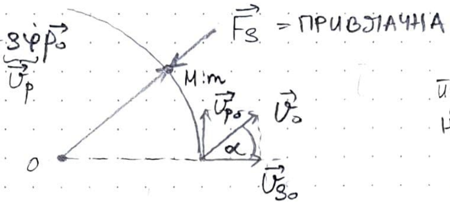
5.11. Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе тако да се интензитет брзине мења по закону $v=\sqrt{\frac{a}{s}}$, где је s растојање тачке од центра силе. У почетном тренутку се тачка налазила на растојању $s_0=a$ од центра силе, а вектор брзине је са почетним потегом градио угао од $45°$. Одредити силу и путању тачке.

$m,\ v=\sqrt{\frac{a}{s}},\ s_0=a,\ \alpha_0=45°$

$F_s,\ s=f(\varphi)\ ...?$

$\vec{v}=\underbrace{\dot{s}\vec{s_0}}_{\vec{v_s}}+\underbrace{s\dot{\varphi}\vec{p_0}}_{\vec{v_p}}$



$\vec{F_s}$ = ПРИВЛАЧНА

пројекција $\vec{F}$ на $\vec{s}$ је <0

$$dE_k=\delta A(\vec{F_s})=F_s ds \Rightarrow F_s=\frac{dE_k}{ds}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{a}{s}\Rightarrow dE_k=\frac{1}{2}ma\left(-\frac{1}{s^2}\right)ds$$

$$F_s=-\frac{ma}{2s^2}$$

$$z''+z=-\frac{F_s\cdot s^2}{4mC^2}$$

$$s^2\dot{\varphi}=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2}s^2\dot{\varphi}=\frac{1}{2}s_0^2\dot{\varphi}_0=\frac{1}{2}s_0\cdot \underbrace{s_0\dot{\varphi}_0}_{v_{p_0}}=\frac{1}{2}s_0v_{p_0}=\frac{1}{2}s_0 v_0\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

$v_0=\sqrt{\frac{a}{a}}=1$

$$z''+z=-\frac{-\frac{ma}{2s^2}\cdot s^2}{4m\frac{2}{16}a^2}$$

$$z''+z=\frac{1}{a},\quad z=\frac{1}{s},\quad s=f(\varphi)$$

ЛИНЕАРНА НЕХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА J-ЧИНА ДРУГОГ РЕДА СА const. КОЕФ.

$$z=z_h+z_p$$

$$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda=\pm i\Rightarrow z_h=C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi$$

$$z_p=A\Rightarrow z_p''=0\Rightarrow 0+A=\frac{1}{a}\Rightarrow A=\frac{1}{a}\Rightarrow z_p=\frac{1}{a}$$

$$z=C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi+\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{s}=C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi+\frac{1}{a}\ \Big/\cdot\frac{d}{dt}\qquad *\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{1}{s^2}\dot{s}$$

$$-\frac{1}{s^2}\dot{s}=-C_1\dot{\varphi}\sin\varphi+C_2\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{1}{s_0}=C_1\cos\overset{1}{0}+C_2\sin\overset{0}{0}+\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}=C_1+\frac{1}{a}\Rightarrow C_1=0$$

$$-\frac{1}{s_0^2}\dot{s}_0=-C_1\dot{\varphi}_0\sin\overset{0}{0}+C_2\dot{\varphi}_0\cos\overset{1}{0}\Rightarrow-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=C_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2a}\Rightarrow C_2=-\frac{1}{a}$$

$$v_{s_0}=v_0\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_{p_0}=s_0\dot{\varphi}_0=v_0\sin\alpha\Rightarrow\dot{\varphi}_0=\frac{v_0\sin\alpha}{s_0}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2a}$$

$$\frac{1}{s}=-\frac{1}{a}\sin\varphi+\frac{1}{a}$$

$$\underline{\frac{1}{s}=\frac{1}{a}(1-\sin\varphi)}$$

5.1. Тачка масе m креће се под дејством централне силе тако да линија њене путање у поларном координатном систему има облик $\rho = b\sqrt{1+\varphi}$. Дати почетни услови: $t_0=0,\ \varphi_0=0,\ \dot\varphi_0>0$, $v_0=\sqrt{5}\,ab$, где су a и b позитивне константе. Одредити силу која делује на тачку и интензитет брзине тачке у зависности од поларне координате ρ.

