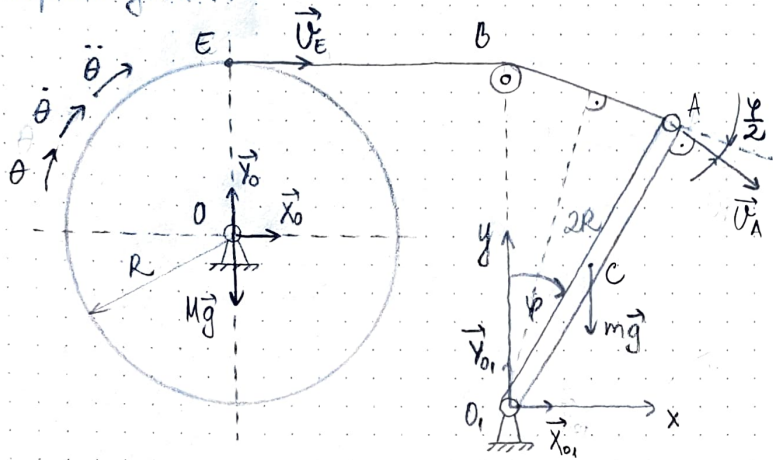


8.40. Систем се састоји од хомогеног диска масе  $M$  и полупречника  $R$  и хомогеног штапа дужине  $2R$  и масе  $m$ . На диск који може да се окреће око хоризонталне осе  $O$  намотано је неистезљиво унута занемарљиве масе које је пребачено преко кошура  $B$  занемарљиве масе и везано за крај  $A$  штапа који може да се окреће око хоризонталне осе  $O_1$ . Одредити угаону брзину штапа у тренутку када штап доспе у положај  $\varphi_1 = 90^\circ$ . У почетном тренутку штап је био вертикалан и имао занемарљиву малу угаону брзину у смеру пораста угла  $\varphi$ .



\* БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ ( $S$ )

1 РОТАЦИЈА ДИСКА }  
1 РОТАЦИЈА ШТАПА } 2

ЗБОГ БЕЗЕ (УНУТА) БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ СЕ СНИЖАВА ЗА 1

ДАКЛЕ  $S = 1$

КОРИСТИМО КОНАЧНИ ОБЛИК ТЕОРЕМЕ О ПРОМЕНИ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ ЈЕР ТРАЖИМО КОНАЧНУ ВРЕДНОСТ УГАОНЕ БРЗИНЕ  $\dot{\varphi}$ .

$$(1) E_{k1} - E_{k0} = A_{0-1}(\vec{M}\vec{g}) + A_{0-1}(m\vec{g}) + A_{0-1}(\vec{R}_0) + A_{0-1}(\vec{R}_{01})$$

$$(2) E_k = E_k^D + E_k^S \Rightarrow \text{УКУПНА КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА СИСТЕМА ЈЕДНАКА ЈЕ ЗБИРУ КИНЕТИЧКИХ ЕНЕРГИЈА ДИСКА И ШТАПА}$$

$$\boxed{\text{ROT}} E_k = \frac{1}{2} J_{O_2} \omega_z^2 \Rightarrow \text{КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА ТЕЛА КОЈЕ РОТИРА ОКО } O_2 \text{ УГАОНОМ БРЗ. } \omega_z$$

$$E_k^D = \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\theta}^2, J_{O_2} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow E_k^D = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$E_k^S = \frac{1}{2} J_{O_{12}} \dot{\varphi}^2, J_{O_{12}} = \frac{1}{3} m (2R)^2 = \frac{4}{3} m R^2 \Rightarrow E_k^S = \frac{2}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4) \quad \left. \begin{matrix} (3), (4) \rightarrow (2) \end{matrix} \right\}$$

$$(2) \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

Каква је веза између  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ ? (систем има 1 степен слободe)

II НАЧИН  $\Rightarrow$  Интензитет брзине сваке тачке унутра једнак је брзини  $v_E$ .

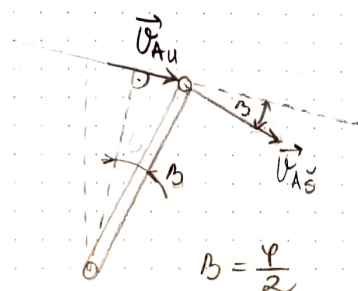
Међутим, брзина унутра у тачки  $A$  и брзина тачке  $A$  штапа разликују се по правцу!

! ИСТЕ СУ ПРОЈЕКЦИЈЕ ТИХ БРЗИНА НА ПРАВАЦ, УНУТА У ОКОЈИНИ ТАЧКЕ ДОДИРА  
• Т.Ј. БЕЗЕ (ТАЧКЕ  $A$ )

$$v_{Au} = v_{As} \cos \beta$$

$$R\dot{\theta} = 2R\dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \quad / : R$$

$$\dot{\theta} = 2\dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5)$$



$$v_{Au} = v_E = R\dot{\theta}$$

$$v_{As} = 2R\dot{\varphi}$$

$$\beta = \frac{\varphi}{2}$$

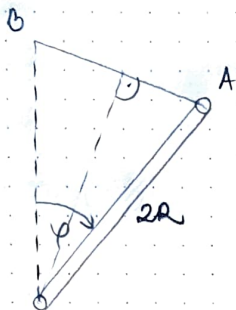
II начин

$\Rightarrow$

$$\overline{AB} = R\theta$$

$\Rightarrow$

ОДНОТА СЕ ДУЖИНА УНИЈЕТА ЈЕДНАКА  
КРУЖНОМ ЛУКУ КОЈИ ПРЕЂЕ ТАЧКА НА  
ОБОДУ ДИСКА



$$\overline{AB} = 2 \cdot 2R \sin \frac{\varphi}{2} = 4R \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$4R \sin \frac{\varphi}{2} = R\theta \quad / : R$$

$$\theta = 4 \sin \frac{\varphi}{2} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\theta} = 2\dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow (2) \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} MR^2 \cdot 4\dot{\varphi}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3} mR^2 \dot{\varphi}^2$$

$$E_k = MR^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3} mR^2 \dot{\varphi}^2$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0 \Rightarrow E_{k0} = 0 \quad (6)$$

$$t_1 \Rightarrow \varphi_1, \dot{\varphi}_1 = 90^\circ \Rightarrow E_{k1} = MR^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 45^\circ + \frac{2}{3} mR^2 \dot{\varphi}_1^2 = \left( \frac{1}{2}M + \frac{2}{3}m \right) R^2 \dot{\varphi}_1^2 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta A(M\vec{g}) &= M\vec{g} \cdot d\vec{r}_0 = M\vec{g} \cdot \vec{v}_0 dt = 0 \\ \delta A(\vec{R}_0) &= \vec{R}_0 \cdot d\vec{r}_0 = \vec{R}_0 \cdot \vec{v}_0 dt = 0 \\ \delta A(\vec{R}_{01}) &= \vec{R}_{01} \cdot d\vec{r}_{01} = \vec{R}_{01} \cdot \vec{v}_{01} dt = 0 \end{aligned} \right\} \text{ jer je } \vec{v}_0 = \vec{v}_{01} = 0$$

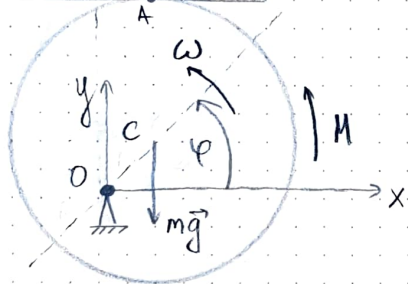
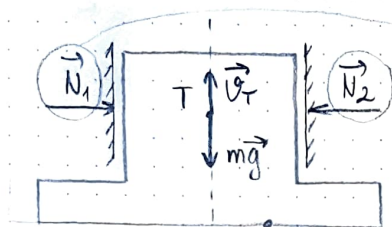
$$\delta A(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r}_c = -mg dy_c \Rightarrow A_{01}(m\vec{g}) = -mg \int_0^R dy_c = -mg(0-R) = mgR \quad (8)$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{j} \rightarrow d\vec{r}_c = dx_c\vec{i} + dy_c\vec{j}$$

$$(6), (7), (8) \rightarrow (1) \Rightarrow \left( \frac{1}{2}M + \frac{2}{3}m \right) R^2 \dot{\varphi}_1^2 = mgR \quad / : R$$

