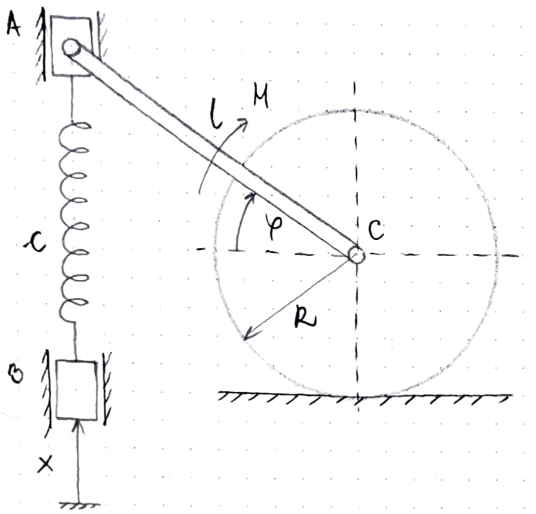
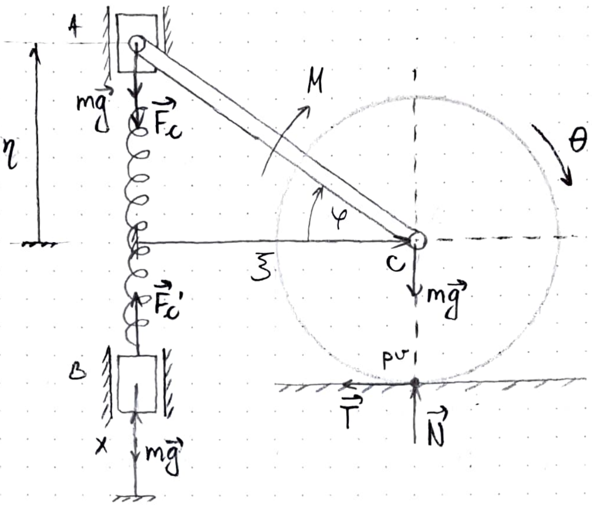
Хомогени диск масе m котрља се без клизања по хоризонталној подлози. За центар диска везан је штап занемарљиве масе и дужине l који је својим другим крајем везан за клизач A масе m. Клизач A креће се дуж глатких вертикалних вођица. Опругом крутости $c=\frac{mg}{l}$ клизач A везан је за клизач B масе m. За $\varphi=0$ и $x=0$ опруга је недеформисана. На штап AC дејствује спрег сила момента M. Поставити диференцијалне једначине кретања система.





ДИСК ⇒ РАВНО КРЕТАЊЕ, КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА ⇒ 1 СТ. СЛ., ЗБОГ ВЕЗЕ $\xi = R\theta$

КЛИЗАЧ A ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ., η

КЛИЗАЧ B ⇒ ТРАНС., 1 СТ. СЛ., x ⇒ НЕЗАВИСНО КРЕТАЊЕ ⇒ $q_1 = x$

ШТАП AC ⇒ РАВНО КР., ЗБОГ ВЕЗА У ТАЧКАМА A и C ИМА 1 СТ. СЛ. И ЊЕГОВО КРЕТАЊЕ МОЖЕ СЕ ОПИСАТИ ПРОМЕНОМ УГЛА φ И ВАЖИ:

$$\underbrace{\xi = l\cos\varphi\,,\quad \eta = l\sin\varphi}$$

КРЕТАЊЕ ДИСКА И КЛИЗАЧА ОДРЕЂЕНО ЈЕ У ФУНКЦИЈИ УГЛА φ

$$q_2 = \varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad , E_k = f(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})$$

$$E_k = E_k^D + E_k^A + E_k^B$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^D = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\dot{\theta}^2$, $J_{Cz} = \frac{1}{2} m R^2$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\xi}}{R} = \frac{-l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}}{R} = -\frac{l}{R}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$v_C = \dot{\xi} = -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$E_k^D = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} m R^2\cdot\frac{l^2}{R^2}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

$$E_k^D = \frac{3}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$$

$\boxed{\text{ТРАНС.}}$ $E_k^A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m\dot{\eta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi$

$\boxed{\text{ТРАНС.}}$ $E_k^B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{3}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi$$

$\delta A^{0}(m\vec{g}) = m\vec{g}\cdot d\vec{r}_0 = -mg\,dx \Rightarrow Q_x^{mg} = -mg$

$\delta A^{A}(m\vec{g}) = m\vec{g}\cdot d\vec{r}_A = -mg\,d\eta \qquad d\eta = l\cos\varphi\, d\varphi$

$= -mgl\cos\varphi\, d\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{mg} = -mgl\cos\varphi$

$\delta A(\vec{M}) = \vec{M}\cdot d\vec{\varphi} = +M\,d\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{M} = M$

$\delta A^{C}(m\vec{g}) = m\vec{g}\cdot d\vec{r}_C = 0 \ , \ d\vec{r}_C \perp m\vec{g}$

$Q_x^{\vec{F}_c,\vec{F}_c'} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ $\qquad E_p = \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}c(\eta - x)^2 = \frac{1}{2}c(l\sin\varphi - x)^2$

$Q_\varphi^{\vec{F}_c,\vec{F}_c'} = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}$

→ ОПРУГА СЕ СКРАТИ ЗА x

→ ОПРУГА СЕ ИЗДУЖИ ЗА η

$Q_x^{\vec{F}_c,\vec{F}_c'} = -\frac{1}{2}c\cdot 2(l\sin\varphi - x)\cdot(-1) = c(l\sin\varphi - x)$

$Q_\varphi^{\vec{F}_c,\vec{F}_c'} = -\frac{1}{2}c\cdot 2(l\sin\varphi - x)\cdot l\cos\varphi = -cl^2\sin\varphi\cos\varphi + clx\cos\varphi$

* ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛА $\vec{N}, \vec{T}, (\vec{R}_C, \vec{R}_C'), (\vec{R}_A, \vec{R}_A'), \vec{N}_A, \vec{N}_B$ ЈЕДНАК ЈЕ НУЛИ ЈЕР СЕ РАДИ О ИДЕАЛНИМ ВЕЗАМА

$$Q_x = -mg + c(l\sin\varphi - x)$$
$$Q_\varphi = -mgl\cos\varphi + M - cl^2\sin\varphi\cos\varphi + clx\cos\varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - ml^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi + ml^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}ml^2(\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi) + ml^2(\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi)$$

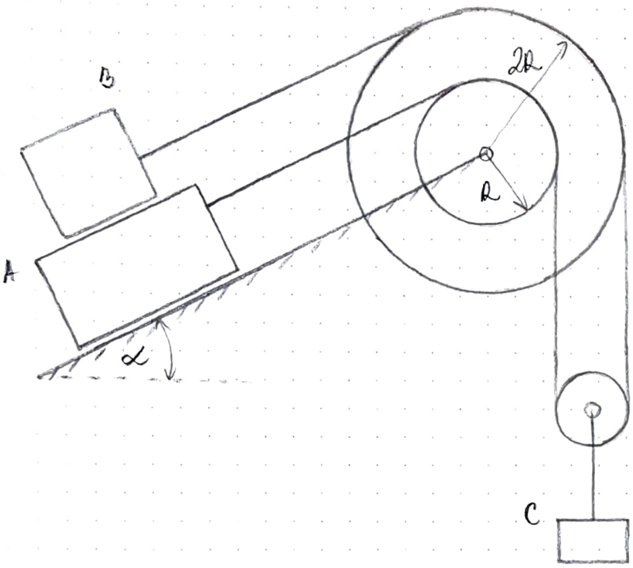
* $c = \frac{mg}{l}$

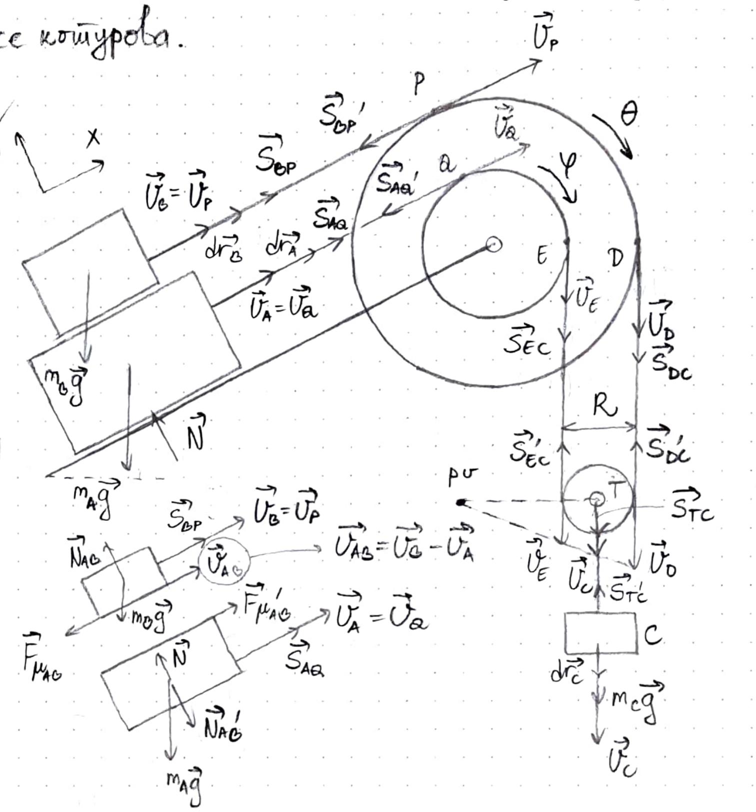
$$m\ddot{x} + \frac{mg}{l}x - mg\sin\varphi + mg = 0 \ /:m$$

$$\frac{3}{2}ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 3ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$-\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = -mgl\cos\varphi + M - mgl\sin\varphi\cos\varphi + mgx\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x} + \frac{g}{l}x - g\sin\varphi + g = 0\\ &ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + \frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = M - mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}mgl\sin 2\varphi + mgx\cos\varphi\end{aligned}\right\}\text{Д.Ј.}$$

14.20. На глаткој стрмој равни налази се плоча А масе m_A, а на плочи А тело В масе m_B. Коефицијент трења између тела А и тела В која међусобно проклизавају је μ. Неистегљиво уже занемарљиве масе везано је за тело А и В паралелно стрмој равни и пребачено преко два котура полупречника R и $2R$ који се независно један од другог обрћу око непокретне хоризонталне осе. На ужету се налази покретни котур за чије је средиште везано тело С масе m_C. Поставити диференцијалне једначине кретања система занемарујући масе котурова.





ТЕЛО А ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ТЕЛО В ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ТЕЛО С ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

*ТАЧКА Т НЕ ПОМЕРА СЕ У ХОР. ПРАВЦУ

КОТУРОВИ СА ЦЕНТРОМ У Е РОТИРАЈУ (ПО 1 СТ. СЛ.), А КОТУР Т ВРШИ РАВНО КР. (2 СТ. СЛ.)

ЗБОГ УНУТРАШЊИХ ВЕЗА СВЕ КИНЕМАТСКЕ ВЕЛИЧИНЕ МОГУ СЕ ИЗРАЗИТИ У ФУНКЦИЈИ УГЛОВА ОБРТАЊА КОАКСИЈАЛНИХ КОТУРОВА $\quad q_1 = \varphi \;,\; q_2 = \theta$

$$v_A = v_Q = R\dot{\varphi}$$

$$v_B = v_P = 2R\dot{\theta}$$

ПРЕТПОСТАВЉАМО ДА ЈЕ $v_B > v_A$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \;/\cdot \vec{i}$$

$$v_{AB} = v_B - v_A = 2R\dot{\theta} - R\dot{\varphi}$$ ⇒ БРЗИНА ПРОКЛИЗАВАЊА ТЕЛА В ПО ТЕЛУ А

⇓

НА ОСНОВУ СМЕРА ТЕ БРЗИНЕ ОДРЕЂУЈЕМО СМЕР $\vec{F}_{\mu AB}$ ДОК ЈЕ $\vec{F}'_{\mu AB} = -\vec{F}_{\mu AB}$

$$\left.\begin{aligned} v_D &= v_P = 2R\dot{\theta} \\ v_E &= v_Q = R\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \; v_C = \frac{v_D + v_E}{2} = \frac{2R\dot{\theta} + R\dot{\varphi}}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=Q_\varphi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial \theta}=Q_\theta \quad , \quad E_k=f(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)$$

$$E_k=E_k^A+E_k^B+E_k^C$$

ТРАНС $\quad E_k^A=\frac{1}{2}m_A v_A^2=\frac{1}{2}m_A R^2\dot\varphi^2$

ТРАНС. $\quad E_k^B=\frac{1}{2}m_B v_B^2=2m_B R^2\dot\theta^2$

ТРАНС. $\quad E_k^C=\frac{1}{2}m_C v_C^2=\frac{1}{2}m_C\cdot\frac{1}{4}\left(4R^2\dot\theta^2+4R^2\dot\varphi\dot\theta+R^2\dot\varphi^2\right)$

$$=\frac{1}{2}m_C R^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}m_C R^2\dot\varphi\dot\theta+\frac{1}{8}m_C R^2\dot\varphi^2$$

$$E_k=\left(2m_B+\frac{1}{2}m_C\right)R^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}m_C R^2\dot\varphi\dot\theta+\left(\frac{1}{2}m_A+\frac{1}{8}m_C\right)R^2\dot\varphi^2$$

$$Q_\varphi^{m_A g}=-m_A g R\sin\alpha$$

$$\delta A(m_A\vec g)=m_A\vec g\cdot d\vec r_A=m_A\vec g\cdot\vec v_A\,dt=-m_A g\cdot R\dot\varphi\sin\alpha\,dt=-m_A gR\sin\alpha\,d\varphi$$

$$\delta A(m_B\vec g)=m_B\vec g\cdot d\vec r_B=m_B\vec g\cdot\vec v_B\,dt=-m_B g\cdot 2R\dot\theta\sin\alpha\,dt=-2m_B gR\sin\alpha\,d\theta$$

$$\delta A(\vec N)=\vec N\cdot\vec v_A\,dt=0\ ,\ \vec N\perp\vec v_A \qquad Q_\theta^{m_B g}=-2m_B gR\sin\alpha$$

$$\delta A(\vec N_{AB},\vec N_{AB}')=0\ ,\ \vec N_{AB}\perp\vec v_B\ ,\ \vec N_{AB}'\perp\vec v_A$$

РАД ПАРОВА СИЛА У УНАДИНА ЈЕДНАК ЈЕ НУЛИ ЈЕР СЕ РАДИ О ИДЕАЛНИМ ВЕЗАМА

$$\delta A(\vec F_{\mu AB},\vec F_{\mu AB}')=\vec F_{\mu AB}\cdot\vec v_B\,dt+\vec F_{\mu AB}'\cdot\vec v_A\,dt= \qquad ,\ \vec F_{\mu AB}'=-\vec F_{\mu AB}$$
$$=\vec F_{\mu AB}\cdot\vec v_B\,dt-\vec F_{\mu AB}\cdot\vec v_A\,dt=$$
$$=-F_{\mu AB}\cdot v_B\,dt-(-F_{\mu AB}\cdot v_A\,dt)$$
$$=F_{\mu AB}(v_A-v_B)\,dt$$
$$=F_{\mu AB}(R\dot\varphi-2R\dot\theta)\,dt$$
$$=F_{\mu AB}(R\,d\varphi-2R\,d\theta)$$

