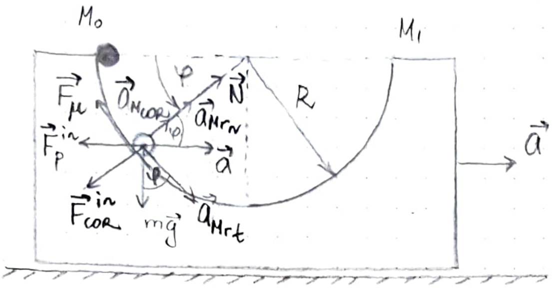
9

6.37. Унутар призматичног тела које се креће по хоризонталној равни константним убрзањем интензитета $a=g$, урезан је полуцилиндричан канал полупречника R. По површини канала креће се тачка масе m при чему коефицијент трења има вредност $\mu=0.5$. Коју почетну релативну брзину треба да има тачка у положају M_0 да би стигла у положај M_1?



АПСОЛУТНО УБРЗАЊЕ ТАЧКЕ M
ПРЕНОСНО
РЕЛАТИВНО
КОРИОЛИСОВО

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M_p} + \vec{a}_{M_r} + \vec{a}_{M_{COR}}$$

$$\vec{a}_{M_p} = \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_p^{in} = -m\vec{a} \Rightarrow F_p^{in} = ma$$

$$\vec{a}_{M_r} = \vec{a}_{M_{rt}} + \vec{a}_{M_{rn}}$$ ⇒ КРЕТАЊЕ ПО КАНАЛУ

$$a_{M_{rt}} = R\ddot{\varphi}, \quad a_{M_{rn}} = R\dot{\varphi}^2$$

$$\vec{a}_{M_{COR}} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 0 \quad (\vec{\omega}_p = 0) \Rightarrow F_{COR}^{in} = 0$$

$$m\vec{a}_{M_r} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_p^{in} + \cancel{\vec{F}_{COR}^{in}}^{\,0}$$

$$m\vec{a}_{M_{rt}} + m\vec{a}_{M_{rn}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_p^{in}$$

$$t: \; ma_{M_{rt}} = mg\cos\varphi - F_\mu - ma\sin\varphi \quad , \; F_\mu = \mu N$$

$$n: \; ma_{M_{rn}} = -mg\sin\varphi + N - ma\cos\varphi \quad \Rightarrow N = mg\sin\varphi + ma\cos\varphi + mR\dot{\varphi}^2$$

$$mR\ddot{\varphi} = mg\cos\varphi - \mu(mg\sin\varphi + ma\cos\varphi + mR\dot{\varphi}^2) - ma\sin\varphi$$

$$\cancel{m}R\ddot{\varphi} + \mu\cancel{m}R\dot{\varphi}^2 = -\cancel{m}(a+\mu g)\sin\varphi + \cancel{m}(g-\mu a)\cos\varphi \;/:m$$

$$a = g, \quad \mu = 0{,}5$$

$$R\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}R\dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2}g\sin\varphi + \frac{1}{2}g\cos\varphi$$

$$* \; \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}$$

$$R\frac{\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{1}{2}R\dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2}g\sin\varphi + \frac{1}{2}g\cos\varphi$$

$$* \; z = \dot{\varphi}^2 \Rightarrow dz = 2\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \frac{dz}{2}$$

$$\frac{1}{2}R\frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2}Rz = -\frac{3}{2}g\sin\varphi + \frac{1}{2}g\cos\varphi \;/\cdot\frac{2}{R}$$

$$* \; \frac{dz}{d\varphi} = z'$$

$$z' + z = -\frac{3}{R}g\sin\varphi + \frac{1}{R}g\cos\varphi$$

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow z_h = C_1e^{-\varphi}$$

$$z_p = A\sin\varphi + B\cos\varphi \Rightarrow z_p' = \frac{dz_p}{d\varphi} = A\cos\varphi - B\sin\varphi$$

$$A\cos\varphi - B\sin\varphi + A\sin\varphi + B\cos\varphi = -\frac{3}{R}g\sin\varphi + \frac{1}{R}g\cos\varphi$$

$$A - B = -\frac{3}{R}g \Rightarrow A = B - 3\frac{g}{R}$$

$$A + B = \frac{1}{R}g \qquad B - 3\frac{g}{R} + B = \frac{g}{R} \Rightarrow B = 2\frac{g}{R} \Rightarrow A = -\frac{g}{R}$$

$$z_p = -\frac{g}{R}\sin\varphi + 2\frac{g}{R}\cos\varphi$$

$$z = \dot{\varphi}^2 = C_1e^{-\varphi} - \frac{g}{R}\sin\varphi + 2\frac{g}{R}\cos\varphi$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = C_1e^{0} - \frac{g}{R}\sin 0 + 2\frac{g}{R}\cos 0 \qquad \dot{\varphi}_1^2 = 0 = C_1e^{-\pi} - \frac{g}{R}\sin\pi + 2\frac{g}{R}\cos\pi$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = C_1 + 2\frac{g}{R} \qquad C_1 = 2\frac{g}{R}e^{\pi}$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = 2\frac{g}{R}e^{\pi} + 2\frac{g}{R} = 2\frac{g}{R}(e^{\pi}+1)$$