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{6mg}{(3M+4m)R}$$

8.41. Хоногени диск 1 полиуретника  $R$  и масе  $m$  обрће се око хоризонталне осе  $O$  и доводи у кретање тело 2 масе  $m$  које може да клизи по вертикалним вођицама. Ако је растојање осе обртања од центра диска  $OC = \frac{1}{2}R$ , одредити закон промене момента  $M$  спрема којим треба деловати на диск 1 да би се он обрћао константном угловом брзином  $\omega$ .



\* РАДОВИ СИЛА  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  СУ ЈЕДНАКИ НУЛТИ ЈЕР СУ УПРАВНЕ НА ПРАВАЦ ПОМЕРАЊА НАПАДНИХ ТАЧКИ

\* БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ (S)

1 РОТАЦИЈА (ТЕЛО 1)  
1 ТРАНСЛАЦИЈА (ТЕЛО 2) } 2

УВЕК СЕ ДОДИРУЈУ У ТАЧКИ А, ТЕ СЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ БРЗИНА ТАЧАКА КОНТАКТА НА ПРАВАЦ ЗАЈЕДНИЧКЕ НОРМАЛЕ (ОСА  $y$ ) НА ДОДИРНЕ КОНТУРЕ ТЕЛА 1 И 2 ЈЕДНАКЕ

$$(1) \frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A^T(m\vec{g})}{dt} + \frac{\delta A^C(m\vec{g})}{dt} + \frac{\delta A(\vec{M})}{dt} \Rightarrow$$

КОРИСТИМО ОВАЈ ОБЛИК ТЕОРЕМЕ ЈЕР СЕ ТРАЖИ ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА, А НЕ КОНАЧНА ВРЕДНОСТ У НЕКОМ ТРЕНУТКУ

$$(2) E_k = E_k^T + E_k^D$$

ТРАНСЛ.  $E_k^T = \frac{1}{2} m v_T^2 \Rightarrow$  КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА ТЕЛА КОЈЕ ТРАНСЛИРА БРЗИНОМ  $v_T$

РОТ.  $E_k^D = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\varphi}^2$ ,  $J_{Oz} = J_{Cz} + m(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{4}mR^2 = \frac{3}{4}mR^2 \Rightarrow E_k^D = \frac{3}{8}mR^2 \dot{\varphi}^2$  (4)

$$(3), (4) \rightarrow (2) \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{3}{8} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

Која је веза између  $v_T$  и  $\dot{\varphi}$ ?

Пошто се растојање дуж  $y$ -осе између тачке  $C$  и тачке додира не мења (увек је  $R$ ), померање тела 2 биће једнако вертикалном померању тачке  $C$ , тј. брзина трансляције тела 2 једнака је вертикалној пројекцији брзине тачке  $C$ :

$$v_T = y_C$$

$$(5) y_C = \frac{1}{2} R \sin \varphi \Rightarrow y_C = \frac{1}{2} R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$v_T = \frac{1}{2} R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{4} R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{3}{8} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{8} m R^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + 3), \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{8} m R^2 [2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} (\cos^2 \varphi + 3) + \dot{\varphi}^2 \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}] , \quad \ddot{\varphi} = 0 \leftarrow$$

$$(6) \frac{dE_k}{dt} = -\frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^3 \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{8} m R^2 \dot{\varphi}^3 \sin 2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$



$$\delta A^c(m\vec{g}) = -mg dy_c, \quad (5)/d \Rightarrow dy_c = \frac{1}{2} R \cos \varphi d\varphi$$

$$\delta A^c(m\vec{g}) = -\frac{1}{2} mg R \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{\delta A^c(m\vec{g})}{dt} = -\frac{1}{2} mg R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (7)$$

$$\delta A^T(m\vec{g}) = -mg dy_T, \quad dy_T = dy_c \Rightarrow \frac{\delta A^T(m\vec{g})}{dt} = -\frac{1}{2} mg R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (8)$$

$$\delta A(\vec{M}) = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt = \pm |\vec{M}| \cdot \omega dt \begin{cases} + \text{ за часи чер } \vec{M} \text{ и } \vec{\omega} \\ - \text{ за съпротива чер} \end{cases} \Rightarrow \text{ рад. момент } M$$

