ВЕЖБЕ – ЛАГРАНЖЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГЕ ВРСТЕ

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j}\ , \quad j = 1, 2, \ldots, n \ , \quad n \Rightarrow \text{број степени слободе}$$

E_k ⇒ КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА СИСТЕМА У ФУНКЦИЈИ ГЕНЕРАЛИСАНИХ КООРД. И БРЗИНА

q_j ⇒ ГЕНЕРАЛИСАНЕ КООРДИНАТЕ ⇒ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНИ СКАЛАРНИ ПАРАМЕТРИ КОЈИМА СЕ ОПИСУЈЕ КРЕТАЊЕ СИСТЕМА

$\dot{q}_j$ ⇒ ГЕНЕРАЛИСАНЕ БРЗИНЕ

Q_j ⇒ ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ

ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ СЕ МОГУ ОДРЕДИТИ ИЗ ВИРТУАЛНОГ ЕЛЕМЕНТАРНОГ РАДА СИЛА:

$\delta' A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$ ⇒ ВИРТУАЛНИ РАД СИЛЕ НА ЕЛЕМЕНТАРНОМ ВИРТУАЛНОМ ПОМЕРАЊУ ЊЕНЕ НАПАДНЕ ТАЧКЕ

$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ⇒ ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛЕ НА ЕЛЕМЕНТАРНОМ ПОМЕРАЊУ ЊЕНЕ НАПАДНЕ ТАЧКЕ

$\delta\vec{r}$ ⇒ ЕЛЕМ. ВИРТ. ПОМЕРАЊЕ ⇒ СВАКО МОГУЋЕ (ВЕЗАМА ДОЗВОЉЕНО) ПОМЕРАЊЕ У ТРЕНУТКУ t

$d\vec{r}$ ⇒ ЕЛЕМЕНТАРНО ПОМЕРАЊЕ ⇒ СТВАРНО ПОМЕРАЊЕ ДО КОГА ДОЛАЗИ ПОД ДЕЈСТВОМ СИЛА НА ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ $t + \Delta t$

! КАДА СУ ВЕЗЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ, СТАЦИОНАРНЕ И ЗАДРЖАВАЈУЋЕ СТВАРНО ПОМЕРАЊЕ ЈЕ ИЗ СКУПА МОГУЋИХ. $d\vec{r}$ ЈЕ ИЗ СКУПА $\delta\vec{r}$

ФОРМАЛНО ВИРТУАЛНИ РАД $\delta' A$ ЈЕДНАК ЈЕ ЕЛЕМЕНТАРНОМ РАДУ δA КАДА ОПЕРАТОР δ ПРЕЛАЗИ У ОПЕРАТОР d, И ОБРНУТО
(ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД ЈЕ ИЗ СКУПА ВИРТУАЛНИХ)

* ЗА СИСТЕМ СА 2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ ЧИЈЕ ЈЕ КРЕТАЊЕ ОДРЕЂЕНО ГЕНЕРАЛИСАНИМ КООРДИНАТАМА q_1 И q_2:

$$\delta' A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2$$

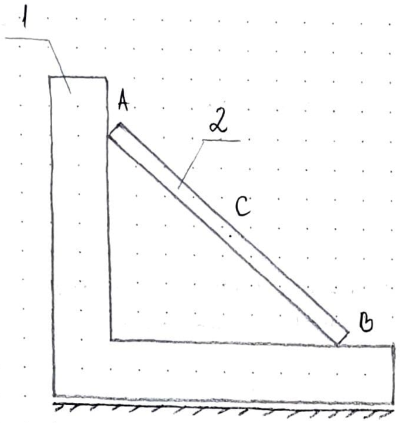
$$\delta A = Q_1 d q_1 + Q_2 d q_2$$

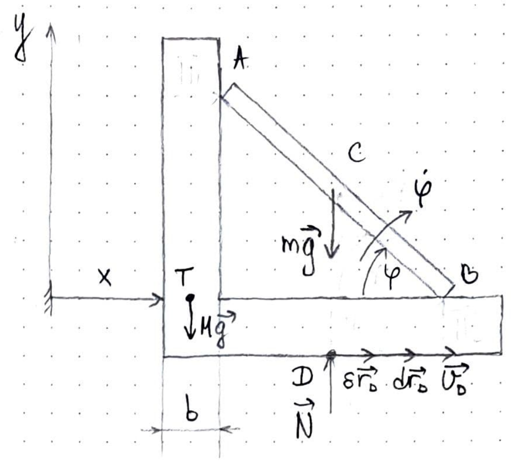
ГДЕ СУ Q_1 И Q_2 ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ

КАДА ОПЕРАТОР d ПРЕЛАЗИ У ОПЕРАТОР δ ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ СЕ МОГУ ОДРЕДИТИ ИЗ ЕЛЕМЕНТАРНОГ РАДА

* ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ КОЈЕ ПОТИЧУ ОД ПОТЕНЦИЈАЛНИХ СИЛА МОГУ ДА СЕ ОДРЕДЕ ПРЕКО ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ $\quad Q_j = -\dfrac{\partial E_p}{\partial q_j}$

14.4. Систем се састоји од тела 1 масе M и хомогеног штапа 2 масе m и дужине l. Тело 1 клизи по глаткој хоризонталној равни, а штап 2 крајем A по вертикалној и крајем B по глаткој хоризонталној површи тела 1. Написати диференцијалне једначине кретања тела.





ТЕЛО 1 ⇒ ТАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТЕПЕН СЛОБ. ⇒ $q_1 = x$

ТЕЛО 2 ⇒ РАВНО СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ

РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ ШТАПА МОЖЕ СЕ ОПИСАТИ КООРДИНАТОМ φ ⇒ 1 СТЕПЕН СЛОБОДЕ ⇒ $q_2 = \varphi$

* УГАО φ ЈЕ АПСОЛУТНИ УГАО ОБРТАЊА ШТАПА ЈЕР ТЕЛО 1 ТРАНСЛИРА

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x \\[2ex] (2) & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi\end{array}\right\}$$ ЛАГРАНЖЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГЕ ВРСТЕ

$E_k = E_k^{I} + E_k^{II}$ ⇒ УКУПНА КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА СИСТЕМА

$\boxed{\text{ТРАНС.}}$ $E_k^{I} = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ ⇒ КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА ТЕЛА 1

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^{II} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2$, $J_{Cz} = \frac{1}{12}ml^2$

$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$

$x_C = x + b + \frac{1}{2}l\cos\varphi \Rightarrow \dot{x}_C = \dot{x} - \frac{1}{2}l\dot{\varphi}\sin\varphi$

$y_C = \frac{1}{2}l\sin\varphi \Rightarrow \dot{y}_C = \frac{1}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi$

$v_C^2 = \dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$

$v_C^2 = \dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2$

$E_k^{II} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2$

$E_k^{II} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$ ⇒ КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА ТЕЛА 2

(3) $E_k = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$ ⇒ КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА СИСТЕМА

ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕНЕРАЛИСАНИХ СИЛА

$\delta A(\vec{N}) = \vec{N} \cdot d\vec{r}_D$ ⇒ ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛЕ $\vec{N}$

$\delta' A(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \delta\vec{r}_D$ ⇒ ВИРТУАЛНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛЕ $\vec{N}$

$\delta\vec{r}_D$ ⇒ ВИРТУАЛНО ПОМЕРАЊЕ НАПАДНЕ ТАЧКЕ СИЛЕ $\vec{N}$

! СВЕ ВЕЗЕ У СИСТЕМУ СУ ГЕОМЕТРИЈСКЕ И СТАЦИОНАРНЕ И ЗБОГ ТОГА ЈЕ $d\vec{r}$ ИЗ СКУПА $\delta\vec{r}$

$d\vec{r}_D \perp \vec{N} \Rightarrow \delta A(\vec{N}) = 0 = Q_x\, dx + Q_\varphi\, d\varphi$

$\delta\vec{r}_D \perp \vec{N} \Rightarrow \delta' A(\vec{N}) = 0 = Q_x\, \delta x + Q_\varphi\, \delta\varphi$ ⇒ ПОШТО СУ ВАРИЈАЦИЈЕ ГЕНЕРАЛИСАНИХ КООРДИНАТА НЕЗАВИСНЕ

ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ КОЈЕ ПОТИЧУ ОД СИЛЕ $\vec{N}$ СУ ЈЕДНАКЕ НУЛИ

$Q_x^N = 0 \quad , \quad Q_\varphi^N = 0$

* РАД УНУТРАШЊИХ СИЛА КОЈЕ ПРЕДСТАВЉАЈУ РЕАКЦИЈЕ ИДЕАЛНИХ ВЕЗА У ТАЧКАМА A И B ЈЕ ЈЕДНАК НУЛИ

$\delta' A(M\vec{g}) = M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_T = (-Mg\vec{j}) \cdot (\delta x_T \vec{i}) = 0$

$\delta' A(M\vec{g}) = Q_x\, \delta x + Q_\varphi\, \delta\varphi = 0 \Rightarrow Q_x^{Mg} = 0 \;,\; Q_\varphi^{Mg} = 0$

$\delta' A(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_C = (-mg\vec{j}) \cdot (\delta x_C \vec{i} + \delta y_C \vec{j}) = -mg\, \delta y_C$

$\delta A(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r}_C = (-mg\vec{j}) \cdot (dx_C \vec{i} + dy_C \vec{j}) = -mg\, dy_C$

$y_C = \frac{1}{2} l \sin\varphi \Rightarrow dy_C = \frac{1}{2} l \cos\varphi\, d\varphi \;,\; \delta y_C = \frac{1}{2} l \cos\varphi\, \delta\varphi$

$\delta' A(m\vec{g}) = -\frac{1}{2} mgl \cos\varphi\, \delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{mg} = -\frac{1}{2} mgl \cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= 0 \\ Q_\varphi &= -\frac{1}{2} mgl \cos\varphi \end{aligned}\right.$$

(3) → ДИФЕРЕНЦИРАМО ПРЕМА ПОТРЕБИ ЗА ЈЕДНАЧИНЕ (1) И (2)

(5) $\dfrac{\partial E_k}{\partial x} = 0 \qquad E_k \neq f(x)$

$\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} - \frac{1}{2} ml \dot{\varphi} \sin\varphi$ ⇒ ИЗВОД ПО $\dot{x}$, СВЕ ОСТАЛО СЕ ПОСМАТРА КАО const.

(6) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} - \frac{1}{2} ml (\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi)$ ⇒ ИЗВОД ПО ВРЕМЕНУ СЕ ОДНОСИ НА СВЕ ВЕЛИЧИНЕ КОЈЕ ЗАВИСЕ ОД t

(7) $\dfrac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} ml \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi$

$\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{1}{2} ml \dot{x} \sin\varphi + \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}$

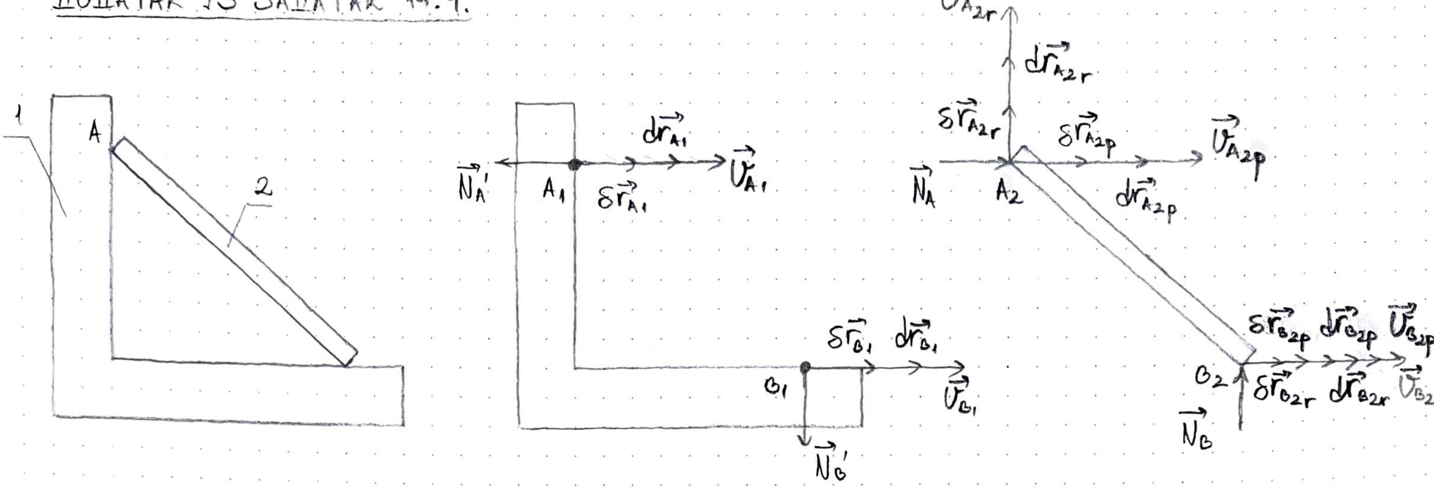
(8) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{1}{2} ml (\ddot{x} \sin\varphi + \dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi) + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}$