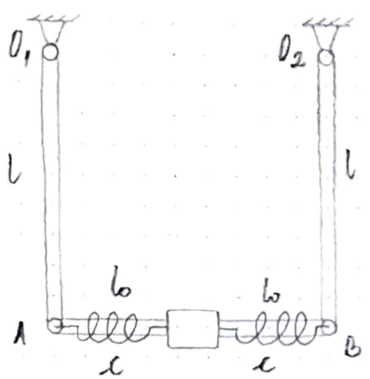
$$v_0 = R\dot{\varphi}_0$$

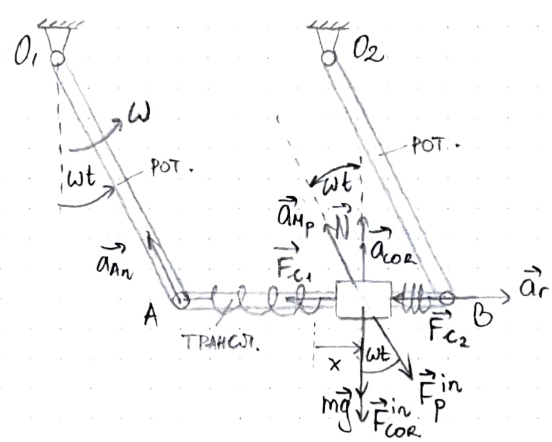
$$\underline{v_0 = R\sqrt{2\frac{g}{R}(e^{\pi}+1)}}$$

(14)

2°

6.13. Зглобни четвороугао O_1ABO_2 сачињавају три зглобно везана штапа једнаких дужина l. Механизам се креће у вертикалној равни тако да се штапови O_1A и O_2B обрћу константном угаоном брзином ω. По глатком штапу AB креће се клизач масе m, занемарљивих димензија. Клизач је опругама једнаких крутости $c=\frac{m\omega^2}{2}$ везан за крајеве штапа AB. У почетном тренутку $t_0=0$ штапови O_1A и O_2B пролазили су кроз вертикалне положаје, а клизач је био на средини штапа AB у релативном миру, при чему су опруге биле ненапрегнуте. Одредити коначну једначину релативног кретања клизача у односу на штап AB и реакцију везе између штапа и клизача у функцији времена.





$c=\frac{m\omega^2}{2}$

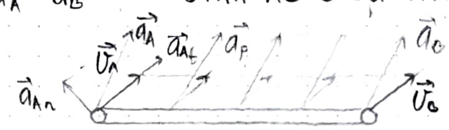
$\omega = const.$

$x_0=0,\ \dot{x}_0=0$

$F_{c_1}=F_{c_2}=cx$

$\vec{a}_{M_{COR}}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r \Rightarrow a_{M_{COR}}=2\omega_{AB}\dot{x}\sin 90^\circ=0 \Rightarrow \vec{F}_{COR}^{in}=0$

$\vec{a}_{M_p}=\vec{a}_A=\vec{a}_B$ ШТАП AB ВРШИ ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ



ШТАП AB УВЕК ОСТАЈЕ ПАРАЛЕЛАН САМОМ СЕБИ $\Rightarrow \omega_{AB}=0$

$m\vec{a}_{M_r}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{c_1}+\vec{F}_{c_2}+\vec{F}_p^{in}+\vec{F}_{COR}^{in}$

x: $m\ddot{x}=-cx-cx+F_p^{in}\sin\omega t$

y: $0=-mg+N-F_p^{in}\cos\omega t-F_{COR}^{in}$

$\vec{a}_A=\vec{a}_{At}+\vec{a}_{An},\ a_{At}=l\varepsilon=0,\ a_{An}=l\omega^2 \Rightarrow a_{M_p}=l\omega^2 \Rightarrow F_p^{in}=ml\omega^2$

(1) $m\ddot{x}+2cx=ml\omega^2\sin\omega t\ /:m$

(2) $\underline{N=mg+ml\omega^2\cos\omega t}$

(1) $\Rightarrow \ddot{x}+k^2x=l\omega^2\sin\omega t,\ k^2=\frac{2c}{m}$

$\lambda^2+k^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm kt$

$\underline{x_h=C_1\cos kt+C_2\sin kt}$

! $k^2=\frac{2c}{m}=\frac{2}{m}\frac{m\omega^2}{2}=\omega^2$ $\quad k=\omega \Rightarrow$ РЕЗОНАНЦИЈА!

$x_p=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$

$\dot{x}_p=A\cos\omega t+B\sin\omega t+t(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)$

$\ddot{x}_p=-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t-t\omega^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$

$=-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t-\omega^2x_p$

$-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t\cancel{-\omega^2x_p}\cancel{+k^2x_p}=l\omega^2\sin\omega t$ $\quad k=\omega \Rightarrow \omega^2x_p=k^2x_p$

$A=-\frac{l\omega}{2},\ B=0 \Rightarrow \underline{x_p=-\frac{l\omega}{2}t\cos\omega t}$

O.P. $\Rightarrow x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t-\frac{l\omega}{2}t\cos\omega t$

$\dot{x}=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t-\frac{l\omega}{2}\cos\omega t+\frac{l\omega^2}{2}t\sin\omega t$

$0=C_1$

$0=C_2\omega-\frac{l\omega}{2} \Rightarrow C_2=\frac{l}{2}$

$$\underline{x=\frac{l}{2}\sin\omega t-\frac{l\omega}{2}t\cos\omega t}$$