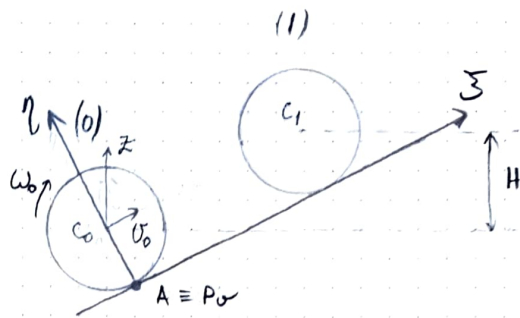
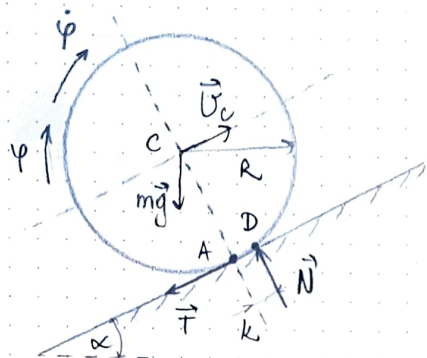
$$\frac{\delta A(\vec{M})}{dt} = M \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$(6), (7), (8), (9) \rightarrow (1) \Rightarrow -\frac{1}{8} m R^2 \dot{\varphi}^3 \sin 2\varphi = \cancel{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} mg R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \right) + M \dot{\varphi} \quad / : \dot{\varphi}$$

$$M = mg R \cos \varphi - \frac{1}{8} m g R^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi \quad \begin{matrix} \dot{\varphi} = \omega = \text{const.} \\ \varphi = \omega t \end{matrix}$$

$$\underline{M = mg R \cos(\omega t) - \frac{1}{2} m g R^2 \omega^2 \sin(2\omega t)}$$

8.33. Хомотени ваљак полупречника  $R$  и масе  $m$  поже да се котрља без клизања по стирној равни нагнутој према хоризонталу под углом  $\alpha$ . У почетном тренутку брзина средишта ваљка је  $v_0$  и усмерена је уз стирну равни. При котрљању цилиндра јавља се отпор котрљању са крајем  $0,1R$ . Одредити висину пењања цилиндра.



\* ПОШТО ЈЕ  $z_c = \text{const}$ , А ТАЧКА А ЈЕ ПОЈ БРЗИНА  $\Rightarrow$  ТЕЛО ИМА 1 СТЕПЕН СЛОБ. И КРЕТАЊЕ ЈЕ ОДРЕЂЕНО КООРДИНАТОМ  $\varphi$

(1)  $E_{k1} - E_{k0} = A_{0-1}(m\vec{g}) + A_{0-1}(\vec{F}) + A_{0-1}(\vec{N}) \Rightarrow$  КОНАЧНИ ОБЛИК ТЕОРЕМЕ О ПРОМЕНИ  $E_k$  ЈЕР ТРАЈИМО КОНАЧНО ПОНЕРАЊЕ

**РАВНО**  $E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2 \Rightarrow$  КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА ТЕЛА КОЈЕ ВРШИ РАВНО КРЕТАЊЕ

$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_0^2$ ,  $\omega_0 \dots ? \Rightarrow v_0 = R\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R}$   
 $= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{4}mR^2\frac{v_0^2}{R^2}$

(2)  $E_{k0} = \frac{3}{4}mv_0^2$

(3)  $E_{k1} = 0$  (ЗАУСТАВИ СЕ)

$\delta A(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mgdz$

$A_{0-1}(m\vec{g}) = -mg \int_0^H dz$

(4)  $A_{0-1}(m\vec{g}) = -mgH \Rightarrow$  РАД СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ КАДА СЕ ТЕЛО ПЕЊЕ НА ВИСИНУ  $H$

$\rightarrow$  ИНА СМИСЛА ЈЕР ТЕЖИНА ТЕЛА ОТЕМАЊА ПЕЊАЊЕ!

$\vec{N}$  СТВАРА ОТПОР КОТРЉАЊУ  $\Rightarrow$  ПРАВИ МОМЕНТ  $kN$  ОКО ОСЕ  $Cz$

ЧИЈИ СМЕР ЈЕ СУПРОТАН СМЕРУ ПОРАСТА УГЛА  $\varphi$

\* СИЛА  $\vec{N}$  ИМЕ ДА СЕ РЕДУКУЈЕ У ТАЧКУ С, ПРИ ЧЕМУ МОРА ДА СЕ ДОДА МОМЕНТ  $kN$

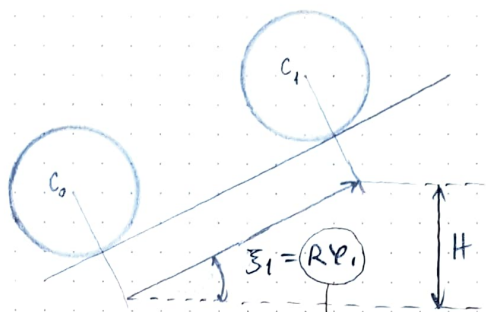
$\delta A(\vec{N}) = \vec{N} \cdot d\vec{r}_0$ ,  $\vec{N}_0 \sim (\vec{N}_c, \vec{M})$ ,  $M = kN$ ,  $\vec{N}_0 = \vec{N}_c = \vec{N}$   
 $= \vec{N}_c \cdot d\vec{r}_c + \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt$ ,  $\vec{N}_c \perp \vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$   
 $= -kN\dot{\varphi} dt$ ,  $\dot{\varphi} dt = d\varphi$

$\rightarrow$  ЈЕР ЈЕ СУПРОТАН СМЕР  $\vec{M}$  И  $\vec{\omega}$

$\delta A(\vec{N}) = -kN d\varphi \Rightarrow$  ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД СИЛЕ  $\vec{N}$  КОЈА СТВАРА ОТПОР КОТРЉАЊУ

$A_{0-1}(\vec{N}) = k \int_0^{\varphi} N d\varphi$ ,  $N \dots ?$

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \cdot / \cdot \vec{\mu} \Rightarrow 0 = -mg \cos \alpha + N \Rightarrow N = mg \cos \alpha = \text{const.}$$



$$A_{0-1}(\vec{N}) = k_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N d\varphi$$

$$= k N_0 \int d\varphi$$

$\varphi_1 \dots ?$

$$\xi_1 = R\varphi_1, \quad H = \xi_1 \sin \alpha \Rightarrow \xi_1 = \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$\varphi_1 = \frac{H}{R \sin \alpha}$$

TO JE KRUHNI DIZK KOJU  
ODGOVARA PREJECHOM PUTU

$$A_{0-1}(\vec{N}) = -kN \frac{H}{R \sin \alpha} \int d\varphi$$

$$(5) \quad A_{0-1}(\vec{N}) = - \frac{kNH}{R \sin \alpha}$$

→ IMA CHIJKA JER SE RADI O OTPORU KOTRŽANJU

$$(6) \quad \delta A(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{r}_A = \vec{T} \cdot \vec{v}_A dt, \quad A \equiv P_U \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_{P_U} = 0 \Rightarrow \delta A(\vec{T}) = 0 \Rightarrow A(\vec{T}) = 0$$

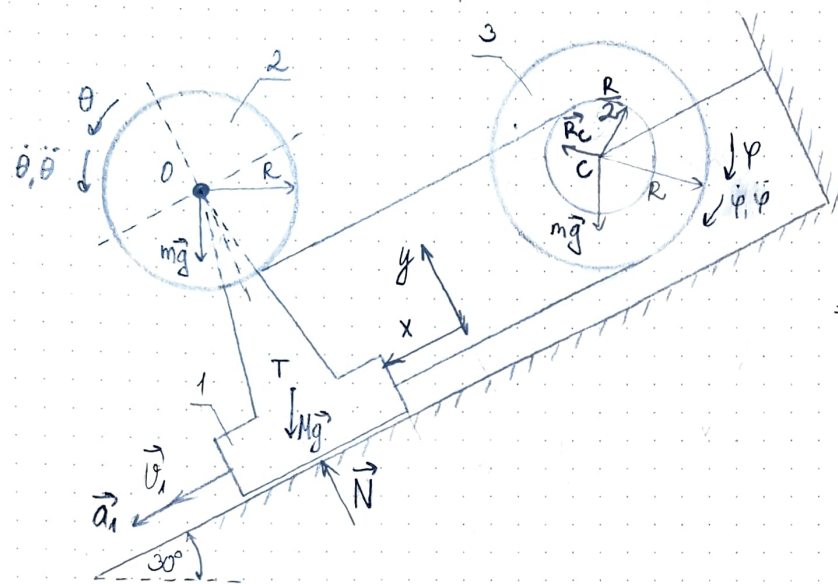
RAZ SJETE TREBA PRI KOTRŽANJU BEZ KOTIŽANJA JE JEDNAK NULU

$$(2), (3), (4), (5), (6) \rightarrow (1) \Rightarrow -\frac{3}{4} m v_0^2 = -mgH - \frac{kNH}{R \sin \alpha} / \cdot (-1), \quad k = \frac{1}{10} R$$

$$H = \frac{15 m v_0^2 \sin \alpha}{20 mg \sin \alpha + 2N}, \quad N = mg \cos \alpha$$

$$H = \frac{15 v_0^2}{2g(10 + \cot \alpha)}$$

8.43. Систем се састоји из платформе 1 масе  $M$ , хомогеног ваљка 2 масе  $m$  и полупречника  $R$  и два коаксијална кружна сиджена цилиндра 3 укупне масе  $m$  и полупречника  $\frac{1}{2}R$  и  $R$ , чији је полупречник инерције у односу на осу обртања  $i_c = \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Систем је сиджен неистезљивим унадином затенарџибе масе паралелним сидрну равни по којој може да се креће платформа. Одредиши однос  $\frac{M}{m}$  тако да платформа 1 има убрзање  $\frac{g}{4}$  одређеног низ сидрну равни.



$$i_c = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{g}{4}$$

$$\frac{M}{m} \dots ?$$

\* БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ:

ТРАНСЛАЦИЈА  $\Rightarrow 1$  (ТЕСТО 1)

РАЧНО ( $y_0 = \text{const}$ )  $\Rightarrow 2$  (ТЕСТО 2)

РОТАЦИЈА  $\Rightarrow 1$  (ТЕСТО 3)

ЗБОГ БЕЗА ИЗМЕЂУ ТЕЈЛА (1-2 У ТАЧКИ О, А 2-3 И 1-3 УЗ ПОМОЋ УНИЈЕТА, БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ СМЊЕН ЈЕ ЗА 3  $\Rightarrow S = 1$

! КРЕТАЊЕ СЕ МОЖЕ ИЗРАЗИТИ УЗ ПОМОЋ ЈЕДНЕ КООРДИНАТЕ (НПР.  $x$ )

$$(1) \quad \frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A^O(m\vec{g})}{dt} + \frac{\delta A(M\vec{g})}{dt} + \underbrace{\frac{\delta A^C(m\vec{g})}{dt}}_{\text{ТАЧКА C СЕ НЕ ПОМЕРА}} + \frac{\delta A(\vec{R}_C)}{dt} + \frac{\delta A(\vec{N})}{dt}$$

$\vec{N}$  ЈЕ  $\perp$  НА ПРАВАЦ ПОМЕРАЊА

$$(2) \quad E_k = E_k^I + E_k^{II} + E_k^{III}$$

ТРАНС.  $E_k^I = \frac{1}{2} M v_1^2$

\*  $a_1 = \frac{g}{4} = \text{const.} \Rightarrow v_1 = \frac{gt}{4}$

РАЧНО  $E_k^{II} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\theta}^2, \quad J_{O_2} = \frac{1}{2} m R^2, \quad v_0 = v_1 = \frac{gt}{4}$

$$= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

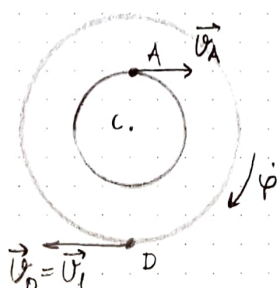
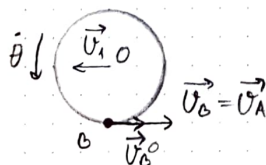
$$(4) \quad E_k^{II} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

РОТ  $E_k^{III} = \frac{1}{2} J_{C_2} \dot{\varphi}^2, \quad J_{C_2} = m i_c^2 = m \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$

$$(5) \quad E_k^{III} = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$(3), (4), (5) \rightarrow (2) \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} (m+M) v_1^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

БЕЗА ИЗМЕЂУ  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$  И  $v_1$ , ТЈ.  $\theta, \varphi$  И  $x$



$$v_1 = R \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_1}{R} \quad (6)$$

$$v_A = \frac{R}{2} \dot{\varphi} = \frac{1}{2} v_1$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_A + \vec{v}_0^0, \quad v_0 = v_A = \frac{1}{2} v_1, \quad v_0 = v_1$$

$$v_0 = -v_0 + v_0^0 \quad v_0^0 = R \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} v_1 = -v_1 + R \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3}{2} \frac{v_1}{R} \quad (7)$$



$$E_k = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{3}{2}\frac{v_1}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{v_1}{R}\right)^2$$

$$E_k = \frac{21}{16}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2, \quad v_1 = \frac{1}{4}gt$$

$$E_k = \frac{21}{256}mg^2t^2 + \frac{1}{32}Mg^2t^2$$

$$(8) \quad \frac{dE_k}{dt} = \frac{21}{128}mg^2t + \frac{1}{16}Mg^2t$$

$$SA(M\vec{g}) = M\vec{g} \cdot d\vec{r}_T = M\vec{g} \cdot \vec{v}_T dt = +Mg(v_T) \cos 60^\circ dt$$

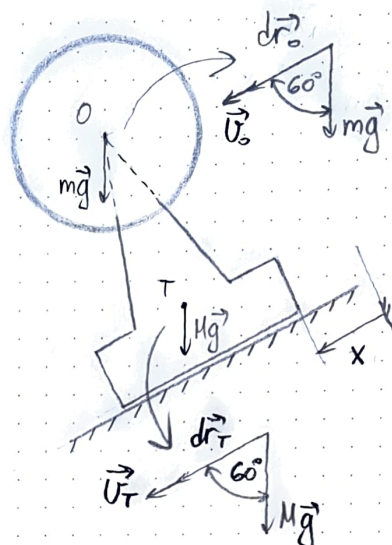
$v_T = v_1$

$$(9) \quad \frac{SA(M\vec{g})}{dt} = \frac{1}{2}Mg v_1 = \frac{1}{8}Mg^2t$$

$$SA^o(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r}_o = m\vec{g} \cdot \vec{v}_o dt = +mg(v_o) \cos 60^\circ dt$$

$v_o = v_1$

$$(10) \quad \frac{SA^o(m\vec{g})}{dt} = \frac{1}{2}mg v_1 = \frac{1}{8}mg^2t$$



$$(8), (9), (10) \rightarrow (1) \Rightarrow \frac{21}{128}mg^2t + \frac{1}{16}Mg^2t = \frac{1}{8}Mg^2t + \frac{1}{8}mg^2t \quad / \cdot \frac{128}{g^2t}$$

$$21m + 8M = 16M + 16m$$

$$5m = 8M$$

$$\underline{\underline{\frac{M}{m} = \frac{5}{8}}}$$