(5),(6) → (1) ⇒ $(M+m)\ddot{x} - \frac{1}{2} ml (\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) = 0$

(4),(7),(8) → (2) ⇒ $-\frac{1}{2} ml (\ddot{x} \sin\varphi + \cancel{\dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi}) + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} + \cancel{\frac{1}{2} ml \dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi} = -\frac{1}{2} mgl \cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} - \frac{1}{2} ml \ddot{\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{2} ml \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = 0 \\ \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} ml \ddot{x} \sin\varphi + \frac{1}{2} mgl \cos\varphi = 0 \end{aligned}\right\}$$ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА

ПОДАТАК УЗ ЗАДАТАК 14.4.



$$\delta' A(\vec{N}_A') = \vec{N}_A' \cdot \delta\vec{r}_{A_1}$$

* $\delta\vec{r}_{A_1}$ ЈЕ КОЛИНЕАРНО СА $d\vec{r}_{A_1}$ ЈЕР ЈЕ $d\vec{r}_{A_1}$ ИЗ СКУПА СВИХ МОГУЋИХ, ВЕЗАМА ДОЗВОЉЕНИХ, ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА

$$\delta\vec{r}_{A_2p} = \delta\vec{r}_{A_1}$$

$$\delta' A(\vec{N}_A) = \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_A = \vec{N}_A \cdot \left(\delta\vec{r}_{A_2p} + \delta\vec{r}_{A_2r}\right) = \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_2p} + \underbrace{\cancel{\vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_2r}}}_{0}$$

$$\delta\vec{r}_{A_2r} \perp \vec{N}_A$$

$$= \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_1}$$

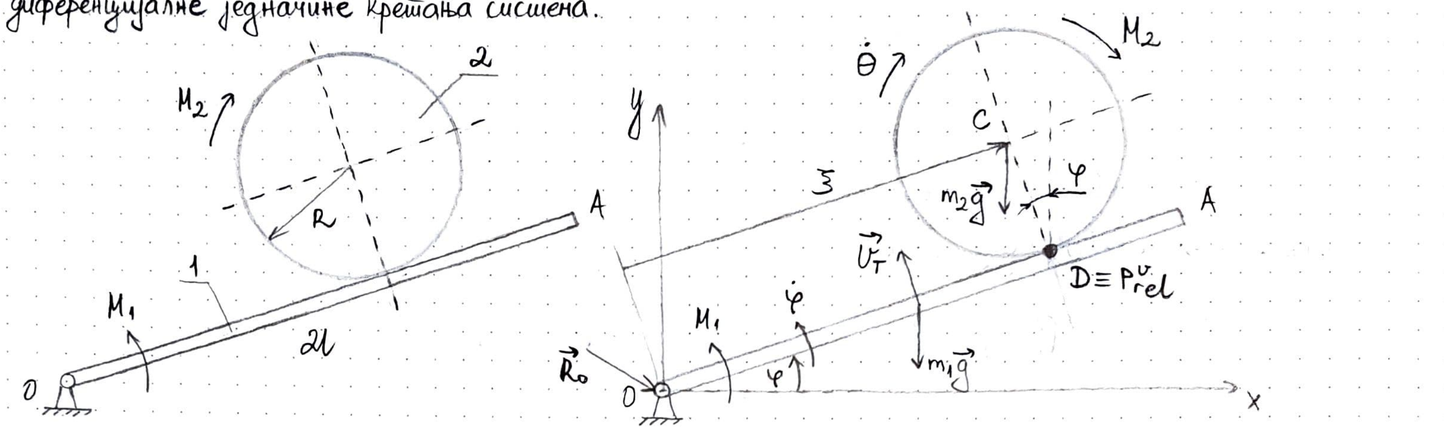
$$\delta' A(\vec{N}_A, \vec{N}_A') = \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_1} + \vec{N}_A' \cdot \delta\vec{r}_{A_1} \quad , \quad \vec{N}_A = -\vec{N}_A'$$

$$= \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_1} - \vec{N}_A \cdot \delta\vec{r}_{A_1} = 0$$

$$\delta' A(\vec{N}_B') = \vec{N}_B' \cdot \delta\vec{r}_{B_1} = 0 \quad , \quad \delta\vec{r}_{B_1} \perp \vec{N}_B'$$

$$\delta' A(\vec{N}_B) = \vec{N}_B \cdot \delta\vec{r}_{B_2} = \vec{N}_B \cdot \left(\delta\vec{r}_{B_2p} + \delta\vec{r}_{B_2r}\right) = 0 \quad , \quad \delta\vec{r}_{B_2p} \perp \vec{N}_B \quad , \quad \delta\vec{r}_{B_2r} \perp \vec{N}_B$$

14.7. Систем приказан сликом креће се у вертикалној равни. На штап OA дужине $2l$ и масе m_1 који може да се обрће око хоризонталне осе O делује спрег момента M_1. На хомогени диск масе m_2 и полупречника R који може да се котрља без клизања по штапу OA делује спрег момента M_2. Написати диференцијалне једначине кретања система.

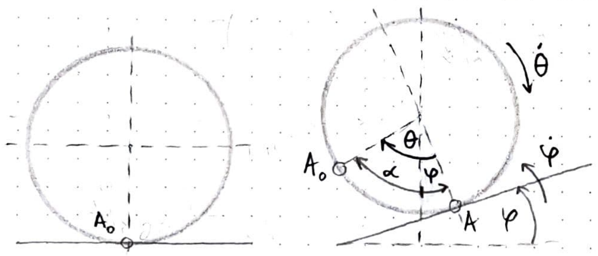


ШТАП ⇒ РОТАЦИЈА ⇒ 1 СТЕПЕН СЛОБ. ⇒ $q_1 = \varphi$ ⟶ СИСТЕМ ИМА 2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

ДИСК ⇒ РАВНО СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ

* РЕЛАТИВНО КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА МОЖЕ СЕ ОПИСАТИ КООРД. ξ или θ } $\xi = R\theta$ ⇒ 1 СТ. СЛОБ ⇒ $q_2 = \xi$

* И КООРДИНАТА ξ И КООРДИНАТА θ СУ РЕЛАТИВНЕ КООРДИНАТЕ



$\dot\theta$ ЈЕ РЕЛАТИВНА УГАОНА БРЗИНА ДИСКА У ОДНОСУ НА ШТАП. ДИСК ИМА И ПРЕНОСНУ УГАОНУ БРЗИНУ ТЈ. УГАОНУ БРЗИНУ ШТАПА $\dot\varphi$.

