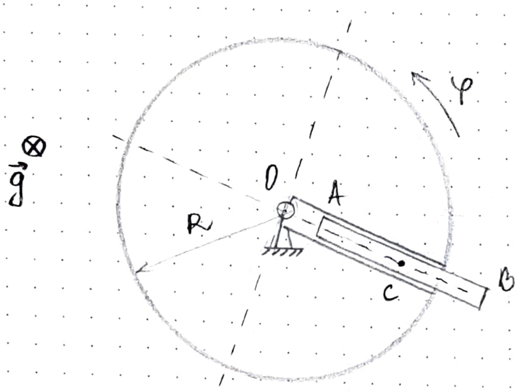
8.26. По глатком жлебу урезаном у хоризонтални диск полупречника R и масе m_1 који може да се обрће око вертикалне осе Oz, може да се креће хомогени штап AB дужине R и масе m_2. У почетном тренутку, када је крај A штапа био у центру диска, систем се обртао угаоном брзином ω_0, а штап је релативно мировао. Одредити угаону брзину диска када средиште штапа буде на ободу диска.



(1) $\dfrac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_i^{s}) = 0 \Rightarrow$ ДИСК ЈЕ ХОРИЗОНТАЛАН (ТЕЖИНЕ НЕ ПРАВЕ МОМЕНТ ЗА ОСУ Oz КАО НИ РЕАКЦИЈЕ ОСЛ.)

(2) $\mathcal{L}_{Oz} = const. = \mathcal{L}_{Oz}(0)$

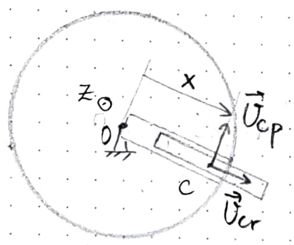
(3) $\mathcal{L}_{Oz} = \mathcal{L}_{Oz}^{D} + \mathcal{L}_{Oz}^{Š}$

$\boxed{\text{РОТАЦИЈА}}$ $\quad \mathcal{L}_{Oz}^{D} = J_{Oz}\dot{\varphi}\ , \quad J_{Oz} = \frac{1}{2}m_1R^2$

$\mathcal{L}_{Oz}^{D} = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi} \quad (4)$

ШТАП $\Rightarrow$ $\boxed{\text{РАВНО КРЕТАЊЕ}}$

$\vec{\mathcal{L}}_O^{Š} = \vec{r}_C \times m_2\vec{v}_C + \vec{\mathcal{L}}_C^{Š} \Rightarrow$ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА ТАЧКУ O ЗА ТЕЛО КОЈЕ ВРШИ РАВНО КРЕТАЊЕ



$*\ \vec{v}_C \Rightarrow$ АПСОЛУТНА БРЗИНА !

$\vec{v}_C = \vec{v}_{cp} + \vec{v}_{cr}$

$\vec{v}_{cr}$ → РЕЛАТИВНА БРЗ. ТАЧКЕ C

$\vec{v}_{cp}$ → ПРЕНОСНА БРЗ. ТАЧКЕ C

$v_{cp} = x\dot{\varphi}$

$v_{cr} = \dot{x}$

$r_c = x$

$*\ \mathcal{L}_{Cz'}^{Š} = J_{Cz'}\dot{\varphi} \Rightarrow$ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ШТАПА ЗА ЦЕНТАР ШТАПА, КАО ДА ШТАП РОТИРА УГАОНОМ БРЗИНОМ $\dot{\varphi}$ ОКО ОСЕ Oz'

$$\vec{\mathcal{L}}_O^{Š} = \vec{r}_C \times m_2\vec{v}_{cp} + \vec{r}_C \times m_2\vec{v}_{cr} + \vec{\mathcal{L}}_C^{Š}$$

$$\mathcal{L}_O^{Š} = x\cdot m_2 x\dot{\varphi}\cdot \sin\underbrace{\underbrace{\measuredangle(\vec{r}_C,\vec{v}_{cp})}_{90^\circ}}_{\sin 90^\circ = 1} + x\cdot m_2\dot{x}\cdot\sin\underbrace{\underbrace{\measuredangle(\vec{r}_C,\vec{v}_{cr})}_{0^\circ}}_{\sin 0^\circ = 0} + J_{Cz'}\dot{\varphi}\ , \quad J_{Cz'} = \frac{1}{12}m_2R^2$$

$$(5)\quad \mathcal{L}_O^{Š} = m_2x^2\dot{\varphi} + \frac{1}{12}m_2R^2\dot{\varphi} = \mathcal{L}_{Oz}^{Š}$$

$$(4),(5) \to (3) \Rightarrow \mathcal{L}_{Oz} = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi} + m_2x^2\dot{\varphi} + \frac{1}{12}m_2R^2\dot{\varphi} \quad (6)$$

$(6) \to (2) \quad *\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0,\ x(0) = \frac{R}{2},\quad \dot{\varphi}_1 = \omega,\ x_1 = R \to$ КАДА ЈЕ СРЕДИШТЕ ШТАПА НА ОБОДУ ДИСКА

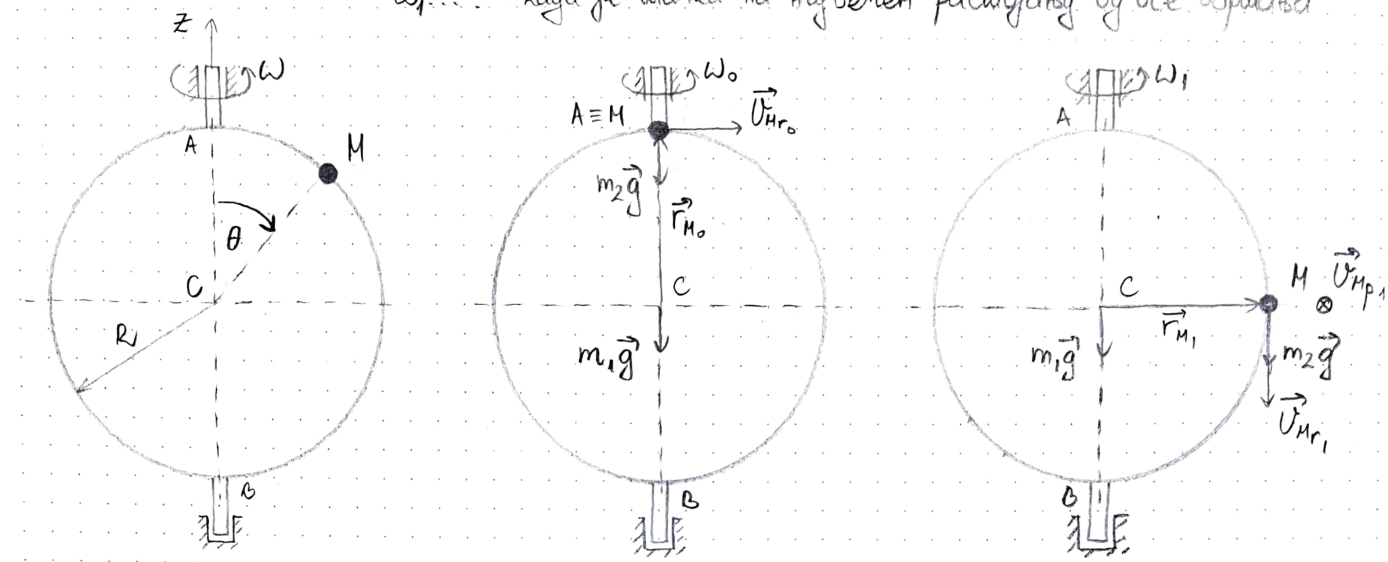
$$\frac{1}{2}m_1R^2\omega + m_2R^2\omega + \frac{1}{12}m_2R^2\omega = \frac{1}{2}m_1R^2\omega_0 + m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0 + \frac{1}{12}m_2R^2\omega_0 \quad /\cdot 12$$

$$(6m_1R^2 + 12m_2R^2 + m_2R^2)\omega = (6m_1R^2 + 4m_2R^2)\omega_0 \Rightarrow \omega = \frac{6m_1R^2 + 4m_2R^2}{6m_1R^2 + 13m_2R^2}\omega_0$$

$$\omega = \frac{6m_1 + 4m_2}{6m_1 + 13m_2}\omega_0$$

8.24. $m_1 \quad R \quad \omega_0 \qquad t_0 = 0 \Rightarrow M \equiv A \qquad M : m_2$

$\omega_1 \ldots ?$ * када је тачка на највећем растојању од осе обртања



$$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \sum M_{Cz}\left(\vec{F}_i^{\,s}\right) = 0$$

РЕАКЦИЈЕ У ОСЛОНЦИМА A И B КАО И ТЕЖИНЕ $m_1\vec{g}$ И $m_2\vec{g}$ НЕ ПРАВЕ МОМЕНТ ЗА ОСУ z

(1) $\mathcal{L}_{Cz} = \text{const.} = \mathcal{L}_{Cz}(0)$

$$\mathcal{L}_{Cz} = \mathcal{L}_{Cz}^{D} + \mathcal{L}_{Cz}^{M}$$

$\boxed{\text{РОТ}}$ $\mathcal{L}_{Cz}^{D} = J_{Cz}\dot{\varphi} \quad , \quad J_{Cz} = \frac{1}{4}m_1R^2$

$\mathcal{L}_{Cz}^{D} = \frac{1}{4}m_1R^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{Cz}^{D}(0) = \frac{1}{4}m_1R^2\omega_0 \quad , \quad \mathcal{L}_{Cz_1}^{D} = \frac{1}{4}m_1R^2\omega_1$

$\boxed{\text{ТАЧКА}}$ $\vec{\mathcal{L}}_C^{M} = \vec{r}_M \times m_2\vec{v}_M \qquad \vec{v}_M \Rightarrow$ АПСОЛУТНА БРЗ. $\qquad \vec{v}_M = \vec{v}_{Mp} + \vec{v}_{Mr}$

$$\vec{\mathcal{L}}_C^{M} = \underbrace{\vec{r}_M \times m_2\vec{v}_{Mp}}_{\text{ИМА ПРОЈЕКЦИЈУ САМО НА ОСУ } Cz} + \underbrace{\vec{r}_M \times m_2\vec{v}_{Mr}}_{\text{НЕМА ПРОЈЕКЦИЈУ НА ОСУ } Cz\,!}$$

$$\mathcal{L}_{Cz}^{M} = r_M \cdot m_2 \cdot v_{Mp} \underbrace{\sin\underbrace{\measuredangle\left(\vec{r}_M, \vec{v}_{Mp}\right)}_{90^\circ}}_{\sin 90^\circ = 1}$$

$t_0 \Rightarrow r_M = R \, , \; v_{Mp}(0) = 0 \cdot \omega_0 = 0$

$\mathcal{L}_{Cz}^{M}(0) = 0$

$t_1 \Rightarrow r_M = R \, , \; v_{Mp_1} = R\omega_1$

$\mathcal{L}_{Cz_1}^{M} = m_2R^2\omega_1$

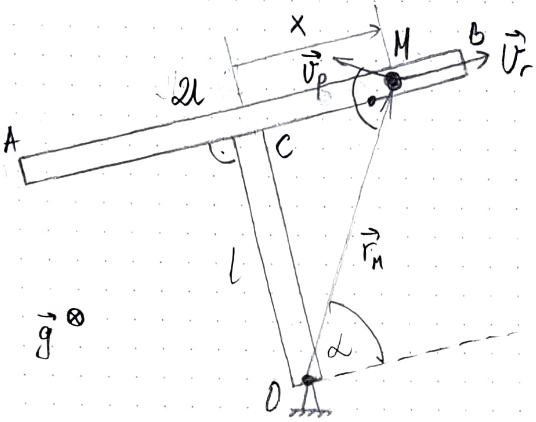
$$\mathcal{L}_{Cz}(0) = \frac{1}{4}m_1R^2\omega_0 + 0$$

$$\mathcal{L}_{Cz_1} = \frac{1}{4}m_1R^2\omega_1 + m_2R^2\omega_1$$

(1) $\Rightarrow \frac{1}{4}m_1R^2\omega_0 = \left(\frac{1}{4}m_1R^2 + m_2R^2\right)\omega_1 \quad / : R^2 / \cdot 4$

$$\omega_1 = \omega_0\frac{m_1}{m_1 + 4m_2}$$

8.27. Тело које може да се обрће без трења око вертикалне осе Oz састоји се од цеви AB дужине 2l и масе 2m, и штапа OC дужине l и масе m круто везаног за цев AB под правим углом у тачки C. Кроз цев се креће куглица масе m под дејством унутрашњих сила. Ако је у почетном тренутку систем био у миру, а куглица у положају A, одредити угао за који се окренуло тело до тренутка када је куглица стигла у положај B. Цев сматрати хомогеним штапом.



$r_M = \sqrt{l^2 + x^2}$ ⇒ ПОЛОЖАЈ КУГЛИЦЕ У ОДНОСУ НА ТАЧКУ O

$\vec{v}_M = \vec{v}_{Mp} + \vec{v}_{Mr}$ ⇒ АПСОЛУТНА БРЗИНА КУГЛИЦЕ

$v_{Mp} = r\dot{\varphi} = \sqrt{l^2 + x^2}\,\dot{\varphi}$ ⇒ ПРЕНОСНА БРЗ.

$v_{Mr} = \dot{x}$ ⇒ РЕЛАТИВНА БРЗ.

(1) $\frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = 0$ ⇒ ОСА Oz ЈЕ ВЕРТИКАЛНА И ТЕЖИНЕ НЕ ПРАВЕ МОМЕНТ ЗА ОСУ Oz, КАО НИ РЕАКЦИЈЕ У ОСЛОНЦУ O

(2) $\mathcal{L}_{Oz} = const. = \mathcal{L}_{Oz}(0)$

(3) $\mathcal{L}_{Oz} = \mathcal{L}_{Oz}^T + \mathcal{L}_{Oz}^M$

$\boxed{\text{РОТАЦИЈА}}$ $\circlearrowleft + \; \mathcal{L}_{Oz}^T = J_{Oz}\dot{\varphi}$ * СМЕР РОТАЦИЈЕ БИРАМО ЗА ПОЗИТИВАН СМЕР

(4) $J_{Oz} = J_{Oz}^{OC} + J_{Oz}^{AB}$ ⇒ САБИРАЈУ СЕ!

(5) $J_{Oz}^{OC} = \frac{1}{3}ml^2$

$J_{Oz}^{AB} = J_{Cz'}^{AB} + 2m\cdot l^2$ ⇒ ШТАЈНЕРОВА ТЕОРЕМА ЗА ШТАП AB!

$J_{Oz}^{AB} = \frac{1}{12}2m(2l)^2 + 2ml^2 = \frac{2}{3}ml^2 + 2ml^2$

(6) $J_{Oz}^{AB} = \frac{8}{3}ml^2$

(5),(6) → (4) ⇒ $J_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{8}{3}ml^2$

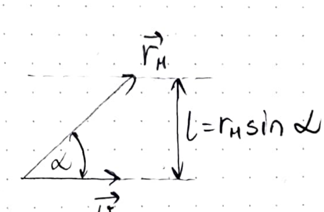
$J_{Oz} = 3ml^2$ (7)

$\mathcal{L}_{Oz}^T = 3ml^2\dot{\varphi}$ (8)

$\boxed{\text{ЗА ТАЧКУ}}$ $\circlearrowleft + \; \vec{\mathcal{L}}_O^M = \vec{r}_M \times m\vec{v}_M = \vec{r}_M \times m\vec{v}_{Mp} + \vec{r}_M \times m\vec{v}_{Mr}$

$\circlearrowleft + \; \mathcal{L}_O^M = r_M\, m v_{Mp} \underbrace{\sin\angle(\vec{r}_M, \vec{v}_{Mp})}_{\underbrace{90^\circ}_{\sin 90^\circ = 1}} - \underbrace{r_M\, m v_{Mr}\, \sin\angle(\vec{r}_M, \vec{v}_{Mr})}_{l}$

НИЈЕ У СМЕРУ РОТАЦИЈЕ



$\mathcal{L}_O^M = \sqrt{l^2 + x^2}\cdot m \cdot \sqrt{l^2 + x^2}\,\dot{\varphi} - l\cdot m\cdot\dot{x}$

(9) $\mathcal{L}_O^M = (l^2 + x^2)m\dot{\varphi} - lm\dot{x} = \mathcal{L}_{Oz}^M$

$(8),(9) \rightarrow (3) \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{Oz} = 3ml^2\dot{\varphi} + (l^2+x^2)m\dot{\varphi} - lm\dot{x} \quad (10)$

$(10) \rightarrow (2) \quad * \quad \dot{\varphi}(0)=0, \; x(0)=-l, \; \dot{x}(0)=0$ $\Rightarrow$ ПОЧ. ТР.

$\dot{\varphi}, x, \dot{x}$ $\Rightarrow$ ПРОИЗ. ТР. $\Rightarrow$ ЈЕР НЕ ТРАЖИМО $\dot{\varphi}_1$ НЕГО φ_1 **

$$\mathcal{L}_{Oz} = \mathcal{L}_{Oz}(0)$$

$$3ml^2\dot{\varphi} + (l^2+x^2)m\dot{\varphi} - ml\dot{x} = \cancel{3ml^2\cdot 0} + \cancel{(l^2+x^2)\cdot m\cdot 0} - \cancel{ml\cdot 0}$$

$$3ml^2\dot{\varphi} + ml^2\dot{\varphi} + mx^2\dot{\varphi} - ml\dot{x} = 0$$

$$4ml^2\dot{\varphi} + mx^2\dot{\varphi} = ml\dot{x} \quad /:m$$

$$(4l^2+x^2)\dot{\varphi} = l\dot{x} \quad /\cdot dt \qquad * \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \; \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$d\varphi = \frac{l}{4l^2+x^2}dx$$

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \int_{-l}^{l} \frac{l}{4l^2+x^2}dx$$

* ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛ

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{x_1}^{x_2}$$

! ОВДЕ ЈЕ $a = 2l$

$$\varphi_1 - 0 = \cancel{l}\frac{1}{2\cancel{l}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2l}\Big|_{-l}^{l}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cancel{l}}{2\cancel{l}} - \operatorname{arctg}\frac{-\cancel{l}}{2\cancel{l}}\right) \qquad * \quad \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\underline{\varphi_1 = 26{,}565°}$$

** НИЈЕ ДЕО ЗАДАТКА

КАДА БИ ТРАЖИЛИ $\dot{\varphi}_1$?

$(10) \rightarrow (2) \quad \dot{\varphi}(0)=0, \; x(0)=-l, \; \dot{x}(0)=0$

$\dot{\varphi}_1, \; x_1 = l, \; \dot{x}_1 = 0$ $\rightarrow$ ТАЧКА У ПОЛОЖАЈУ B МОРА ДА СЕ ЗАУСТАВИ

$$3ml^2\dot{\varphi}_1 + (l^2+l^2)m\dot{\varphi}_1 - \cancel{ml\cdot 0} = \cancel{3ml^2\cdot 0} + \cancel{(l^2+l^2)m\cdot 0} - \cancel{ml\cdot 0}$$

$$3ml^2\dot{\varphi}_1 + 2l^2m\dot{\varphi}_1 = 0$$

$5ml^2\dot{\varphi}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = 0 \Rightarrow$ У ТРЕНУТКУ КАДА ТАЧКА М СТИГНЕ У ПОЛОЖАЈ B УГАОНА БРЗИНА ЈЕ ЈЕДНАКА НУЛИ И ТО ЈЕ КОНАЧНА ВРЕДНОСТ УГАОНЕ БРЗИНЕ ИЗ КОЈЕ НЕ МОЖЕ ДА СЕ ОДРЕДИ УГАО!

ИНТЕГРАЦИЈА $\dot{\varphi}_1 = 0$ НЕМА СМИСЛА!