* $\vec F_{\mu AB}$ ЈЕ СУПРОТНОГ СМЕРА У ОДНОСУ НА БРЗИНЕ $\vec v_A$ и $\vec v_B$

$F_{\mu AB}\ldots?$

$$m_B\vec a_B=m_B\vec g+\vec N_{AB}+\vec F_{\mu AB}+\vec S_{BP}\ /\cdot\vec j$$
$$0=-m_B g\cos\alpha+N_{AB}\Rightarrow N_{AB}=m_B g\cos\alpha\Rightarrow F_{\mu AB}=\mu m_B g\cos\alpha$$

$$\delta A(\vec F_{\mu AB},\vec F_{\mu AB}')=\mu m_B g\cos\alpha(R\,d\varphi-2R\,d\theta)$$

$$Q_\theta^{\vec F_{\mu AB},\vec F_{\mu AB}'}=-2\mu m_B gR\cos\alpha$$
$$Q_\varphi^{\vec F_{\mu AB},\vec F_{\mu AB}'}=\mu m_B gR\cos\alpha$$

$$\delta A(m_C\vec g)=m_C\vec g\cdot\vec v_C\,dt=m_C g v_C\,dt=m_C g\cdot\left(\frac{2R\dot\theta+R\dot\varphi}{2}\right)dt=\frac{1}{2}m_C g(2R\,d\theta+R\,d\varphi)$$

$$Q_\theta^{m_C g}=m_C gR$$
$$Q_\varphi^{m_C g}=\frac{1}{2}m_C gR$$

$$Q_\varphi=-m_A gR\sin\alpha-\mu m_B gR\cos\alpha+\frac{1}{2}m_C gR$$

$$Q_\theta=-2m_B gR\sin\alpha-2\mu m_B gR\cos\alpha+m_C gR$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{2} m_C R^2 \dot\theta + \left(m_A + \frac{1}{4} m_C\right) R^2 \dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{1}{2} m_C R^2 \ddot\theta + \left(m_A + \frac{1}{4} m_C\right) R^2 \ddot\varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta} = \left(4 m_B + m_C\right) R^2 \dot\theta + \frac{1}{2} m_C R^2 \dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta}\right) = \left(4 m_B + m_C\right) R^2 \ddot\theta + \frac{1}{2} m_C R^2 \ddot\varphi$$

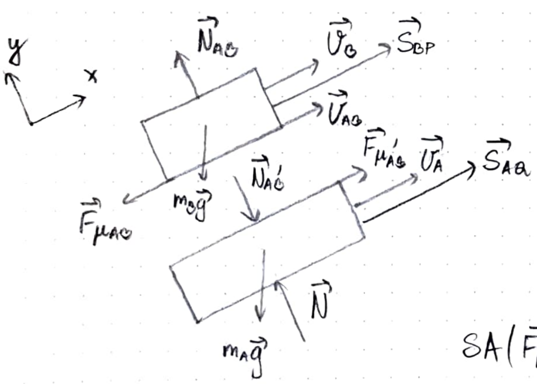
$$\frac{1}{2} m_C R^2 \ddot\theta + \left(m_A + \frac{1}{4} m_C\right) R^2 \ddot\varphi = - m_A g R \sin\alpha - \mu m_B g R \cos\alpha + \frac{1}{2} m_C g R \quad /:R$$

$$\left(4 m_B + m_C\right) R^2 \ddot\theta + \frac{1}{2} m_C R^2 \ddot\varphi = - 2 m_B g R \sin\alpha - 2\mu m_B g R \cos\alpha + m_C g R \quad /:R$$

$$\left.\begin{aligned} \left(m_A + \frac{1}{4} m_C\right) R \ddot\varphi + \frac{1}{2} m_C R \ddot\theta &= - m_A g \sin\alpha - \mu m_B g \cos\alpha + \frac{1}{2} m_C g \\ \frac{1}{2} m_C R \ddot\varphi + \left(4 m_B + m_C\right) R \ddot\theta &= - 2 m_B g \sin\alpha - 2\mu m_B g \cos\alpha + m_C g \end{aligned}\right\} \text{Д.Ј.}$$

↳ * ВАЖИ УЗ ПРЕТПОСТАВКУ ДА ЈЕ $v_B > v_A$
ЧИМЕ ЈЕ ОДРЕЂЕН СМЕР БРЗИНЕ ПРОКЛИЗАВАЊА
А САМИМ ТИМ И СИЛЕ ТРЕЊА ИЗМЕЂУ ТЕЛА

** ПРЕЦИЗНИЈЕ



$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad , \quad v_{AB} = v_B - v_A$$

$$\vec{F}_{\mu AB} = -\mu N_{AB}\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A)\, \vec{i}$$

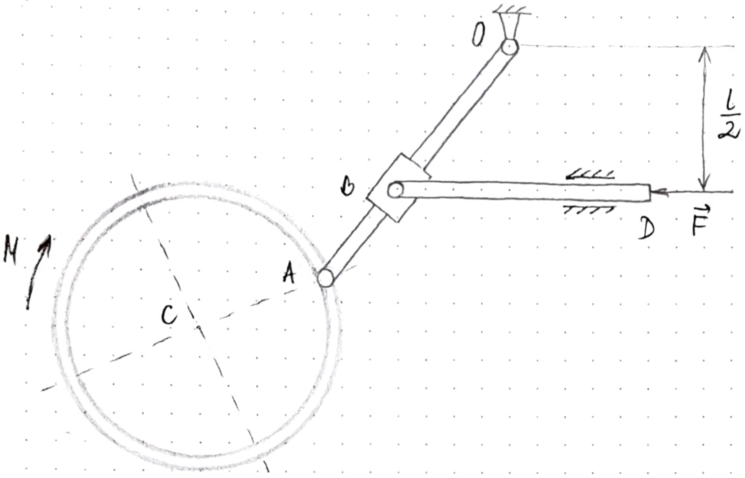
$$SA(\vec{F}_{\mu AB}, \vec{F}_{\mu AB}') = \mu m_B g \cos\alpha\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A)(R\,d\varphi - 2R\,d\theta)$$

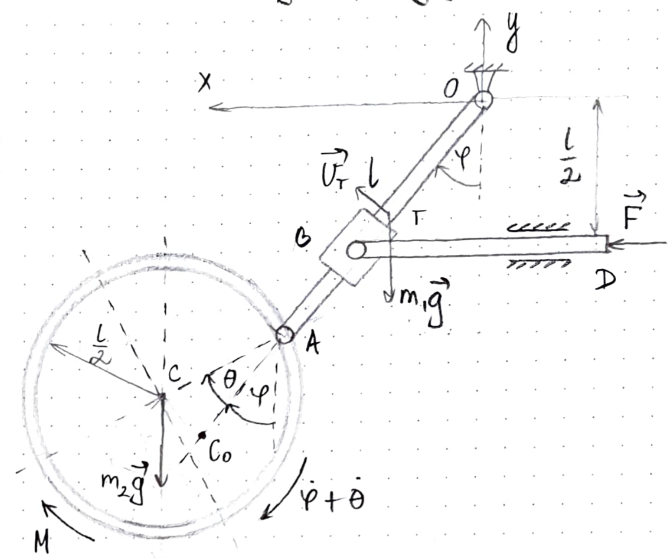
$$Q_\varphi^{\vec{F}_{\mu AB}, \vec{F}_{\mu AB}'} = \mu m_B g R \cos\alpha\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A)$$

$$Q_\theta^{\vec{F}_{\mu AB}, \vec{F}_{\mu AB}'} = -2\mu m_B g R \cos\alpha\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(m_A + \frac{1}{4} m_C\right) R \ddot\varphi + \frac{1}{2} m_C R \ddot\theta &= - m_A g \sin\alpha - \mu m_B g \cos\alpha\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A) + \frac{1}{2} m_C g \\ \frac{1}{2} m_C R \ddot\varphi + \left(4 m_B + m_C\right) R \ddot\theta &= - 2 m_B g \sin\alpha - 2\mu m_B g R \cos\alpha\, \mathrm{sgn}(v_B - v_A) + m_C g \end{aligned}\right\} \text{Д.Ј.}$$

14.12. Систем који се креће у вертикалној равни састоји се од хомогеног штапа OA дужине l и масе m_1 и хомогеног танког прстена полупречника $R=\frac{l}{2}$ и масе m_2. Прстен је зглобно везан за штап у тачки A. На прстен делује спрег момента M а на штап OA, преко клизача B и хоризонталног штапа занемарљивих маса, делује сила F. Написати диференцијалне једначине кретања система.





ШТАП BD ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ШТАП OA ⇒ РОТАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ПРСТЕН ⇒ РАВНО КР. ⇒ 3 СТ. СЛ.

$\dot\theta$ ⇒ РЕЛАТИВНА УГ. БРЗ. ПРСТЕНА

$\dot\varphi$ ⇒ ПРЕНОСНА УГ. БРЗ. ПРСТ.

$\dot\psi=\dot\theta+\dot\varphi$ ⇒ АПСОЛУТНА УГ. БРЗ. ПРСТ.

$$\omega_p=\dot\varphi+\dot\theta$$

$$v_C^2=\dot x_c^2+\dot y_c^2$$

$$x_c=l\sin\varphi+\frac{1}{2}l\sin(\varphi+\theta)\Rightarrow \dot x_c=l\dot\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}l(\dot\varphi+\dot\theta)\cos(\varphi+\theta)$$

$$y_c=-l\cos\varphi-\frac{1}{2}l\cos(\varphi+\theta)\Rightarrow \dot y_c=l\dot\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}l(\dot\varphi+\dot\theta)\sin(\varphi+\theta)$$

ЗБОГ ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ШТАПА И ПРСТЕНА КРЕТАЊЕ ПРСТЕНА МОЖЕ СЕ ИЗРАЗИТИ У ФУНКЦИЈИ КООРДИНАТА φ И θ; ТАКОЂЕ, ЗБОГ ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ШТАПОВА, КРЕТАЊЕ ШТАПА BD МОЖЕ СЕ ИЗРАЗИТИ У ФУНКЦИЈИ УГЛА φ ⇒ БР. СТ. СЛ. СИСТЕМА СМАЊУЈЕ СЕ ЗА 3

$$q_1=\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

$$q_2=\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial\theta}=Q_\theta$$

$$E_k=E_k^{š}+E_k^{p}$$

$\boxed{\text{РОТ}}$ $$E_k^{š}=\frac{1}{2}J_{Oz}\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1l^2\dot\varphi^2=\frac{1}{6}m_1l^2\dot\varphi^2$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $$E_k^{p}=\frac{1}{2}m_2v_c^2+\frac{1}{2}J_{Cz}(\dot\varphi+\dot\theta)^2 \qquad J_{Cz}=m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{4}m_2l^2$$

$$=\frac{1}{2}m_2\Big[l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi+l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\cos\varphi\cos(\varphi+\theta)+\frac{1}{4}l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2\cos^2(\varphi+\theta)$$
$$+l^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi+l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\sin\varphi\sin(\varphi+\theta)+\frac{1}{4}l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2\sin^2(\varphi+\theta)\Big]$$
$$+\frac{1}{8}m_2l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2=\frac{1}{2}m_2\left[l^2\dot\varphi^2+l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\cos(\varphi-\varphi-\theta)+\frac{1}{4}l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2\right]+\frac{1}{8}m_2l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2$$

$$E_k^{p}=\frac{1}{2}m_2l^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\cos\theta+\frac{1}{4}m_2l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2$$

$$E_k = \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\cos\theta + \frac{1}{4}m_2 l^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2$$

$$\delta A(m_1\vec g) = m_1\vec g\cdot d\vec r_T = (-m_1 g\vec j)\cdot(dx_T\vec i + dy_T\vec j) = -m_1 g\, dy_T$$

$$y_T = -\frac{1}{2}l\cos\varphi \Rightarrow dy_T = \frac{1}{2}l\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\delta A(m_1\vec g) = -\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{m_1 g} = -\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi$$

$$\delta A(\vec F) = \vec F\cdot d\vec r_D = (F\vec i)\cdot(dx_D\vec i) \qquad *\ dx_D = dx_B$$

$$\overline{OB}\cos\varphi = \frac{1}{2}l \Rightarrow \overline{OB} = \frac{l}{2\cos\varphi}, \quad x_B = \overline{OB}\sin\varphi = \frac{1}{2}l\,tg\varphi \Rightarrow dx_B = \frac{l}{2\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$\delta A(\vec F) = \frac{Fl}{2\cos^2\varphi}d\varphi \Rightarrow Q_\varphi^F = \frac{Fl}{2\cos^2\varphi}$$

$$\delta A(m_2\vec g) = m_2\vec g\cdot d\vec r_C = (-m_2 g\vec j)\cdot(dx_C\vec i + dy_C\vec j) = -m_2 g\, dy_C$$

$$y_C = -l\cos\varphi - \frac{1}{2}l\cos(\varphi+\theta) \Rightarrow dy_C = l\sin\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}l\sin(\varphi+\theta)(d\varphi+d\theta)$$

$$\delta A(m_2\vec g) = -m_2 g l\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin(\varphi+\theta)\right]d\varphi - \frac{1}{2}m_2 g l\sin(\varphi+\theta)d\theta$$

$$Q_\varphi^{m_2 g} = -m_2 g l\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin(\varphi+\theta)\right], \quad Q_\theta^{m_2 g} = -\frac{1}{2}m_2 g l\sin(\varphi+\theta)$$

$$\delta A(\vec M) = \vec M\cdot\vec\omega_P dt = +M\cdot\dot\psi dt = +M d\psi = M(d\varphi+d\theta) \Rightarrow Q_\varphi^M = M, \quad Q_\theta^M = M$$

$$Q_\varphi = -\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi + \frac{Fl}{2\cos^2\varphi} - m_2 g l\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin(\varphi+\theta)\right] + M, \quad Q_\theta = M$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} = \left(\frac{1}{3}m_1 + \frac{3}{2}m_2\right)l^2\dot\varphi + m_2 l^2\dot\varphi\cos\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\theta\cos\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi}\right) = \left(\frac{1}{3}m_1 + \frac{3}{2}m_2\right)l^2\ddot\varphi + m_2 l^2\ddot\varphi\cos\theta - m_2 l^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta\cos\theta - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\theta^2\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\sin\theta$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot\theta} = \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi\cos\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\varphi\cos\theta - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{3}m_1 + \frac{3}{2}m_2\right)l^2\ddot\varphi + m_2 l^2\ddot\varphi\cos\theta - m_2 l^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta\cos\theta - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\theta^2\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta \\
\quad + \frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi - \frac{Fl}{2\cos^2\varphi} + m_2 g l\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin(\varphi+\theta)\right] - M = 0 \\
\frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\varphi\cos\theta - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\theta + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\sin\theta \\
\quad + \frac{1}{2}m_2 g l\sin(\varphi+\theta) - M = 0
\end{array}\right\} \text{Д.Ј.}$$

* АКО СЕ ЗА ГЕНЕРАЛИСАНЕ КООРД. ОДАБЕРЕ $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \psi = \varphi+\theta \Rightarrow$ АПСОЛУТНИ УГАО ОБРТАЊА ПРСТЕНА

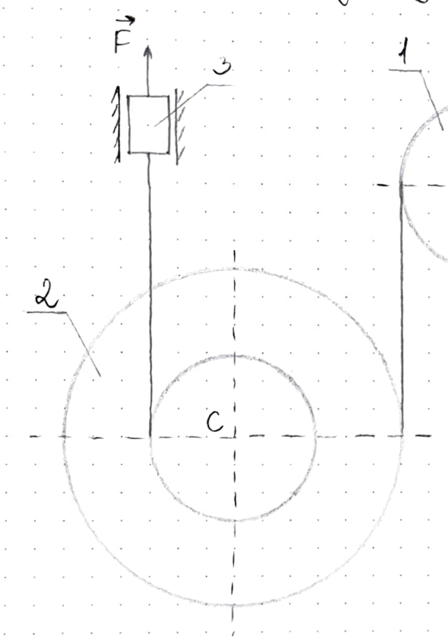
$$\theta = \psi-\varphi, \quad \dot\theta = \dot\psi-\dot\varphi, \quad \ddot\theta = \ddot\psi-\ddot\varphi, \quad Q_\varphi = -\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi + \frac{Fl}{2\cos^2\varphi} - m_2 g l\sin\varphi$$

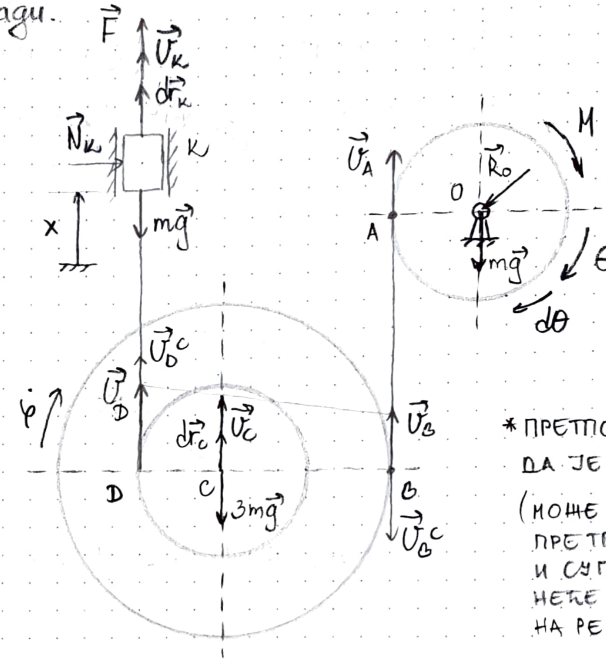
$$Q_\psi = -\frac{1}{2}m_2 g l\sin\psi + M$$

$$E_k = \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi) + \frac{1}{4}m_2 l^2\dot\psi^2$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{3}m_1 + 3m_2\right)l^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\psi\cos(\psi-\varphi) - \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\psi^2\sin(\psi-\varphi) \\
\quad = \frac{Fl}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi \\
\frac{1}{2}m_2 l^2\cos(\psi-\varphi)\ddot\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\ddot\psi + \frac{1}{2}m_2 l^2\sin(\psi-\varphi)\dot\varphi^2 = M - \frac{1}{2}m_2 g l\sin\psi
\end{array}\right\} \text{Д.Ј.}$$

14.10. Хомогени диск 1 масе m и полупречника R може да се обрће око средишње хоризонталне осе Oz. Неистегљиво уже намотано је једним крајем на диск 1 а другим крајем на већи добош калема 2. На мањи добош калема намотано је друго неистегљиво уже везано за тело 3 масе m које може да се креће вертикално. Калем има масу $3m$, полупречнике $2R$ и R, и полупречник инерције у односу на средишњу уздужну осу $i = R\sqrt{2}$. Ненамотани делови ужета су вертикалног правца. Сила кидања ужади износи $5mg$. Одредити вредности момента спрега M који делује на диск 1 и силе F која делује вертикално на тело 3 да не дође до кидања ужади.





* ПРЕТПОСТАВЉАМО ДА ЈЕ $v_D > v_B$ (МОЖЕ ДА СЕ ПРЕТПОСТАВИ И СУПРОТНО И НЕЋЕ УТИЦАТИ НА РЕШЕЊЕ)

ТЕЛО 1 ⇒ РОТАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ТЕЛО 2 ⇒ РАВНО КРЕТАЊЕ ⇒ 2 СТ. СЛ. (ТАЧКА C СЕ НЕ ПОМЕРА У ХОРИЗОНТАЛНОМ ПРАВЦУ)

ТЕЛО 3 ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА ⇒ 1 СТ. СЛ.

ЗБОГ ВЕЗА (УЖАДИ KD И AB) БРОЈ СТ. СЛ. СИСТЕМА СЕ СМАЊУЈЕ ЗА 2

⇓

СИСТЕМ ИМА 2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

$v_D = v_K = \dot{x}$

$v_B = v_A = R\dot{\theta}$

$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D^{\,C} \;/\cdot \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_B^{\,C} \;/\cdot \vec{i}$

$v_D = v_C + v_D^C$ $\qquad$ $v_B = v_C - v_B^C$

$\dot{x} = v_C + R\dot{\varphi}$ $\qquad$ $R\dot{\theta} = v_C - 2R\dot{\varphi}$

$v_C = \dot{x} - R\dot{\varphi}$ $\qquad$ $v_C = R\dot{\theta} + 2R\dot{\varphi}$

$\dot{x} - R\dot{\varphi} = R\dot{\theta} + 2R\dot{\varphi}$

$3R\dot{\varphi} = \dot{x} - R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{\dot{x} - R\dot{\theta}}{3R}$, $v_C = \frac{2}{3}\dot{x} + \frac{1}{3}R\dot{\theta}$

$\dot{\varphi} = \dfrac{\dot{x} - R\dot{\theta}}{3R}$ ⇒ КРЕТАЊЕ ТЕЛА 2 МОЖЕ ДА СЕ ИЗРАЗИ ПРЕКО КООРДИНАТА x И θ ⇒ БИРАМО ИХ ЗА ГЕНЕРАЛИСАНЕ КООРД.

$q_1 = x$, $q_2 = \theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$E_k = E_k^{I} + E_k^{II} + E_k^{III}$$

РОТ. $E_k^{I} = \frac{1}{2} J_{Oz}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2$

РАВНО $E_k^{II} = \frac{1}{2}\cdot 3m v_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2$, $J_{Cz} = 3mi^2 = 3m\cdot 2R^2 = 6mR^2$

$$= \frac{3}{2}m\left(\frac{2}{3}\dot{x} + \frac{1}{3}R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 6mR^2\left(\frac{\dot{x} - R\dot{\theta}}{3R}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{3}m\dot{x}^2 + \cancel{\frac{2}{3}mR\dot{x}\dot{\theta}} + \frac{1}{6}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3}m\dot{x}^2 - \cancel{\frac{2}{3}mR\dot{x}\dot{\theta}} + \frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$E_k^{II} = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

ТРАНС $E_k^{III} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$E_k = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$$

$\delta A(\vec{M}) = \vec{M}\cdot d\vec{\theta} = M d\theta \Rightarrow Q_\theta^M = M$

$\delta A(3m\vec{g}) = 3m\vec{g}\cdot d\vec{r}_C$, $dr_C = v_C dt = \left(\frac{2}{3}\dot{x} + \frac{1}{3}R\dot{\theta}\right)dt = \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}R d\theta$

$= -3mg\, dr_C$

$= -2mg\,dx - mgR\,d\theta \Rightarrow Q_x^{3mg} = -2mg$, $Q_\theta^{3mg} = -mgR$

$\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{r}_K = F\cdot dx \Rightarrow Q_x^F = F$

$\delta A^k(m\vec{g}) = m\vec{g}\cdot d\vec{r}_K = -mg\,dx \Rightarrow Q_x^{mg} = -mg$

$Q_x = F - 3mg$

$Q_\theta = M - mgR$

* ЕЛЕМЕНТАРНИ ВИРТУАЛНИ РАД СИЛА $\vec{R}_O$ И $\vec{N}_K$ ЈЕ $=0$ ЈЕР СЕ РАДИ О ИДЕАЛНОЈ ВЕЗИ
* ЕЛ. ВИРТ. РАД ПАРОВА СИЛА У УЖАДИ ЈЕ $=0$ ЈЕР ЈЕ УЖЕ ИДЕАЛНА ВЕЗА

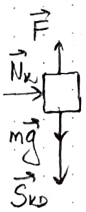
$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial E_k}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x}$ $\qquad$ $\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x}$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}$

$3m\ddot{x} = -2mg + F - mg \Rightarrow \ddot{x} = -g + \frac{F}{3m}$

$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} = M - mgR \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{M}{mR^2} - \frac{2}{3}\frac{g}{R}$



$m\vec{a}_K = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_K + \vec{S}_{KD} \Rightarrow m\ddot{x} = F - mg - S_{KD} \Rightarrow \cancel{-mg} + \frac{F}{3} = F - \cancel{mg} - S_{KD}$

ТЕОРЕМА О КРЕТАЊУ ЦЕНТРА МАСЕ

$S_{KD} = \frac{2}{3}F < 5mg$, $S_{KD} > 0$

$F < \frac{15}{2}mg$, $F > 0$

ТЕОРЕМА О ПРОМЕНИ МОМЕНТА КОЛ. КР.

$(+)\ \frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^S = M - S_{AB}\cdot R$

$L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL_{Oz}}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$

$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = M - S_{AB}\cdot R$

$\frac{1}{3}M - \frac{1}{3}mgR = M - S_{AB}\cdot R$

$S_{AB} = \frac{2}{3}\frac{M}{R} + \frac{1}{3}mg < 5mg$, $S_{AB} > 0$

$M < 7mgR$, $M > -\frac{1}{2}mgR$