⟶ $\alpha = \theta - \varphi \;/\frac{d}{dt} \Rightarrow \dot\alpha = \dot\theta - \dot\varphi$ ⇒ АПСОЛУТНА УГАОНА БРЗИНА ДИСКА

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi \\ (2)\quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi} = Q_\xi\end{aligned}\right\}$$ Лагранжеве ј-чине друге врсте

$$E_k = E_k^{I} + E_k^{II}$$

$\boxed{\text{РОТ.}}$ $E_k^{I} = \frac{1}{2} J_{Oz}\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1(2l)^2\dot\varphi^2 = \frac{2}{3}m_1 l^2\dot\varphi^2$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2 v_c^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\underbrace{(\dot\theta - \dot\varphi)^2}_{\text{АПСОЛУТНА УГАОНА БРЗИНА ДИСКА}}$, $J_{Cz} = \frac{1}{2}m_2R^2$, $\dot\xi = \overline{CP^v_{rel}}\,\dot\theta = R\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{\dot\xi}{R}$

$$v_c^2 = \dot x_c^2 + \dot y_c^2$$

$$x_c = \xi\cos\varphi - R\sin\varphi \Rightarrow \dot x_c = \dot\xi\cos\varphi - \xi\dot\varphi\sin\varphi - R\dot\varphi\cos\varphi$$

$$y_c = \xi\sin\varphi + R\cos\varphi \Rightarrow \dot y_c = \dot\xi\sin\varphi + \xi\dot\varphi\cos\varphi - R\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}v_c^2 = {} & \dot\xi^2\cos^2\varphi + \xi^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + R^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi - \cancel{2\xi\dot\xi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi} - 2R\dot\xi\dot\varphi\cos^2\varphi \\ & + \cancel{2R\xi\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi} + \dot\xi^2\sin^2\varphi + \xi^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + R^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi \\ & + \cancel{2\xi\dot\xi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi} - 2R\dot\xi\dot\varphi\sin^2\varphi - \cancel{2R\xi\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi}\end{aligned}$$

$$v_c^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\varphi^2 - 2R\dot\xi\dot\varphi$$

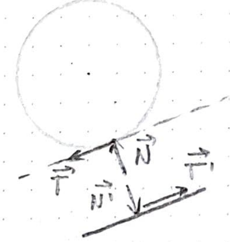
$$E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2\left(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\varphi^2 + R^2\dot\varphi^2 - 2R\dot\xi\dot\varphi\right) + \frac{1}{4}m_2R^2\left(\frac{\dot\xi}{R} - \dot\varphi\right)^2$$

(3) $E_k = \frac{2}{3}m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\varphi}\right) + \frac{1}{4}m_2R^2\left(\frac{\dot{\xi}}{R} - \dot{\varphi}\right)^2$

ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕНЕРАЛИСАНИХ СИЛА * $d\vec{r}$ ЈЕ ИЗ СКУПА $\delta\vec{r}$

$\delta' A(\vec{R}_0) = \vec{R}_0 \cdot \delta\vec{r}_0 = 0$, $\delta\vec{r}_0 = 0$ ЈЕР СЕ РАДИ О НЕПОКРЕТНОМ ОСЛОНЦУ

* РАД ПАРОВА УНУТРАШЊИХ СИЛА КОЈЕ СЕ ЈАВЉАЈУ ПРИ КОТРЉАЊУ БЕЗ КЛИЗАЊА ДИСКА ($\vec{N}$ и $\vec{N}'$, КАО И $\vec{T}$ и $\vec{T}'$) ЈЕДНАК ЈЕ НУЛИ ЈЕР СЕ РАДИ О ИДЕАЛНОЈ ВЕЗИ.



$\delta A(\vec{N}, \vec{N}') = 0$

$\delta A(\vec{T}, \vec{T}') = 0$

$\delta' A(\vec{M}_1) = M_1\delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{M_1} = M_1$ (4)

$\delta' A(\vec{M}_2) = M_2\delta\alpha = M_2(\delta\theta - \delta\varphi) = M_2\left(\frac{\delta\xi}{R} - \delta\varphi\right)$

$\delta A(\vec{M}_2) = M_2 d\alpha = M_2(d\theta - d\varphi) = M_2\left(\frac{d\xi}{R} - d\varphi\right)$

$\Rightarrow Q_\xi^{M_2} = \frac{M_2}{R}$ (5) , $Q_\varphi^{M_2} = -M_2$ (6)

$\delta' A(m_1\vec{g}) = m_1\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_T = (-m_1 g\vec{j})\cdot(\delta x_T\vec{i} + \delta y_T\vec{j}) = -m_1 g\,\delta y_T$

$\delta A(m_1\vec{g}) = m_1\vec{g}\cdot d\vec{r}_T = (-m_1 g\vec{j})\cdot(dx_T\vec{i} + dy_T\vec{j}) = -m_1 g\,dy_T$

$y_T = l\sin\varphi \Rightarrow dy_T = l\cos\varphi\, d\varphi$, $\delta y_T = l\cos\varphi\,\delta\varphi$

$\delta' A(m_1\vec{g}) = -m_1 g l\cos\varphi\,\delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{m_1 g} = -m_1 g l\cos\varphi$ (7)

$\delta' A(m_2\vec{g}) = m_2\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_c = (-m_2 g\vec{j})\cdot(\delta x_c\vec{i} + \delta y_c\vec{j}) = -m_2 g\,\delta y_c$

$\delta A(m_2\vec{g}) = m_2\vec{g}\cdot d\vec{r}_c = (-m_2 g\vec{j})\cdot(dx_c\vec{i} + dy_c\vec{j}) = -m_2 g\,dy_c$

$y_c = \xi\sin\varphi + R\cos\varphi \Rightarrow dy_c = \sin\varphi\, d\xi + \xi\cos\varphi\, d\varphi - R\sin\varphi\, d\varphi$, $\delta y_c = \dots$

$\delta' A(m_2\vec{g}) = -m_2 g\sin\varphi\,\delta\xi - m_2 g\xi\cos\varphi\,\delta\varphi + m_2 g R\sin\varphi\,\delta\varphi$

$\hookrightarrow Q_\xi^{m_2 g} = -m_2 g\sin\varphi$ (8) $\hookrightarrow Q_\varphi^{m_2 g} = -m_2 g\xi\cos\varphi + m_2 g R\sin\varphi$ (9)

$Q_\xi = \frac{M_2}{R} - m_2 g\sin\varphi$, $Q_\varphi = M_1 - M_2 - m_1 g l\cos\varphi - m_2 g\xi\cos\varphi + m_2 g R\sin\varphi$

(10) $\frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{4}{3}m_1 l^2\dot{\varphi} + m_2\xi^2\dot{\varphi} + \frac{3}{2}m_2R^2\dot{\varphi} - \frac{3}{2}m_2R\dot{\xi}$

(11) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{4}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi} + 2m_2\xi\dot{\xi}\dot{\varphi} + m_2\xi^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}m_2R^2\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\xi}$

(12) $\frac{\partial E_k}{\partial\xi} = m_2\xi\dot{\varphi}^2$

$\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\xi}} = \frac{3}{2}m_2\dot{\xi} - \frac{3}{2}m_2R\dot{\varphi}$

(13) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\xi}}\right) = \frac{3}{2}m_2\ddot{\xi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi}$

(4), (6), (7), (9), (10), (11) $\rightarrow$ (1) $\Rightarrow \frac{4}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi} + 2m_2\xi\dot{\xi}\dot{\varphi} + m_2\xi^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}m_2R^2\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\xi} =$

$= M_1 - M_2 - m_1 g l\cos\varphi - m_2 g\xi\cos\varphi + m_2 g R\sin\varphi$

(5), (8), (12), (13) $\rightarrow$ (2) $\Rightarrow \frac{3}{2}m_2\ddot{\xi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi} - m_2\xi\dot{\varphi}^2 = \frac{M_2}{R} - m_2 g\sin\varphi$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{4}{3}m_1 l^2 + m_2\xi^2 + \frac{3}{2}m_2R^2\right)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\xi} + 2m_2\xi\dot{\xi}\dot{\varphi} - M_1 + M_2 + m_1 g l\cos\varphi + m_2 g\xi\cos\varphi - m_2 g R\sin\varphi = 0\\ &\frac{3}{2}m_2\ddot{\xi} - \frac{3}{2}m_2R\ddot{\varphi} - m_2\xi\dot{\varphi}^2 - \frac{M_2}{R} + m_2 g\sin\varphi = 0\end{aligned}\right\} \text{Д.Ј.}$$