина са раздвојеним променљивим.

Ово је једначина облика

$$y' = f(x)g(y),$$

где су  $f$  и  $g$  дате функције. И овде и надаље подразумевамо интегрбилност.

Како је  $y' = \frac{dy}{dx}$ , ова једначина се може записати у облику „са раздвојеним променљивим” -  $x$  је десно, а  $y$  лево:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

тако да нам интеграција обеју страна даје опште решење у имплицитном облику:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Пример 4. Решити диференцијалну једначину

$$y' = x^2y^2.$$

Решење. Раздвојићемо променљиве:  $\frac{dy}{dx} = x^2y^2$ , тј.  $\frac{dy}{y^2} = x^2dx$ . Интеграцијом добијамо  $-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int x^2dx = \frac{x^3+C}{3}$ , одакле је

$$y = -\frac{3}{x^3 + C}.$$

(2°) Хомогена једначина.

Ово је једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где је  $f$  дата функција.

Уводимо смену  $z = \frac{y}{x}$ , тако да је  $y' = f(z)$ . (Овако препознајемо хомогену једначину: након увођења ове смене  $y'$  зависи само од  $z$ , не и од  $x$ .) Тада је  $y = zx$  и (као извод производа)  $y' = z + xz'$ , па дата једначина постаје

$$z + xz' = f(z), \quad \text{тј.} \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

То је једначина са раздвојеним променљивим, а такве унемо да решимо.

Пример 5. Решити диференцијалну једначину

$$(x + y)y' = y.$$

Решење. Уверимо се да је ово хомогена једначина: сменом  $y = xz$  и  $y' = xz' + z$  она постаје

$$y' = \frac{y}{x+y} = \frac{xz}{x(z+1)}, \quad \text{што заменом } y' = xz' + z \text{ даје } xz' = \frac{z}{z+1} - z = \frac{-z^2}{z+1}.$$

Раздвајање променљивих даје  $\frac{dx}{x} = -\frac{(z+1) dz}{z^2}$ , одакле је интеграцијом  $\ln|x| + \text{const} = \frac{1}{z} - \ln|z| = \frac{x}{y} - \ln|\frac{y}{x}|$ . Одавде следи

$$y \ln|y| = Cx.$$

(3°) Линеарна једначина.

Ово је једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

где су  $P$  и  $Q$  дате функције по  $x$ .

Размотримо прво простију једначину:  $y' + P(x)y = 0$ . То је једначина са раздвојеним променљивим:  $\frac{dy}{y} = -P(x) dx$ . Интеграцијом налазимо  $\ln y = \int P(x) dx + \text{const}$ , те је њено (једно) решење

$$y_0 = e^{-\int P(x) dx}.$$

Вратимо се једначини (1) и потражимо њено решење у облику  $y = y_0 \cdot z$ . Тада је  $y' = y_0 z' + y_0' z$ , па (1) постаје

$$y_0 z' + (\cancel{y_0'} + P(x)y_0)z = Q(x).$$

Одавде дељењем са  $y_0$  и интеграцијом налазимо  $z$ , а одатле и  $y = y_0 z$ :

$$y = y_0 \left( C + \int \frac{Q(x)}{y_0} dx \right) = e^{-\int P(x) dx} \left( C + \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx \right). \quad (2)$$

Пример 6. Решити једначину

$$(x^2 - 1)y' = x^2 + 2y.$$

Решење. Записаћемо једначину као  $y' - \frac{2}{x^2-1} \cdot y = \frac{x^2}{x^2-1}$ . У горњим ознакама је

$$P(x) = -\frac{2}{x^2-1} \quad \text{и} \quad Q(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

Тада је  $\int P(x) dx = \ln \frac{x+1}{x-1}$ , па нам формула (2) даје

$$y = \frac{x-1}{x+1} \left( C + \int \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} dx \right) = \frac{x-1}{x+1} \left( C + x - \frac{1}{x-1} + 2 \ln(x-1) \right).$$

(4°) Бернулијева једначина.

Ово је једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k, \quad (3)$$

где су  $P$  и  $Q$  дате функције по  $x$ .

Увешћемо смену  $y = z^\alpha$ , при чему ћемо константу  $\alpha$  одабрати касније. Тада је  $y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$  (по правилу сложене функције), чиме (3) постаје

$$\alpha z^{\alpha-1} z' + P(x)z^\alpha = Q(x)z^{k\alpha}.$$

Одабиром

$$\alpha = \frac{1}{1-k}, \quad \text{тј.} \quad y = z^{\frac{1}{1-k}} \quad (4)$$

биће  $\alpha - 1 = k\alpha$ , те ће ова једначина након скраћивања  $z^{\alpha-1}$  постати линеарна, а такве уметмо да решимо:

$$\alpha z' + P(x)z = Q(x).$$

Пример 7. Решити једначину

$$xy' = y - xy^{3/2}.$$

Решење. Ово је Бернулијева једначина у којој је  $k = \frac{3}{2}$ , па користимо  $\alpha = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} = -2$ , тј. смену  $y = z^{-2}$ . Тада је  $y' = -2z^{-3}z'$ , што дату једначину своди на

$$-2xz^{-3}z' = z^{-2} - xz^{-3}, \quad \text{тј.} \quad z' + \frac{z}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Ово је линеарна једначина ( $P(x) = \frac{1}{2x}$  и  $Q(x) = \frac{1}{2}$ ) коју једноставно решавамо по формули (2):

$$z = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad \text{тј.} \quad y = z^{-2} = \frac{9x}{(x^{3/2} + C_1)^2} \quad (C_1 = 3C = \text{const}).$$

### 3. Једначина потпуног диференцијала

Свака диференцијална једначина облика  $(\frac{dy}{dx} =) y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$  може се записати у облику

$$A(x,y) dx + B(x,y) dy = 0. \quad (5)$$

Оваква једначина се зове *једначина потпуног диференцијала* ако постоји непрекидно диференцијабилна функција  $F(x,y)$  - *потенцијал* једначине - таква да је

$$F'_x = A(x,y) \text{ и } F'_y = B(x,y), \quad \text{тј.} \quad dF = A dx + B dy.$$

Тада се једначина (5) своди на  $dF = 0$ , те је њено решење

$$F(x,y) = \text{const}.$$

Неопходан услов за постојање функције  $F$  је да важи

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (= F''_{xy}).$$

С друге стране, ово је и довољан услов. Потенцијал  $F$  бисмо нашли на следећи начин.

- Из једначине  $F'_x = A(x,y)$  налазимо  $F = \int A dx + E(y)$  - по претпоставци,  $E'_x = 0$ , тј.  $E$  је константа по  $x$ , али може да зависи од  $y$ .
- Сада је  $F'_y = B(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\int A dx) + E'(y)$ , па је  $E'(y) = B - \frac{\partial}{\partial y}(\int A dx)$ . Одавде налазимо функцију  $E(y) = \int [B - \frac{\partial}{\partial y}(\int A dx)] dy$ , што нам коначно одређује функцију  $F$ :

$$F(x,y) = \int A dx + \int \left( B - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int A dx \right) \right) dy.$$

Пример 8. Једначина

$$(e^y + ye^x)dx + (e^x + (x+1)e^y)dy = 0$$

је једначина потпуног диференцијала. Заиста, како је  $A = e^y + ye^x$  и  $B = e^x + (x+1)e^y$ , важи  $A'_y = B'_x = e^x + e^y$ .

Одредимо потенцијал  $F$ . Из  $F'_x = e^y + ye^x$  следи  $F = \int (e^y + ye^x) dx = xe^y + ye^x + E(y)$ . Даље, из  $e^x + (x+1)e^y = F'_y = xe^y + e^x + E'(y)$  следи  $E'(y) = e^y$ , тј.  $E(y) = e^y + \text{const}$ . Добили смо

$$F(x,y) = (x+1)e^y + ye^x + \text{const}.$$

Према томе, решење дате диференцијалне једначине је  $(x+1)e^y + ye^x = C$ .

Шта радити ако једначина (5) *није* једначина потпуног диференцијала? У том случају можемо покушати да нађемо *интеграциони фактор* - функцију  $\mu = \mu(x,y)$  множењем са којом ће (5) постати једначина потпуног диференцијала. Другим речима, функција  $\mu$  мора да буде таква да важи

$$\frac{\partial(\mu \cdot A)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot B)}{\partial x}, \quad \text{што се своди на} \quad (A'_y - B'_x)\mu = B \cdot \mu'_x - A \cdot \mu'_y.$$

Ово је парцијална диференцијална једначина по  $\mu(x,y)$  која је у општем случају још теже решива него полазна једначина. Ипак, функцију  $\mu$  често можемо да одредимо ако знамо у ком облику је треба тражити.

Пример 9. Интеграциони фактор једначине

$$(x^2 + y^2)dx + 2ydy = 0$$

је облика  $\mu = f(x)$ . Наћи тај фактор.

Решење. Важи

$$((x^2 + y^2)f(x))'_y = (2yf(x))'_x, \quad \text{тј.} \quad 2yf(x) = 2yf'(x),$$

одакле је  $f'(x) = f(x)$ , тј.  $df/f = dx$ . Интеграцијом добијамо  $\ln f(x) = x + \text{const}$ , тј.  $f(x) = Ce^x$  за неку константу  $C$ . Према томе,  $\mu = e^x$  је интеграциони фактор.

