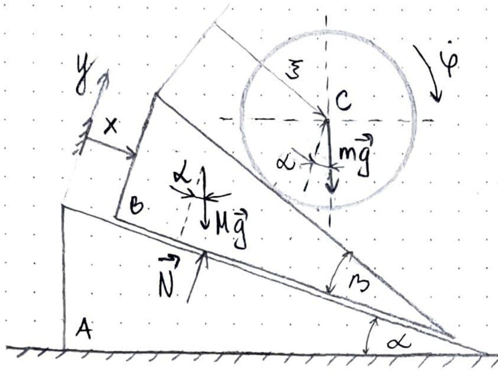
14.1. По непокретној глаткој стрмој равни A клизи без трења призма B масе M, а по призми се котрља без клизања хомогени ваљак C масе m. Написати диференцијалне једначине кретања система.



ПРИЗМА B ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ. ⇒ $q_1 = x$

ВАЉАК C ⇒ РАВНО СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ

РЕЛАТИВНО КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА

↳ $\xi = R\varphi$ ⇒ 1 СТ. СЛ. ⇒ $q_2 = \xi$

$\dot\varphi$ ⇒ АПСОЛУТНА УГАОНА БРЗИНА ЈЕР ЈЕ ПРЕНОСНО КР. ТРАНСЛ.

СИСТЕМ ИМА 2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

СВЕ ВЕЗЕ СУ СТАЦИОНАРНЕ ГЕОМ. ⇒ $\delta\vec r = d\vec r$

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

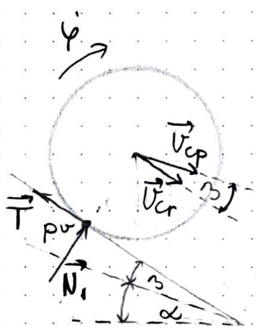
$$(2)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi} = Q_\xi$$

$$E_k = E_k^B + E_k^C$$

$$E_k^B = \frac{1}{2} M \dot x^2$$

$$E_k^C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\dot\varphi^2 \quad , \quad J_{Cz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\vec v_C = \vec v_{Cp} + \vec v_{Cr} \;/\; \vec \lambda / \vec \mu$$



$v_{Cp} = \dot x$

$v_{Cr} = \dot\xi$

$\xi:\ v_{C\xi} = v_{Cp}\cos\beta + v_{Cr}$

$\eta:\ v_{C\eta} = v_{Cp}\sin\beta$

$\dot\xi = R\dot\varphi \Rightarrow \dot\varphi = \frac{\dot\xi}{R}$

$$v_C^2 = v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2$$
$$= \dot x^2\cos^2\beta + 2\dot\xi\dot x\cos\beta + \dot\xi^2 + \dot x^2\sin^2\beta$$
$$v_C^2 = \dot x^2 + 2\dot\xi\dot x\cos\beta + \dot\xi^2$$

$$E_k^C = \frac{1}{2} m\left(\dot x^2 + 2\dot\xi\dot x\cos\beta + \dot\xi^2\right) + \frac{1}{4} m\dot\xi^2$$

$$(3)\quad E_k = \frac{1}{2}(M+m)\dot x^2 + m\dot\xi\dot x\cos\beta + \frac{3}{4} m\dot\xi^2$$

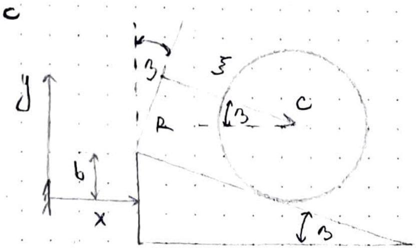
$$\delta A(\vec N) = 0 \;,\; \delta A(\vec N_1, \vec N_1') = 0 \;,\; \delta A(\vec T, \vec T') = 0$$

$$\delta A(M\vec g) = M\vec g \cdot d\vec r_B = \left(Mg\sin\alpha\,\vec i - Mg\cos\alpha\,\vec j\right)\cdot\left(dx\,\vec i\right)$$
$$= Mg\sin\alpha\, dx \Rightarrow Q_x^{Mg} = Mg\sin\alpha \quad (4)$$

$$\delta A(m\vec g) = m\vec g \cdot d\vec r_C = \left(mg\sin\alpha\,\vec i - mg\cos\alpha\,\vec j\right)\cdot\left(dx_C\,\vec i + dy_C\,\vec j\right)$$
$$= mg\sin\alpha\, dx_C - mg\cos\alpha\, dy_C$$

$x_C = x + R\sin\beta + \xi\cos\beta \Rightarrow dx_C = dx + \cos\beta\, d\xi$

$y_C = b + R\cos\beta - \xi\sin\beta \Rightarrow dy_C = -\sin\beta\, d\xi$



$$\delta A(m\vec g) = mg\sin\alpha\, dx + mg\sin\alpha\cos\beta\, d\xi$$
$$+ mg\sin\beta\cos\alpha\, d\xi$$
$$= mg\sin\alpha\, dx + mg\sin(\alpha+\beta)\, d\xi \Rightarrow Q_x^{mg} = mg\sin\alpha \quad (5) \;,\; Q_\xi^{mg} = mg\sin(\alpha+\beta) \quad (6)$$

(3) → ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ ПРЕМА (1);(2)

(7) $\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\cos\beta\,\dot{\xi}$

(8) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\cos\beta\,\ddot{\xi}$

(9) $\frac{\partial E_k}{\partial \xi} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}} = m\cos\beta\,\dot{x} + \frac{3}{2}m\dot{\xi}$

(10) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}}\right) = m\cos\beta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{\xi}$

(4); (5), (7), (8) → (1) ⇒ $(M+m)\ddot{x} + m\cos\beta\,\ddot{\xi} = Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha$

(6); (9), (10) ⟶ (2) ⇒ $m\cos\beta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{\xi} = mg\sin(\alpha+\beta)$

$$\left.\begin{aligned} &(M+m)\ddot{x} + m\cos\beta\,\ddot{\xi} - (M+m)g\sin\alpha = 0 \\ &m\cos\beta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{\xi} - mg\sin(\alpha+\beta) = 0 \end{aligned}\right\}$$ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА