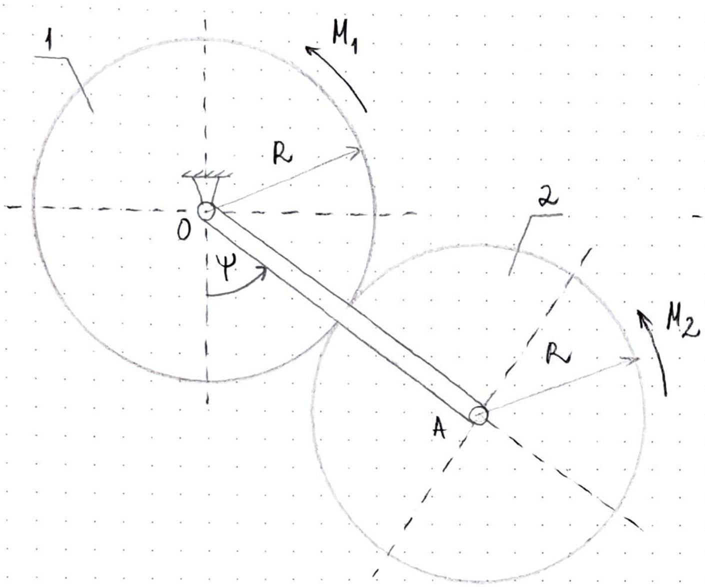
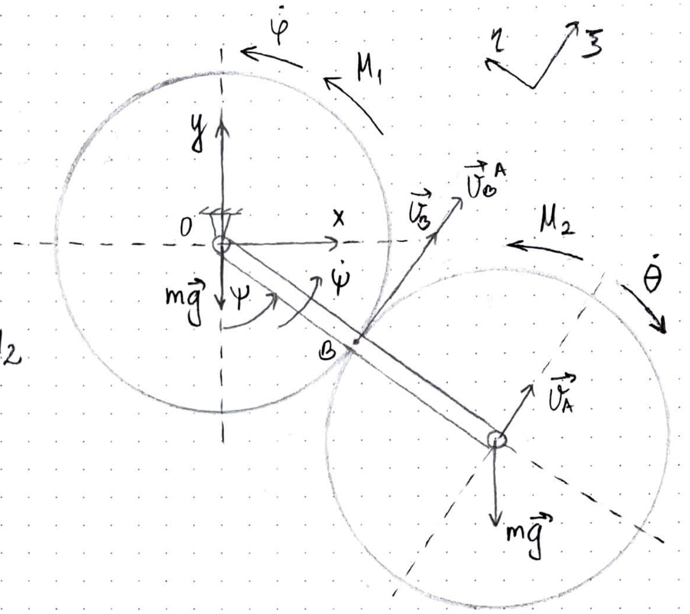
14.9. Зупчаник 1 масе m и полупречника R на који делује спрег момента M_1 може да се обрће око хоризонталне осе у тачки O. Око исте осе, независно од зупчаника 1, може да се обрће лаки штап OA дужине $2R$. За крај штапа A зглобно је везан зупчаник 2 масе m и полупречника R. Под дејством спрега момента M_2 зупчаник 2 се котрља по зупчанику 1. Зупчанике сматрати хомогеним дисковима. Занемарујући трење одредити угаона убрзања зупчаника 1 и штапа OA у зависности од угла ψ.





$\ddot{\varphi} = f(\psi) \ldots ?$

$\ddot{\psi} = f(\psi) \ldots ?$

ТЕЛО 1 И ТЕЛО 2 СУ ХОМОГЕНИ ДИСКОВИ

ТЕЛО 1 ⇒ РОТАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛОБ.

ШТАП ⇒ РОТАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛОБ.

ТЕЛО 2 ⇒ РАВНО СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ ⇒ 3 СТ. СЛОБ.

ЗБОГ ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ДВА ДИСКА У ТАЧКИ B, КАО И ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ШТАПА И ДИСКА 2 У ТАЧКИ A КРЕТАЊЕ ДИСКА 2 МОЖЕ СЕ ОПИСАТИ УЗ ПОМОЋ КООРД. φ И ψ

$v_B = R\dot{\varphi}$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{\,A} \;/\cdot \vec{\lambda}$, $v_A = 2R\dot{\psi}$, $v_B^A = R\dot{\theta}$

$v_B = v_A + v_B^A = 2R\dot{\psi} + R\dot{\theta}$

$\dot{\theta} = \dot{\varphi} - 2\dot{\psi}$ ⇒ АПСОЛУТНА УГАОНА БРЗИНА ДИСКА 2

ЗБОГ ВЕЗА У СИСТЕМУ БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ СЕ СМАЊУЈЕ ЗА 3 ⇒ СИСТЕМ ИМА 2 СТ. СЛОБ.

$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi$

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \psi} = Q_\psi$$

$E_k = E_k^{I} + E_k^{II}$ * ШТАП НЕМА КИНЕТИЧКУ ЕНЕРГИЈУ ЈЕР НЕМА МАСУ (ЛАКИ ШТАП)

$\boxed{\text{РОТ.}}$ $E_k^{I} = \frac{1}{2} J_{Oz}^{O} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^{II} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_{Az} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (2R\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\varphi} - 2\dot{\psi})^2$

$E_k^{II} = 3mR^2\dot{\psi}^2 - mR^2\dot{\psi}\dot{\varphi} + \frac{1}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2$

(3) $E_k = 3mR^2\dot{\psi}^2 - mR^2\dot{\psi}\dot{\varphi} + \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2$

$\delta A(\vec{M_1}) = \vec{M_1} \cdot d\vec{\varphi} = +M_1 d\varphi \Rightarrow Q_{\varphi}^{M_1} = M_1$

$\delta A(\vec{M_2}) = \vec{M_2} \cdot d\vec{\theta} = -M_2 d\theta = -M_2(d\varphi - 2d\psi) = -M_2 d\varphi + 2M_2 d\psi \Rightarrow Q_{\varphi}^{M_2} = -M_2, \ Q_{\psi}^{M_2} = 2M_2$

$\delta A^{O}(m\vec{g}) = 0$ (НЕПОКРЕТНА НАПАДНА ТАЧКА У ОСЛОНЦУ O)

$\delta A(\vec{R_A}, \vec{R_A}') = 0$ (УНУТРАШЊЕ СИЛЕ $\vec{R_A}$ И $\vec{R_A}' = -\vec{R_A}$ КОЈЕ ПОТИЧУ ОД ИДЕАЛНЕ ВЕЗЕ)

$\delta A(\vec{N}, \vec{N}') = 0$ (УНУТРАШЊЕ СИЛЕ $\vec{N}$ И $\vec{N}' = -\vec{N}$, НОРМАЛНЕ НА ПРАВАЦ ЕЛЕМ. ПОМЕРАЊА)

$\delta A^{A}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r_A}$, $d\vec{r_A}$ ЈЕ ИЗ СКУПА $\delta\vec{r_A}$ ЈЕР СУ СВЕ ВЕЗЕ У СИСТЕМУ ГЕОМЕТРИЈСКЕ, СТАЦИОНАРНЕ И ЗАДРЖАВАЈУЋЕ

$= (-mg\vec{j}) \cdot (dx_A \vec{i} + dy_A \vec{j})$

$= -mg\, dy_A$ $\qquad y_A = -2R\cos\psi \Rightarrow dy_A = 2R\sin\psi\, d\psi$

$= -2mgR\sin\psi\, d\psi \rightarrow Q_{\psi}^{mg} = -2mgR\sin\psi$

$Q_{\varphi} = M_1 - M_2$ (4), $Q_{\psi} = 2M_2 - 2mgR\sin\psi$ (5)

(8) $\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} - mR^2\dot{\psi}$

(9) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\ddot{\psi}$

(10) $\frac{\partial E_k}{\partial \psi} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} = 6mR^2\dot{\psi} - mR^2\dot{\varphi}$