Заиста, једначина

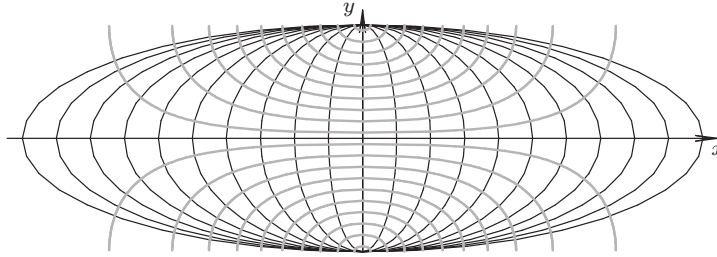
$$(x^2 + y^2)e^x dx + 2ye^x dy = 0$$

јесте једначина потпуног диференцијала.

#### 4. Ортогоналне и изогоналне трајекторије

Нека је  $\mathcal{K}$  фамилија кривих датих једначинама  $f(x, y, C) = 0$ , где је  $C$  слободна константа. *Ортогонална трајекторија* је свака крива која сече све криве из ове фамилије под правим углом. Овакве криве су од интереса у описивању правоуглих криволинијских координатних система (сетимо се нпр. система поларних координата).

Пример 10. На слици је приказана фамилија елипси  $(Cx)^2 + y^2 = 1$ , где је  $C > 0$ .



Сиве криве представљају ортогоналне трајекторије на ову фамилију елипси. Једна од ортогоналних трајекторија је и  $x$ -оса.

Одређивање ортогоналних трајекторија се по правилу своди на диференцијалне једначине. Наиме, ако се константа  $C$  из једначине криве изражава једначином  $C = g(x, y)$ , диференцирањем по  $x$  ова константа нестаје, дајући диференцијалну једначину облика

$$F(x, y, y') = 0. \quad (6)$$

Решења ове једначине су криве фамилије  $\mathcal{K}$ .

Посматрајмо сада ортогоналну трајекторију  $\gamma$ . Она сече неку криву  $\omega$  из фамилије  $\mathcal{K}$  у некој тачки  $P(x, y)$ . Нека је  $y'$  нагиб трајекторије  $\gamma$  у тачки  $P$ . Будући ортогонална на  $\gamma$ , крива  $\omega$  у тачки  $P$  има нагиб  $-1/y'$ , што по (6) значи да тај нагиб задовољава једначину

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0. \quad (7)$$

Према томе, диференцијална једначина (7) описује ортогоналне трајекторије на фамилију  $\mathcal{K}$ .

Пример 11. Наћи ортогоналне трајекторије за фамилију  $\mathcal{K}$  елипси  $(Cx)^2 + y^2 = 1$  из Примера 10.

Решење. Прво ћемо одредити диференцијалну једначину која описује ову фамилију. Имамо  $C = \frac{1}{x}\sqrt{1 - y^2}$ , што диференцирањем по  $x$  даје

$$0 = C' = -\frac{1}{x^2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \text{што се своди на} \quad F(x, y, y') = xy y' - y^2 + 1 = 0.$$

Ортогоналне трајекторије описује једначина  $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ , тј.  $xy/y' = 1 - y^2 = 0$ , што је једначина са раздвојеним променљивим:  $x dx = (\frac{1}{y} - y) dy$ . Њено опште решење добијамо интеграцијом:

$$x^2 = 2 \ln y - y^2 + C_1,$$

и то је једначина ортогоналних трајекторија.

*Изогонална трајекторија* је свака крива која сече све криве из фамилије  $\mathcal{K}$  под датим углом  $\alpha$ .

Ортогоналне трајекторије су специјалан случај изогоналних за угао  $\alpha = 90^\circ$ .

Изогоналне трајекторије одређујемо слично као ортогоналне. Посматрајмо изогоналну трајекторију  $\gamma$  и тачку  $P(x, y)$  на њој. Тангента на  $\gamma$  у тачки  $P$  чини са  $x$ -осом угао  $\varphi$  и има нагиб  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ . Крива из фамилије  $\mathcal{K}$  која пролази кроз тачку  $P$  у тој тачки има тангенту која са  $x$ -осом чини угао  $\varphi - \alpha$  и има нагиб  $\tilde{y}' = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{y' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + y' \operatorname{tg} \alpha}$ . Према (6), тај нагиб задовољава једначину  $F(x, y, \tilde{y}') = 0$ , тј.

$$F\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + y' \operatorname{tg} \alpha}\right) = 0. \quad (8)$$

Према томе, изогоналне трајекторије на фамилију  $\mathcal{K}$  описује диференцијална једначина (8).

Пример 12. Наћи изогоналне трајекторије за фамилију  $\mathcal{K}$  концентричних кругова  $x^2 + y^2 = C^2$  под датим углом  $\alpha$ .

Решење. Диференцирањем једначине  $x^2 + y^2 = C^2$  по  $x$  налазимо диференцијалну једначину  $F(x, y, y') = x + yy' = 0$ . Изогоналне трајекторије описује једначина  $F\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + y' \operatorname{tg} \alpha}\right) = x + y \frac{y' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + y' \operatorname{tg} \alpha} = 0$ . Из ње можемо да изразимо  $y'$  као

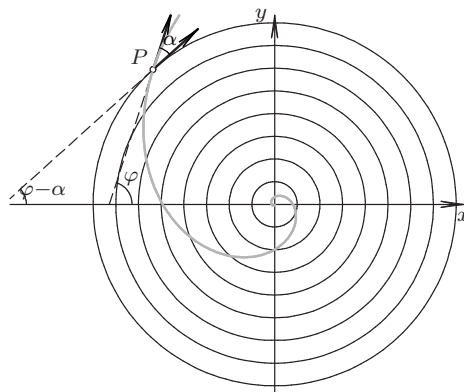
$$y' = \frac{y \operatorname{tg} \alpha - x}{x \operatorname{tg} \alpha + y},$$

што је хомогена једначина. Сменом  $y = xz$  и  $y' = xz' + z$  она постаје  $\frac{x dz}{dx} = xz' = \frac{z \operatorname{tg} \alpha - 1}{z + \operatorname{tg} \alpha} - z$ , што се своди на  $\frac{z + \operatorname{tg} \alpha}{1 + z^2} dz = -\frac{dx}{x}$ . Интеграцијом добијамо  $\frac{1}{2} \ln(1 + z^2) + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{arctg} z = -\ln x$ , што заменом  $z = \frac{y}{x}$  постаје

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

## 5. Задаци

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине  $y' = 1 - y - 2y^2$ .
2. Решити диференцијалну једначину  $y' = e^{x-y}$ .
3. Наћи решење диференцијалне једначине  $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$  уз почетни услов  $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .
4. Наћи опште решење диференцијалне једначине  $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$ .
5. Наћи опште решење диференцијалне једначине  $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$ , а затим и партикуларно решење које задовољава услов  $y(1) = 1$ .
6. Погодном сменом свести једначину облика  $y' = f\left(\frac{y+b}{x+a}\right)$  на хомогену, где су  $a$  и  $b$  константе.
7. Решити диференцијалну једначину  $y' = \frac{2x+y-2}{x+2y+1}$ .
8. Наћи опште решење диференцијалне једначине  $y' = y + \sin 2x$ .
9. Решити диференцијалну једначину  $x(x+1)y' = xy + (x+1)^2$  за  $x > -1$ , уз почетни услов  $y(1) = 0$ .
10. Наћи опште решење диференцијалне једначине  $y' + y \sin x = 2x^3 \cos x^2 e^{\cos x}$ .
11. Наћи опште решење једначине  $y'(x + e^y) = 1$ . Ако је  $y(0) = -2$ , израчунати  $y(2)$ .
12. Решити диференцијалну једначину  $y' \cos x = y \sin x + y^4$ .
13. Наћи партикуларно решење једначине  $y' + \frac{2}{x}y = \sqrt{y} \sin x$  које испуњава услов  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$ .
14. Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине  $2y + (x^2 y + 1)xy' = 0$  које задовољава услов  $y(1) = 2$ .
15. Дата је једначина  $z' = \frac{e^z - x e^x + 1}{(x+1)e^z}$ . Сменом  $y = e^x + e^z$  свести је на линеарну, а затим је решити.



16. Решити диференцијалну једначину  $(x + x^2)y' + xe^y = 1$ . Може да се користи смена  $y = \ln z$ .
17. Погодном сменом свести следеће једначине на неки од обрађених типова (раздвојене променљиве, хомогена, линеарна, Бернулијева):  
(а)  $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ); (б)  $y' = p(x)e^y + q(x)$ .
18. Постоји ли функција  $z(x, y)$  чији је тотални диференцијал  $2e^x \sin(x + y)dx + e^x[e^{y-x} + \sin(x + y) + \cos(x + y)]dy$ ? Одредити је ако постоји.
19. Наћи интеграциони фактор једначине  $y(4x - 3y - 3)dx - x(4x - 3y - 4)dy = 0$ , ако је познато да је он облика  $\mu(x, y) = x^2 f(y)$ .
20. Наћи интеграциони фактор једначине  $(x + y^2)dx - 2xydy$ , ако је познато да он има облик  $\mu(x, y) = \lambda(x)$ . Уз помоћ њега решити наведену једначину.
21. Одредити диференцијалну једначину чије је опште решење (а)  $xe^y + ye^x = C$ , (б)  $y = Cx^3 + C^3x$ .
22. Наћи ортогоналне трајекторије фамилије парабола  $x^2 + 1 = ky$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).
23. Наћи ортогоналну трајекторију на фамилију кривих  $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) која пролази кроз тачку  $(4, 1)$ .
24. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење  $y = \frac{x+k}{x-k}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). Затим наћи ортогоналну трајекторију фамилије кривих  $y = \frac{x+k}{x-k}$  која пролази кроз тачку  $(1, 0)$ .
25. Наћи (а) ортогоналне трајекторије; (б) изогоналне трајекторије под углом  $45^\circ$  фамилије кривих  $y = \sin(x + C)$ .

## 6. Решења

1. Ово је једначина са раздвојеним променљивим. Заиста,  $\frac{dy}{dx} = 1 - y - 2y^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{1 - y - 2y^2}$ . Интеграција обе стране даје

$$x = \int \frac{dy}{1 - y - 2y^2} = \int \left( \frac{1}{3(1 + y)} + \frac{2}{3(1 - 2y)} \right) dy = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - 2y} \right| + C_1.$$

Добијено решење се може средити:  $e^{3x} = C \frac{1+y}{1-2y}$ , где је  $C = e^{3C_1} \operatorname{sgn} \frac{1+y}{1-2y}$ , и најзад  $y = \frac{e^{3x} - C}{2e^{3x} + C}$ .

Питање за размисање: Где се овде уклапају константна решења  $y \equiv -1$  и  $y \equiv \frac{1}{2}$ ?

2. Ако једначину запишемо као  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}$ , видимо да је то једначина са раздвојеним променљивим:  $\frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{e^x}$ . Интеграцијом добијамо  $e^{-y} = C + e^{-x}$ , тј.  $y = -\ln(C + e^{-x})$ .
3. Дата једначина је хомогена: ако ставимо  $\frac{y}{x} = z$ , онда  $y' = z^2 + z + 1$  зависи само од  $z$ . Тако се сменом  $y = xz$  и  $y' = xz' + z$  она своди на

$$xz' + z = z^2 + z + 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом добијамо  $\operatorname{arctg} z = \ln|x| + C$ , што даје  $y = x \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$ .

Додатни услов  $y(\frac{1}{2}) = 0$  нам одређује константу  $C$ . Заменом  $x = \frac{1}{2}$  и  $y = 0$  у добијени израз за  $y$  добијамо  $0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\ln \frac{1}{2} + C)$ ; одатле је  $C = \ln 2$ , те је  $y = x \operatorname{tg} \ln |2x|$ .

4. Ово је хомогена једначина  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ . Сменом  $y = xz$  и  $y' = xz' + z$  своди се на  $xz' = \sin z$ , тј.  $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$ . Пошто је

$$\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{t = \cos y}{dt = -\sin y dy} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \cos^2 z}{2 \sin^2 z} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right|,$$

интеграцијом добијамо  $\ln |\operatorname{tg} \frac{z}{2}| = \ln|x| + C_1$ , тј.  $y = 2x \operatorname{arctg}(Cx)$ .

Питање. Да ли и избор  $C = \infty$  даје решење једначине?

5. Дата једначина је хомогена. Заменом  $y = xz$  добијамо једначину  $xz' = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z}$ , а одатле  $\int \frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}} dz = C + \int \frac{dx}{x}$ . Интеграл с леве стране се може решити сменом  $t = \arcsin z$ , чиме се он своди на  $\int (1 + \sin t) dt = t - \cos t = \arcsin z - \sqrt{1-z^2}$ . Следи да је

$$\arcsin \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = C + \ln |x|.$$

Ако је  $y(1) = 1$ , заменом  $x = y = 1$  добијамо  $C = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ .

6. Ако уведемо смене  $\bar{y} = y + b$  и  $\bar{x} = x + a$ , онда је  $dy = d\bar{y}$  и  $dx = d\bar{x}$ , па тако имамо хомогену једначину  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$ . Она се решава сменом  $\bar{y} = z \cdot \bar{x}$ , тј.  $y + b = z(x + a)$ .
7. Потражимо смену попут оне из претходног задатка:  $\bar{x} = x + a$  и  $\bar{y} = y + b$  за неке константе  $a$  и  $b$ . Имамо

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = y' = \frac{2x + y - 2}{x + 2y + 1} = \frac{2\bar{x} + \bar{y} - (2a + b + 2)}{\bar{x} + 2\bar{y} + (1 - a - 2b)}.$$

Подесимо зато  $a$  и  $b$  тако да буде  $2a + b + 2 = 1 - a - 2b = 0$ . Добијамо  $a = -\frac{5}{3}$  и  $b = \frac{4}{3}$ . Полазна једначина постаје  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{2\bar{x} + \bar{y}}{\bar{x} + 2\bar{y}}$ . Сменом  $\bar{y} = z \cdot \bar{x}$  добићемо  $\bar{x} \frac{dz}{d\bar{x}} = \frac{z+2}{2z+1} - z$ , што се своди на

$$\frac{2z+1}{z^2-1} dz = -\frac{2d\bar{x}}{\bar{x}}.$$

Интеграција даје  $\frac{3}{2} \ln |z-1| + \frac{1}{2} \ln |z+1| = -2 \ln |\bar{x}| + \text{const}$ , што се може записати и као  $\bar{x}^4 (z+1)(z-1)^3 = C$ , тј.  $(y+x-\frac{1}{3})(y-x+3)^3 = C$ .

8. Ово је линеарна диференцијална једначина у којој је  $P(x) = -1$  и  $Q(x) = \sin 2x$ . По формули (2) је

$$y_0 = e^{-\int P(x) dx} = e^x \quad \text{и} \quad y = y_0 \left( C + \int y_0^{-1} Q(x) dx \right) = e^x \left( C + \int e^{-x} \sin 2x dx \right).$$

Сада  $I(x) = \int e^{-x} \sin 2x dx$  рачунамо парцијалном интеграцијом: уз  $J(x) = \int e^{-x} \cos 2x dx$  имамо

$$I(x) \Big|_{du=2\cos 2x dx}^{u=\sin 2x} \Big|_{v=-e^{-x}}^{dv=e^{-x}} = -e^{-x} \sin 2x + 2J(x) \Big|_{du=-2\sin 2x dx}^{u=\cos 2x} \Big|_{v=-e^{-x}}^{dv=e^{-x}} = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x - 4I(x),$$

одакле је  $I(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x - \frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x$ . Дакле,  $y = C e^x - \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x$ .

9. Ово је линеарна једначина  $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{x+1}{x}$ ; у њој је  $P(x) = -\frac{1}{x+1}$  и  $Q(x) = \frac{x+1}{x}$ , па је по формули (2) опште решење

$$y = e^{\int \frac{-dx}{x+1}} \left( C + \int \frac{x+1}{x} e^{-\int \frac{dx}{x+1}} dx \right) = (x+1)(C + \ln x).$$

Ако је  $y(0) = 2$ , онда имамо  $y = 0 = (1+1)(C + \ln 1)$ , тј.  $C = 0$ , па добијамо  $y = (x+1) \ln x$ .

10. Опет користимо формулу (2). Овде је  $P(x) = \sin x$ ,  $Q(x) = 2x^3 \cos x^2 e^{\cos x}$  и  $y_0 = e^{\cos x}$ , па имамо

$$y = e^{\cos x} \left( C + \int 2x^3 \cos x^2 dx \right) dx \Big|_{dt=2x dx}^{t=x^2} = e^{\cos x} \left( C + \int t \cos t dt \right).$$

Преостали интеграл рачунамо парцијалном интеграцијом:

$$\int t \cos t dt \Big|_{du=dt}^{u=t} \Big|_{dv=\cos t dt}^{v=\sin t} = \int u dv = uv - \int v du = t \sin t + \cos t = x^2 \sin x^2 + \cos x^2,$$

чиме смо добили коначно решење:  $y = e^{\cos x} (C + x^2 \sin x^2 + \cos x^2)$ .

11. Ако дату једначину запишемо као

$$\frac{dy}{dx} \cdot (x + e^y) = 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{dx}{dy} = x + e^y,$$

препознајемо линеарну једначину, али овде је  $x$  функција, а  $y$  променљива. Како је  $P(y) = -1$  и  $Q(y) = e^y$ , по формули (2) њено опште решење је  $x = e^y (y + C)$ . Почетни услов  $y(0) = -2$  нам даје  $C = 2$ , тј.

$$x = e^y (y + 2).$$

Заменом  $x = 2$  добијамо  $2e^{-y} = y + 2$ . У овој једначини лева страна опада, а десна расте, па она може имати највише једно решење  $y$ , а то решење лако погодимо:  $y = y(2) = 0$ .

12. Ово је Бернулијева једначина  $y' = y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} y^4$  у којој је  $k = 4$ , па по (4) уводимо смену  $y = z^{\frac{1}{1-k}} = z^{-\frac{1}{3}}$ . Добијамо линеарну једначину

$$z' + 3z \operatorname{tg} x = -\frac{3}{\cos x}$$

у којој је  $P(x) = 3 \operatorname{tg} x$  и  $Q(x) = -\frac{3}{\cos x}$ , па по формули (2) добијамо  $y_0 = e^{-3 \int P(x) dx} = \cos^3 x$  и  $z = \cos^3 x (C - 3 \int \frac{dx}{\cos^4 x})$ . Остаје само да се израчуна

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \stackrel{t=\operatorname{tg} x}{dx=\frac{dt}{1+t^2}} \int (1+t^2) dt = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + \operatorname{const}.$$

Најзад добијамо  $z = C \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x$  и  $y = (C \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x)^{-1/3}$ .

13. Ово је Бернулијева једначина у којој је  $k = \frac{1}{2}$ . На основу (4), њу сменом  $y = z^2$  сводимо на линеарну,  $z' = -\frac{1}{x} \cdot z + \frac{1}{2} \sin x$ , и решавамо по формули (2):

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left( C + \frac{1}{2} \int \sin x e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) = -\frac{1}{x} \left( C + \frac{1}{2} \int x \sin x dx \right) = -\frac{C}{x} - \frac{\sin x}{2x} + \frac{\cos x}{2}.$$

Следи да је  $y = \left( -\frac{C}{x} - \frac{\sin x}{2x} + \frac{\cos x}{2} \right)^2$ , а из услова  $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}$  налазимо  $2C+1 = \pm 2$ , тј.  $C \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$ .

14. Ако једначину запишемо као

$$(x^2 y + 1)x \cdot \frac{dy}{dx} = -2y, \quad \text{тј.} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{(x^2 y + 1)x}{2y} = -\frac{1}{2y} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^3,$$

препознајемо Бернулијеву једначину по  $x = x(y)$  у којој је  $k = 3$ . Сменом  $x = z^{-\frac{1}{2}}$  сводимо је на линеарну,  $z' - \frac{1}{y} \cdot z = 1$ , коју решавамо по формули (2). Налазимо  $x^{-2} = z = y(C + \ln |y|)$ . Заменом  $y(1) = 2$  налазимо  $C = \frac{1}{2} - \ln 2$ , те добијамо решење у облику  $x^2 y (\frac{1}{2} + \ln |\frac{y}{2}|) = 1$ .

15. Диференцирањем једнакости  $e^z = y - e^x$  добијамо  $e^z z' = y' - e^x$ . Тако дата једначина постаје линеарна:

$$y' - e^x = \frac{y - e^x - x e^x + 1}{x + 1}, \quad \text{тј.} \quad y' = \frac{y + 1}{x + 1}.$$

Њено опште решење је  $y = C(x + 1) - 1$ , одакле налазимо и  $z = \ln(C(x + 1) - 1 - e^x)$ .

16. Ако је  $y = \ln z$ , онда је  $e^y = z$  и  $y' = \frac{z'}{z}$ , те дата једначина постаје Бернулијева:

$$(x + x^2)z' - z = -xz^2.$$

Сменом  $z = u^{-1}$  добијамо линеарну једначину  $u' + \frac{1}{x+x^2}u = \frac{1}{x+1}$ , чије је решење по формули (2)  $u = \left| \frac{x+1}{x} \right| (C + \ln |x+1| + \frac{1}{x+1})$ . Како је  $u = e^{-y}$ , следи

$$y = \ln |x| - \ln \left| 1 + (x+1)(C + \ln |x+1|) \right|.$$

17. (а) Сменом  $y = \frac{1}{z}$  и  $y' = -\frac{z'}{z^2}$  дату једначину сводимо на хомогену:  $-z' = a + b(\frac{z}{x})^2$   
 (б) Ставимо  $e^{-y} = z$ , тј.  $y = -\ln z$  и  $y' = -\frac{z'}{z}$ . Множењем са  $z$  добијамо линеарну једначину  $z' = -q(x)z - p(x)$ .

18. Овде је  $A = 2e^x \sin(x+y)$  и  $B = e^y + e^x(\sin(x+y) + \cos(x+y))$ , и заиста је  $A'_y = B'_x = 2e^x \cos(x+y)$ , што потврђује да функција  $z$  постоји. Сада добијамо редом

$$\begin{aligned} z'_x = A &\Rightarrow z = \int A dx = 2 \int e^x \sin(x+y) dx = e^x (\sin(x+y) - \cos(x+y)) + E(y) \Rightarrow \\ z'_y = e^x (\cos(x+y) + \sin(x+y)) + E'(y) = B &\Rightarrow E'(y) = e^y. \end{aligned}$$

одавде следи да је  $E(y) = e^y + C$ , тако да је  $z = e^x (\sin(x+y) - \cos(x+y)) + e^y + C$ .

19. Испитајмо под којим условом је  $A dx + B dy$  потпуни диференцијал, где су  $A = x^2 y(4x - 3y - 3)f(y)$  и  $B = -x^3(4x - 3y - 4)f(y)$ : важи

$$\begin{aligned} A'_y &= x^2 y(4x - 3y - 3)f'(y) + x^2(4x - 6y - 3)f(y), \\ B'_x &= x^2(-16x + 9y + 12)f(y), \end{aligned}$$

па се услов  $A'_y = B'_x$  своди на  $x^2 y(4x - 3y - 3)f'(y) + 5x^2(4x - 3y - 3)f(y) = 0$ , тј.  $yf'(y) + 5f(y) = 0$ , чије је решење  $f(y) = Cy^{-5}$ . Према томе,  $\mu(x, y) = x^2 y^{-5}$  је интеграциони фактор.

20. Једначина  $A dx + B dy$ , где су  $A = (x + y^2)\lambda(x)$  и  $B = -2xy\lambda(x)$ , је потпуни диференцијал ако важи

$$A'_y = B'_x, \quad \text{тј.} \quad 2y\lambda(x) = -2y\lambda(x) - 2xy\lambda'(x).$$

Добили смо диференцијалну једначину  $2\lambda(x) + x\lambda'(x) = 0$  чије је опште решење  $\lambda(x) = \frac{C}{x^2}$ .

Множењем са  $\lambda(x) = \frac{1}{x^2}$  дата једначина постаје једначина потпуног диференцијала, тј.

$$dz = \frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Одредимо функцију  $z$ : из  $z'_x = \frac{x+y^2}{x^2}$  следи  $z = \int \frac{x+y^2}{x^2} dx = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + E(y)$ . Затим из услова  $z'_y = -\frac{2y}{x} + E'(y)$  налазимо  $E'(y) = 0$ , тј.  $E(y) = C = \text{const}$ .

Следи да је  $\ln|x| - \frac{y^2}{x} + C = 0$  за неку константу  $C$ , што нам даје опште решење  $y^2 = x(C + \ln|x|)$ .

21. (а) Диференцирање по  $x$  даје  $e^y + ye^x + y'e^x = C' = 0$ , тј.  $y' = -y - e^{y-x}$ .  
 (б) Диференцирање даје  $y' = 3Cx^2 + C^3$ , па враћањем  $C^3 = y' - 3Cx^2$  у полазну једначину добијамо  $y = Cx^3 + (y' - 3Cx^2)x$ , одакле изражавамо  $C = \frac{xy' - y}{2x^3}$ . Сада полазна једначина постаје

$$y = Cx^3 + C^3x = \frac{xy' - y}{2} + \frac{(xy' - y)^3}{8x^8}.$$

22. Диференцијалну једначину дате фамилије кривих налазимо диференцирањем константе  $k = \frac{x^2+1}{y}$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 + 1}{y} \right) = \frac{2xy - (x^2 + 1)y'}{y^2}, \quad \text{дакле} \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + 1}.$$

По (7), диференцијална једначина ортогоналних трајекторија је  $-\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{x^2+1}$ . То је једначина са раздвојеним променљивим  $-\frac{(x^2+1)dx}{x} = 2ydy$ , чијом интеграцијом добијамо  $y^2 = C - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$ .

23. Диференцијалну једначину дате фамилије кривих добијамо диференцирањем константе  $C$ :  $0 = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = \frac{y'}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , тј.  $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ . Ортогоналне трајекторије тада описује једначина

$$-\frac{1}{y'} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \sqrt{x} dx + \sqrt{y} dy = 0.$$

Интеграцијом добијамо једначину трајекторија:  $x^{3/2} + y^{3/2} = C_1$ . Константу  $C_1$  налазимо из припадности тачке  $(4, 1)$ :  $C_1 = 4^{3/2} + 1^{3/2} = 9$ .

24. Нађимо диференцијалну једначину која описује дате криве. Из  $x + k = y(x - k)$  изражавамо  $k = \frac{xy-x}{y+1}$ , па диференцирање даје

$$0 = \frac{(xy' + y - 1)(y + 1) - (xy - x)y'}{(y + 1)^2} = \frac{2xy' + y^2 - 1}{(y + 1)^2} \quad \text{и одатле} \quad 2xy' + y^2 - 1 = 0.$$

Ортогоналне трајекторије описује једначина  $-\frac{2x}{y'} + y^2 - 1 = 0$ , тј.  $2x dx = (y^2 - 1) dy$ , одакле је

$$x^2 = \int 2x dx = \int (y^2 - 1) dy = \frac{1}{3}y^3 - y + C.$$

Заменом  $(x, y) = (1, 0)$  добијамо  $C = 1$ , па је тражена ортогонална трајекторија  $x^2 = \frac{1}{3}y^3 - y + 1$ .

25. Нађимо прво диференцијалну једначину која одређује ове криве: како је  $y' = \cos(x + C)$ , имамо

$$y'^2 + y^2 = \sin^2(x + C) + \cos^2(x + C) = 1, \quad \text{тј.} \quad y' = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

(а) Ортогоналне трајекторије задовољавају једначину  $\frac{1}{y'} = \pm\sqrt{1 - y^2}$ , тј.  $\pm dx = \sqrt{1 - y^2} dy$ . Интеграцијом налазимо

$$\pm 2x = y\sqrt{1 - y^2} + \arcsin y.$$

(б) По (8), изогоналне трајекторије под углом  $45^\circ$  задовољавају једначину  $\frac{1+y'}{1-y'} = \pm\sqrt{1-y^2}$ . Из ње налазимо  $\frac{(\sqrt{1-y^2} \pm 1)dy}{\sqrt{1-y^2} \mp 1} = dx$ , одакле интеграцијом добијамо  $x = y + \frac{2}{y} \pm 2\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} + \arcsin y\right) + C$ .