$\rho = b\sqrt{1+\varphi}$, $t_0=0 \Rightarrow \varphi_0=0,\ \dot\varphi_0>0,\ v_0=\sqrt{5}\,ab$, $a,b=const.>0$

$F_\rho,\ v=f(\rho)\ldots?$

$$v^2 = 4C^2\left[z'^2+z^2\right] \quad , \quad z=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{b\sqrt{1+\varphi}} \Rightarrow z'=\frac{1}{b}\left[-\frac{1}{2}(1+\varphi)^{-\frac{3}{2}}\right]\cancel{\frac{d\varphi}{d\varphi}}$$

$$z^2=\frac{1}{b^2(1+\varphi)} \quad , \quad z'^2=\frac{1}{4b^2}\cdot\frac{1}{(1+\varphi)^3}$$

$$C=\frac{1}{2}\rho^2\dot\varphi=\frac{1}{2}\rho_0^2\dot\varphi_0$$

$$v_0^2=\dot\rho_0^2+\rho_0^2\dot\varphi_0^2 \quad , \quad \rho_0=b\sqrt{1+0}=b$$

$$\dot\rho=b\frac{\dot\varphi}{2\sqrt{1+\varphi}} \Rightarrow \dot\rho_0=\frac{b\dot\varphi_0}{2}$$

$$5a^2b^2=\frac{1}{4}b^2\dot\varphi_0^2+b^2\dot\varphi_0^2=\frac{5}{4}b^2\dot\varphi_0^2 \Rightarrow \dot\varphi_0^2=4a^2$$

$$\dot\varphi_0=2a$$

$$C=\frac{1}{2}\cdot b^2\cdot 2a=b^2a$$

$$v^2=\cancel{4}b^4a^2\cdot\frac{4(1+\varphi)^2+1}{\cancel{4}b^2(1+\varphi)^3} \qquad * \ (1+\varphi)^2=\frac{\rho^4}{b^4} \ , \ (1+\varphi)^3=\frac{(1+\varphi)^4}{(1+\varphi)}=\frac{\frac{\rho^8}{b^8}}{\frac{\rho^2}{b^2}}=\frac{\rho^6}{b^6}$$

$$=b^4a^2\cdot\frac{4\frac{\rho^4}{b^4}+1}{\cancel{b^2}\cdot\frac{\rho^6}{b^{\cancel{6}4}}}$$

$$\underline{v^2=b^4a^2\,\frac{4\rho^4+b^4}{\rho^6}}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mb^4a^2\,\frac{4\rho^4+b^4}{\rho^6}$$

$$F_\rho=\frac{dE_k}{d\rho} \quad , \quad dE_k=\frac{1}{2}mb^4a^2\,\frac{16\rho^3d\rho\cdot\rho^6-6\rho^5d\rho(4\rho^4+b^4)}{\rho^{12}}$$

$$F_\rho=\frac{1}{\cancel{2}}mb^4a^2\left[-\frac{\cancel{2}\rho^5(4\rho^4+3b^4)}{\rho^{\cancel{12}\,7}}\right]$$

$$\underline{F_\rho=-mb^4a^2\,\frac{4\rho^4+3b^4}{\rho^7}}$$

II НАЧИН из $\quad z''+z=-\dfrac{F_\rho\cdot\rho^2}{4mC^2}$,

$$z'=-\frac{1}{2b}\,\frac{1}{\sqrt{(1+\varphi)^3}}=-\frac{b^2}{2\rho^3}$$

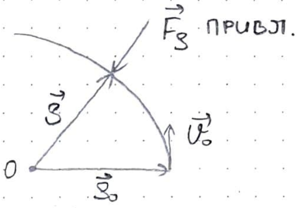
$$z''=-\frac{b^2}{2}\left(-3\frac{1}{\rho^4}\frac{d\rho}{d\varphi}\right) \ , \quad \frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{b}{2\sqrt{1+\varphi}}=\frac{b^2}{2\rho}$$

$$z''=\frac{3}{4}b^4\frac{1}{\rho^5}$$

$$F_\rho=-\frac{4mC^2}{\rho^2}(z''+z) \ , \quad C=b^2a \ , \quad z=\frac{1}{\rho}$$

$$\underline{F_\rho=-\frac{4mb^4a^2}{\rho^2}\left(\frac{3}{4}\frac{b^4}{\rho^5}+\frac{1}{\rho}\right)}$$

5.5. Тачка M масе m креће се у пољу привлачне силе интензитета $F_S = \left|\frac{mpv_0^2}{4S^2}\right|$ где је $p = const.$, v_0 – почетна брзина, S – растојање почетне тачке од центра силе. Одредити брзину тачке у функцији од S и трајекторију тачке ако је у почетном тренутку растојање тачке од центра силе $S_0 = \frac{p}{2}$, а почетна брзина управна на правац потега $\vec{S_0}$



$F_S = \left|\frac{mpv_0^2}{4S^2}\right|$, $S_0 = \frac{p}{2}$, $\vec{v_0} \perp \vec{S_0}$, $v = f(S)$, $S = f(\varphi)$ ...?

$F_S = -\frac{mpv_0^2}{4S^2}$ → ПРИВЛАЧНА

$$z'' + z = -\frac{F_S \cdot S^2}{4mC^2} = +\frac{\frac{mpv_0^2}{4S^2}\cdot S^2}{4m\frac{1}{16}p^2v_0^2}$$

$$C = \frac{1}{2}S_0^2\dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2}S_0 \cdot \underbrace{S_0\dot{\varphi}_0}_{v_{p_0} = v_0} = \frac{1}{2}S_0 v_0 = \frac{1}{2}\frac{p}{2}v_0 = \frac{1}{4}pv_0$$

$$z'' + z = \frac{1}{p}$$

$z = z_h + z_p$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow z_h = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi$ $\qquad$ * $z = \frac{1}{S}$, $S = f(\varphi)$

$z_p = A \Rightarrow z_p'' = 0 \Rightarrow 0 + A = \frac{1}{p} \Rightarrow z_p = \frac{1}{p}$

$$z = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{S} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + \frac{1}{p} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$-\frac{1}{S^2}\dot{S} = -C_1\dot{\varphi}\sin\varphi + C_2\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \dot{S} = v_S, \quad v_{S_0} = 0 \quad (v_0 = v_{p_0})$$

$$\frac{1}{S_0} = C_1\cos 0^\circ + C_2\sin 0^\circ + \frac{1}{p}, \quad S_0 = \frac{p}{2}$$

$$-\frac{1}{p^2}v_{S_0} = -C_1\dot{\varphi}_0\sin 0^\circ + C_2\dot{\varphi}_0\cos 0^\circ$$

$$\frac{2}{p} = C_1 + \frac{1}{p} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{p}$$

$$0 = C_2\dot{\varphi}_0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{p}\cos\varphi + \frac{1}{p}$$

$$\underline{\frac{1}{S} = \frac{1}{p}(\cos\varphi + 1)}$$

$v^2 = 4C^2\left[z'^2 + z^2\right]$, $z = \frac{1}{S}$, $z' = \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{1}{p}\sin\varphi$, $C = \frac{1}{4}pv_0$

$$v^2 = 4\frac{1}{16}p^2v_0^2\left(\frac{1}{p^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{S^2}\right) = \frac{1}{4}p^2v_0^2\left(\frac{1}{p^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{p^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{p^2}2\cos\varphi + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}v_0^2(2 + 2\cos\varphi)$$

$v^2 = \frac{1}{2}v_0^2(1 + \cos\varphi)$, $1 + \cos\varphi = \frac{p}{S}$

$$\underline{v^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0 p}{S}}$$

$\frac{1}{2}v_0\frac{p}{S}$