(11) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}\right) = 6mR^2\ddot{\psi} - mR^2\ddot{\varphi}$

(4), (8), (9) → (1) $\Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\ddot{\psi} = M_1 + M_2$ (12)

(5), (10), (11) → (2) $\Rightarrow 6mR^2\ddot{\psi} - mR^2\ddot{\varphi} = -2M_2 - 2mgR\sin\psi$ (13)

(12) $\Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} = M_1 + M_2 + mR^2\ddot{\psi} \rightarrow$ (13)

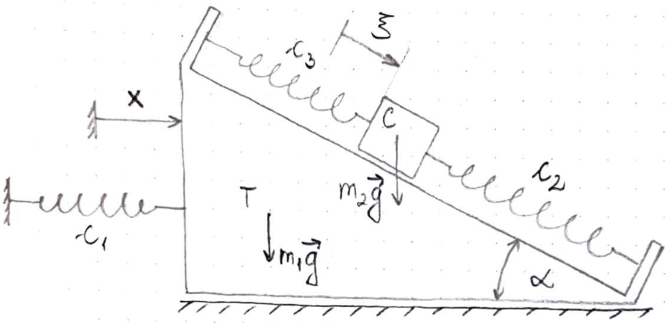
$6mR^2\ddot{\psi} - M_1 - M_2 - mR^2\ddot{\psi} = -2M_2 - 2mgR\sin\psi$

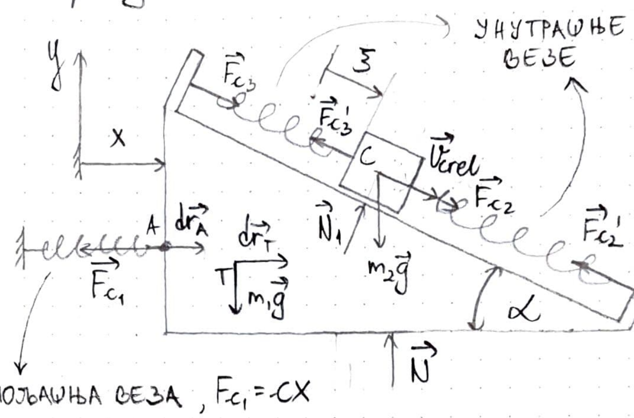
$5mR^2\ddot{\psi} = M_1 - M_2 - 2mgR\sin\psi \Rightarrow \ddot{\psi} = \frac{1}{5mR^2}(M_1 - M_2 - 2mgR\sin\psi) \Rightarrow \ddot{\psi} = f(\psi)$

(12) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{1}{mR^2}\left(M_1 + M_2 + \frac{1}{5}M_1 - \frac{1}{5}M_2 - \frac{2}{5}mgR\sin\psi\right)$

$\ddot{\varphi} = \frac{2}{5mR^2}(3M_1 + 2M_2 - mgR\sin\psi) \Rightarrow \ddot{\varphi} = f(\psi)$

14.36. По хоризонталној равни може да клизи без трења призма масе m_1. По стрмој равни призме нагиба α може да клизи, такође без трења, тело масе m_2. Тела су повезана опругама крутости c_1, c_2 и c_3 (видети слику). Узимајући за генералисане коорд. x (померање призме дуж хоризонталне равни) и ξ (померање тела по призми), поставити диференцијалне једначине кретања ако су у положају $x=\xi=0$ опруге ненапрегнуте.





$q_1 = x$, $q_2 = \xi$

* ОПРУГЕ СУ НЕНАПРЕГНУТЕ ЗА $x=\xi=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot \xi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi} = Q_\xi$$

$$E_k = E_k^{I} + E_k^{II}$$

$\boxed{\text{ТРАНС.}}$ $E_k^{I} = \frac{1}{2}m_1 v_T^2 = \frac{1}{2}m_1\dot x^2$

$\boxed{\text{СЛОЖ. ТРАНС.}}$ $E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2 v_{C_{APS}}^2$, $\vec v_{C_{APS}} = \vec v_T + \vec v_{Crel} \;/\vec i / \vec j$, $v_T = \dot x$, $v_{Crel} = \dot \xi$

$$v_{C_{APS}x} = v_T + v_{Crel}\cos\alpha = \dot x + \dot\xi\cos\alpha$$
$$v_{C_{APS}y} = -v_{Crel}\sin\alpha = -\dot\xi\sin\alpha$$
$$v_{C_{APS}}^2 = v_{C_{APS}x}^2 + v_{C_{APS}y}^2 = \dot x^2 + 2\dot x\dot\xi\cos\alpha + \dot\xi^2\cos^2\alpha + \dot\xi^2\sin^2\alpha$$
$$v_{C_{APS}}^2 = \dot x^2 + 2\dot x\dot\xi\cos\alpha + \dot\xi^2$$

$$E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2\left(\dot x^2 + 2\dot x\dot\xi\cos\alpha + \dot\xi^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot x^2 + m_2\dot x\dot\xi\cos\alpha + \frac{1}{2}m_2\dot\xi^2$$

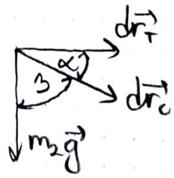
$\delta A(m_1\vec g) = m_1\vec g\cdot d\vec r_T = 0$, $m_1\vec g \perp d\vec r_T$

$\delta A(\vec F_{c_1}) = \vec F_{c_1}\cdot d\vec r_A = -F_{c_1}dx = -c_1 x\,dx \Rightarrow Q_x^{F_{c_1}} = -c_1 x$

$\delta A(m_2\vec g) = m_2\vec g\cdot d\vec r_C = m_2\vec g\cdot(d\vec r_{Cp} + d\vec r_{Cr}) = m_2\vec g\cdot(d\vec r_T + d\vec r_{Cr})$

$= \underbrace{\cancel{m_2\vec g\cdot d\vec r_T}}_{0} + m_2\vec g\cdot d\vec r_{Cr} = m_2 g\,dr_{Cr}\cos\beta$, $dr_{Cr} = d\xi$

$= m_2 g\sin\alpha\,d\xi \Rightarrow Q_\xi^{m_2 g} = m_2 g\sin\alpha$



* ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛА $\vec N$ и $(\vec N_1, \vec N_1')$ ЈЕ ЈЕДНАК НУЛИ ЈЕР СЕ РАДИ О ИДЕАЛНИМ ВЕЗАМА

$$E_{p2} = \frac{1}{2}c_2(-\xi)^2 = \frac{1}{2}c_2\xi^2$$

$$Q_x^{\vec{F}_{c2}, \vec{F}_{c2}'} = -\frac{\partial E_{p2}}{\partial x} = 0$$

$$Q_\xi^{\vec{F}_{c2}, \vec{F}_{c2}'} = -\frac{\partial E_{p2}}{\partial \xi} = -c_2\xi$$

$$E_{p3} = \frac{1}{2}c_3\xi^2$$

$$Q_x^{\vec{F}_{c3}, \vec{F}_{c3}'} = 0$$

$$Q_\xi^{\vec{F}_{c3}, \vec{F}_{c3}'} = -\frac{\partial E_{p3}}{\partial \xi} = -c_3\xi$$

$$Q_x = -c_1 x$$

$$Q_\xi = m_2 g \sin\alpha - c_2\xi - c_3\xi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2\dot{\xi}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\cos\alpha\,\ddot{\xi}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}} = m_2\cos\alpha\,\dot{x} + m_2\dot{\xi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}}\right) = m_2\cos\alpha\,\ddot{x} + m_2\ddot{\xi}$$

$$\left.\begin{aligned} &(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\cos\alpha\,\ddot{\xi} + c_1 x = 0 \\ &m_2\cos\alpha\,\ddot{x} + m_2\ddot{\xi} - m_2 g\sin\alpha + c_2\xi + c_3\xi \end{aligned}\right\}$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА