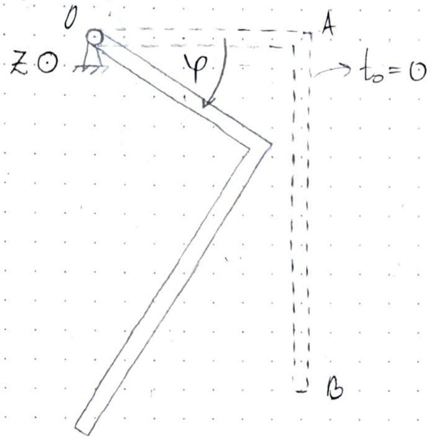
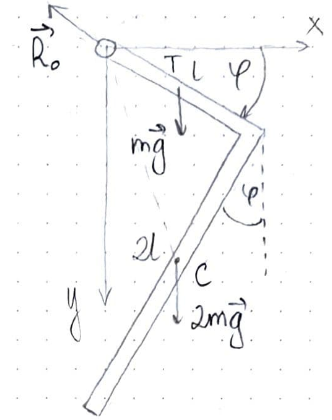
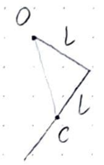
10.5. Правоугли угаоник OAB, састављен од два танка хомогена штапа OA и AB дужина l и $2l$ и маса m и $2m$, респективно, може да се обрће око хоризонталне осе Oz управне на раван угаоника. У почетном тренутку штап OA био је хоризонталан, а угаоник је мировао. Одредити угаону брзину и угаоно убрзање угаоника као и реакцију зглоба у тачки O у зависности од угла обртања φ.





$\dot\varphi, \ddot\varphi, R_o = f(\varphi) \ldots ?$



$\overline{OC}^2 = l^2 + l^2$

$\Downarrow$

за Штајнерову теорему

→ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА НЕПОКРЕТНУ ОСУ Oz

(1) $\oplus \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \Sigma M_{Oz}(\vec F_i^s) = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + 2mg(l\cos\varphi - l\sin\varphi) = mgl\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right)$

$\mathcal{L}_{Oz} = \mathcal{L}_{Oz}^{OA} + \mathcal{L}_{Oz}^{AB}$

$\mathcal{L}_{Oz}^{OA} = J_{Oz}\dot\varphi = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi$

Штајнерова теорема

$\mathcal{L}_{Oz}^{AB} = J_{Oz}\dot\varphi = \left[J_{Cz'} + 2m(l^2+l^2)\right]\dot\varphi = \left[\frac{1}{12}2m(2l)^2 + 4ml^2\right]\dot\varphi = \frac{14}{3}ml^2\dot\varphi$

$\mathcal{L}_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi + \frac{14}{3}ml^2\dot\varphi = 5ml^2\dot\varphi$

(2) $\frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = 5ml^2\ddot\varphi$

$5ml^2\ddot\varphi = mgl\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) \;/:ml \quad\Rightarrow\quad \underline{\ddot\varphi = \frac{g}{5l}\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) = \ddot\varphi(\varphi)}$

$\ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot\varphi d\dot\varphi}{d\varphi} = \frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi) \;/\cdot d\varphi$

$$\int_0^{\dot\varphi}\dot\varphi d\dot\varphi = \frac{g}{2l}\int_0^{\varphi}\cos\varphi d\varphi - \frac{2g}{5l}\int_0^{\varphi}\sin\varphi d\varphi$$

$$\underline{\dot\varphi^2 = \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{4g}{5l}(\cos\varphi - 1)} \Rightarrow \dot\varphi = f(\varphi)$$

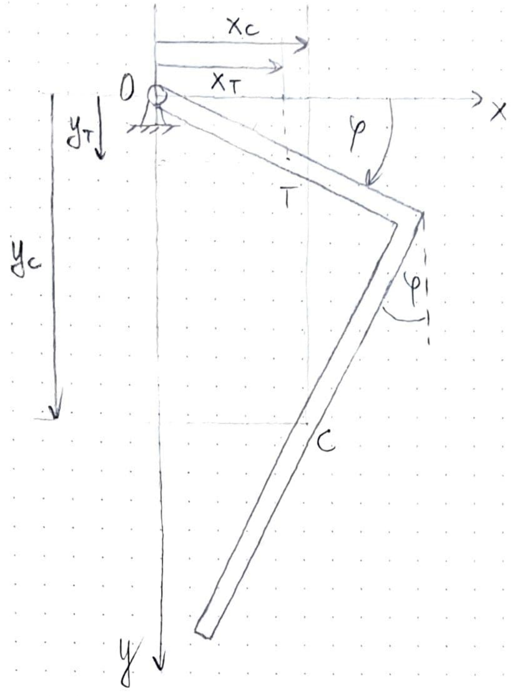
ДА БИСМО ОДРЕДИЛИ $\vec R_o$ ⇒ КОРИСТИМО ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСА ⇒ У ЊЕМУ СЕ ЈАВЉА СУМА СВИХ СИЛА

$3m\vec a_{c_{sis}} = m\vec a_T + 2m\vec a_c = \vec R_o + m\vec g + 2m\vec g \;/\cdot\vec i\;/\cdot\vec j$ → треба нам R_{ox} и $R_{oy} \Rightarrow R_o^2 = R_{ox}^2 + R_{oy}^2$

(3) $x:\; m\ddot x_T + 2m\ddot x_c = -R_{ox}$

(4) $y:\; m\ddot y_T + 2m\ddot y_c = -R_{oy} + 3mg$ → y-оса окренута на доле!

$\ddot x_T, \ddot x_c, \ddot y_T, \ddot y_c \ldots ?$



$$x_T = \frac{l}{2}\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_T = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$y_T = \frac{l}{2}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_T = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$x_C = l\cos\varphi - l\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = l(-\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi) = -l\dot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi)$$
$$y_C = l\sin\varphi + l\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_C = l(\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi) = l\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$

ОДРЕЂЕНО У ПРВОМ ДЕЛУ ЗАДАТКА:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi)$$
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{5l}(5\sin\varphi + 4\cos\varphi - 4)$$

$$(5) \quad \ddot{x}_T = -\frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$
$$(6) \quad \ddot{y}_T = \frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

$$(7) \quad \ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) - l\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi) = -l\left[\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\right]$$
$$(8) \quad \ddot{y}_C = l\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + l\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi) = l\left[\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right]$$

$$(5),(7) \to (3) \quad \Rightarrow \quad R_{Ox} = \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + 2ml\left[\ddot{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\right]$$
$$(6),(8) \to (4) \quad \Rightarrow \quad R_{Oy} = 3mg - \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - 2ml\left[\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right]$$

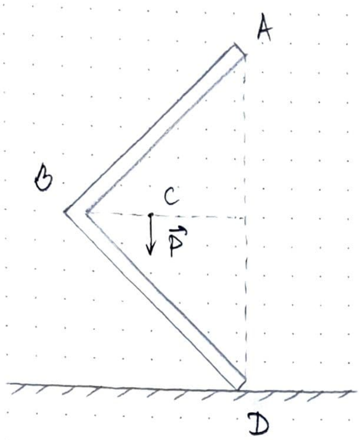
$$R_{Ox} = \left(\frac{5}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{5}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2\ddot{\varphi}\cos\varphi - 2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)ml$$
$$= \left[\ddot{\varphi}\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right) - \dot{\varphi}^2\left(2\sin\varphi - \frac{5}{2}\cos\varphi\right)\right]ml$$
$$= \left[\frac{g}{10l}(5\cos\varphi - 4\sin\varphi)\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right) - \frac{g}{5l}(5\sin\varphi + 4\cos\varphi - 4)\left(2\sin\varphi - \frac{5}{2}\cos\varphi\right)\right]ml$$
$$= \frac{mg}{10}\left(10\cos^2\varphi + \frac{9}{2}\sin\varphi\cos\varphi - 10\sin^2\varphi - 20\sin^2\varphi + 20\cos^2\varphi + 9\sin\varphi\cos\varphi + 16\sin\varphi - 20\cos\varphi\right)$$
$$= \frac{mg}{10}\cdot\frac{1}{2}\left(60\cos^2\varphi + 27\sin\varphi\cos\varphi - 60\sin^2\varphi + 32\sin\varphi - 40\cos\varphi\right)$$

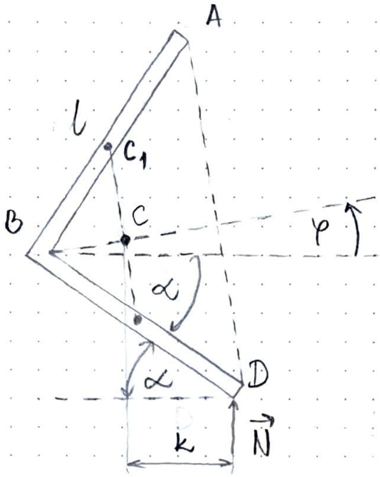
$$\underline{R_{Ox} = \frac{mg}{20}\left(60 - 120\sin^2\varphi + 27\sin\varphi\cos\varphi + 32\sin\varphi - 40\cos\varphi\right)}$$

$$R_{Oy} = 3mg - \left[\ddot{\varphi}\left(\frac{5}{2}\cos\varphi - 2\sin\varphi\right) - \dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\right)\right]ml$$

$$\underline{R_{Oy} = \frac{mg}{20}\left(67 + 27\sin^2\varphi + 120\sin\varphi\cos\varphi - 40\sin\varphi - 32\cos\varphi\right)} \qquad \underline{R_O^2 = R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}$$

10.32. Правоугли угаоник ABD тежине P састављен је од два једнака хомогена штапа дужине l. Крај D угаоника ослања се на глатку хоризонталну раван при чему су тачке A и D на истој вертикали. Угаоник је пуштен да се креће без почетне брзине. Одредити реакцију равни у почетном тренутку.





$\overline{BC}\sqrt{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow \overline{BC} = l\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\overline{CC_1} = \overline{BC}$

$\alpha = 45° - \varphi$

$k = l\cos\alpha - \overline{BC}\cos\varphi$
$= l\cos(45° - \varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4} l\cos\varphi$

$\frac{P}{g}\vec{a}_C = \vec{N} + \vec{P} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$ $\Rightarrow$ КОРИСТИМО ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСА ЈЕР СЕ У ЊЕМУ ЈАВЉА РЕАКЦИЈА РАВНИ (У СУМИ СВИХ СИЛА)

$x: \quad \frac{P}{g}\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const. = \dot{x}_C(0) = 0 \Rightarrow x_C = const. = x_C(0) \quad (1)$

$y: \quad \frac{P}{g}\ddot{y}_C = N - P \Rightarrow N = P + \frac{P}{g}\ddot{y}_C \quad (2)$

$$y_C = l\sin\alpha + l\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$$
$$y_C = l\sin(45° - \varphi) + l\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$$
$$\dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\cos(45° - \varphi) + \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\cos(45° - \varphi) - l\dot{\varphi}^2\sin(45° - \varphi) + \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \quad (3)$$

$(2) \Rightarrow N(0) = P + \frac{P}{g}\ddot{y}_C(0) \quad (4)$

$(3) \Rightarrow \ddot{y}_C(0) = -l\ddot{\varphi}(0)\cos 45° + \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\varphi}(0)$ $\rightarrow$ (јер је $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ (без почетне брзине))

$\ddot{y}_C(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}l\ddot{\varphi}(0) \quad (5)$, $\ddot{\varphi}(0) \ldots ?$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_C}{dt} + \cancel{\vec{v}_C \times m\vec{v}_C}^{\,0} = \vec{M}_C^s \;/\cdot\vec{k}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^s \quad (0)$$

$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot{\varphi}$, $J_{Cz} = 2\left[\frac{1}{12}\frac{P}{2g}l^2 + \frac{P}{2g}(\overline{CC_1})^2\right] = \frac{5}{24}\frac{P}{g}l^2$

$\curvearrowleft + \quad \frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = J_{Cz}\ddot{\varphi} = M_{Cz}(\vec{F}_i^s) = N\cdot k = N\cdot\left[l\cos(45° - \varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\varphi\right]$

$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_{Cz}}N\cdot\left[l\cos(45° - \varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\varphi\right]$

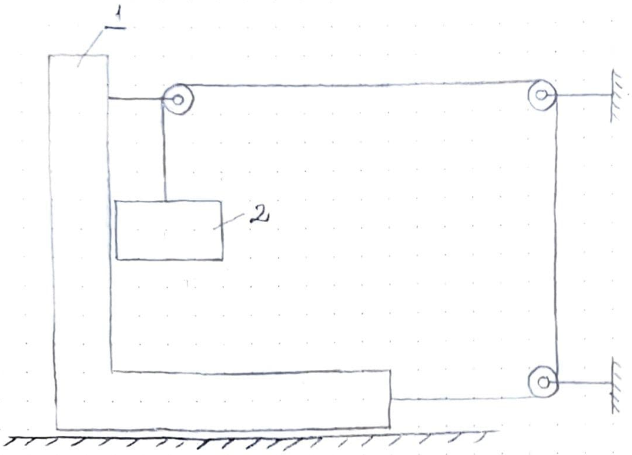
$\ddot{\varphi}(0) = \frac{1}{J_{Cz}}N(0)\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}l\right) = \frac{\cancel{24}^{6}}{5}\frac{g}{P}\frac{1}{l^2}\cdot N(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}l$

* када се ради са $2l$ добија се $N(0) = \frac{5}{17}P$

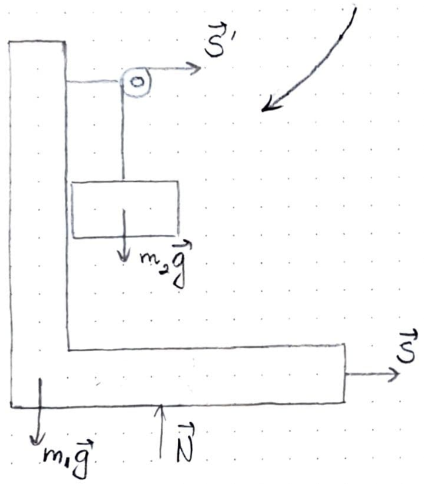
$\ddot{\varphi}(0) = \frac{6\sqrt{2}}{5}\frac{g}{Pl}N(0) \quad (6)$

$(6) \rightarrow (5) \Rightarrow \ddot{y}_C(0) = -\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}_2}l\frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{2}}{5}\frac{g}{Pl}N(0) = -\frac{3}{5}\frac{g}{P}N(0) \rightarrow (4)$ $\underline{N(0) = \frac{5}{8}P}$

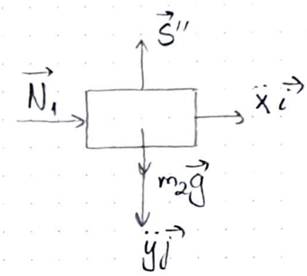
10.29. Платформа 1 масе m_1, која може да се креће по хоризонталној равни, и тело 2 масе m_2 повезани су лаким нерастегљивим ужетом као што је приказано на слици. Занемарујући масе котурова и трење одредити убрзање платформе и силу у ужету.



ПОСМАТРАМО СИСТЕМ КОЈИ СЕ САСТОЈИ ОД ТЕЛА 1 И ТЕЛА 2
(ОСЛОБАЂАМО СЕ ВЕЗА КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА СИСТЕМ)



ТЕЛО 2



$S = S' = S''$

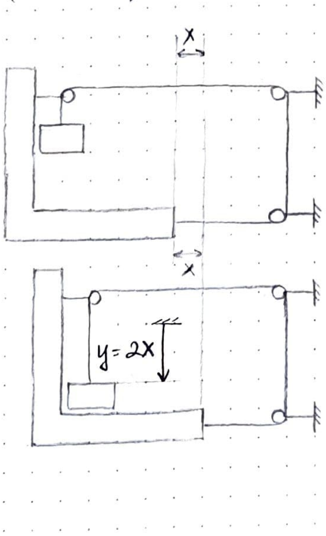
! јер су масе котурова занемарљиве

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{S}'' \;/\cdot \vec{j}$$

$$m_2\ddot{y} = m_2 g - S \quad (1)$$

$$m\vec{a}_c = m_1\vec{g} + \vec{N} + m_2\vec{g} + \vec{S} + \vec{S}' \;/\cdot \vec{i}$$, $m = m_1 + m_2$, $a_{cx} = \ddot{x} \Rightarrow$ ЈЕДИНО УБРЗАЊЕ У ПРАВЦУ $\vec{i}$

(2) $(m_1 + m_2)\ddot{x} = 2S$



ВЕЗА!

$$y = 2x \quad (3) \qquad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 2\ddot{x} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} (4)\rightarrow(1) \Rightarrow \quad & S = m_2 g - 2m_2\ddot{x} \\ (2) \Rightarrow \quad & S = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\ddot{x} \end{aligned}\right\}$$ две једначине са две непознате

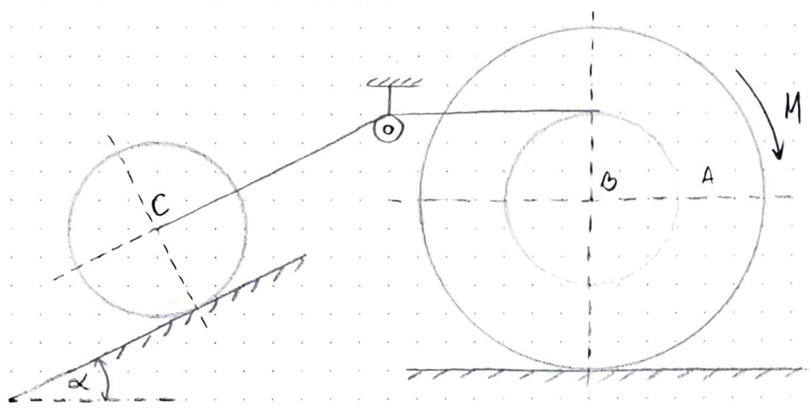
$$m_2 g - 2m_2\ddot{x} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ddot{x}$$

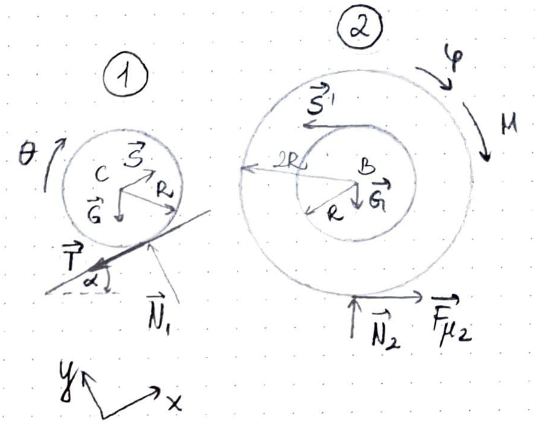
$$\ddot{x} = \frac{2m_2 g}{m_1 + 5m_2}$$

$$S = \frac{m_2(m_1+m_2)g}{m_1 + 5m_2}$$

10.57. Два коаксијална цилиндра, А (полупречника 2R) и B (полупречника R), круто су међусобно спојена. Цилиндар А котрља се по хоризонталној подлози под дејством спрега момента M. Укупна тежина цилиндара А и B је G, а заједнички полупречник инерције за осу симетрије је $i = R\sqrt{2}$. Помоћу ужета које је везано за тачку на обиму цилиндра B доводи се у стање котрљања без клизања точак C, полупречника R и тежине G, чија је маса равномерно распоређена по обиму. Угао нагиба стрме равни по којој се точак C котрља је α. Одредити силу у ужету.

→ ШУПЉИ ЦИЛИНДАР





(2) $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_Q}{dt} + \vec{v}_Q \times \frac{G}{g}\vec{v}_C = \vec{M}_Q^S$ ⇒ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА КОЛ. КР. ЗА ПОКРЕТНИ ПОЛ Q

$Q = P_{v2}$ ⇒ ДА СИЛА $\vec{F}_{\mu 2}$ НЕ ПРАВИ МОМЕНТ

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{P_{v2}}}{dt} + \cancel{\vec{v}_{P_{v2}}}^{\,0} \times \frac{G}{g}\vec{v}_B = \vec{M}^S_{P_{v2}} \;/\cdot\vec{k} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{P_{v2}z}}{dt} = M^S_{P_{v2}z} = M - S'\cdot 3R, \quad S = S'$$ ⇒ КОТУР НЕМА МАСУ

$$\mathcal{L}_{P_{v2}z} = J_{P_{v2}z}\dot\varphi, \quad J_{P_{v2}z} = J_{Bz} + \frac{G}{g}(2R)^2 = \frac{G}{g}i_0^2 + \frac{G}{g}\cdot 4R^2 = 2\frac{G}{g}R^2 + 4\frac{G}{g}R^2 = 6\frac{G}{g}R^2$$

$$\mathcal{L}_{P_{v2}z} = 6\frac{G}{g}R^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{P_{v2}z}}{dt} = 6\frac{G}{g}R^2\ddot\varphi$$

$$6\frac{G}{g}R^2\ddot\varphi = M - 3SR \quad (1)$$

(1) ЗАКОН КРЕТАЊА ЦЕНТРА МАСЕ

$$\frac{G}{g}\vec{a}_C = \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{S} + \vec{T} \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$$

x: $\frac{G}{g}\ddot{x}_C = S - G\sin\alpha - T \quad (2)$

y: $0 = N_1 - G\cos\alpha$ ⇒ НЕПОТРЕБНО

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_Q}{dt} + \vec{v}_Q \times \frac{G}{g}\vec{v}_C = \vec{M}_Q^S, \quad Q \equiv C$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_C}{dt} + \cancel{\vec{v}_C \times \frac{G}{g}\vec{v}_C}^{\,0} = \vec{M}_C^S \;/\cdot\vec{k} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M^S_{Cz} = T\cdot R$$

$$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot\theta = \frac{G}{g}R^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \frac{G}{g}R^2\ddot\theta$$

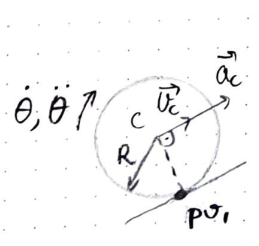
$$\frac{G}{g}R^2\ddot\theta = T\cdot R \quad (3)$$

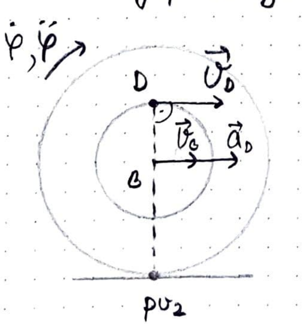
(1), (2), (3) ⇒ 3 једначине са 3 непознате

јер постоји веза између $\ddot{x}_c, \ddot\varphi, \ddot\theta$

⇒ $v_D = v_C \Rightarrow \dot{x}_c = R\dot\theta = 3R\dot\varphi \;/\frac{d}{dt}$

$$\ddot{x}_c = R\ddot\theta = 3R\ddot\varphi \quad (4)$$





$v_C = \dot{x}_C = \overline{CP_{v1}}\,\dot\theta = R\dot\theta$

$v_D = \overline{DP_{v2}}\,\dot\varphi = 3R\dot\varphi$

$v_D = v_C$ ⇒ ЗА НЕИСТЕГЉИВО УЖЕ

(2) ⇒ $3\frac{G}{g}R\ddot\varphi = S - G\sin\alpha - T \quad (2')$

(3) ⇒ $3\frac{G}{g}R\ddot\varphi = T \quad (3')$

(1), (2'), (3') ⇒ 3 ј-чине са 3 непознате!

$$S = \frac{M + GR\sin\alpha}{4R}$$

* У ЗБИРЦИ ЈЕ КОРИШЋЕН ЗАКОН ПРОМЕНЕ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