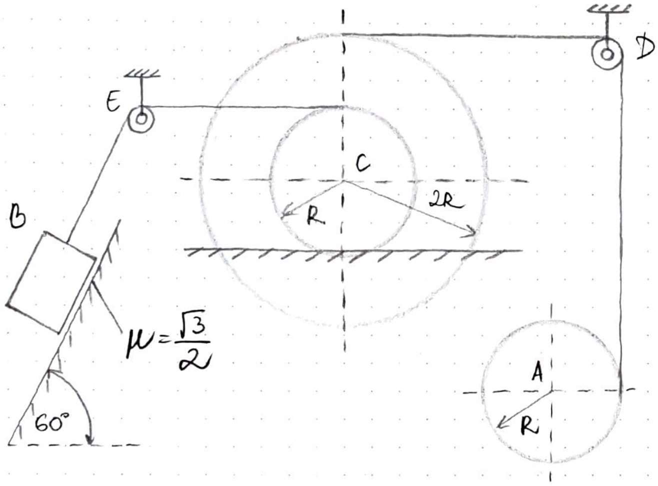
14.41. Два круто спојена коаксијална цилиндра полупречника R и $2R$, укупне масе $4m$ и полупречника инерције $i=R$ у односу на подужну централну осу C, могу да се котрљају по хоризонталној равни без клизања. На већи цилиндар намотано је уже које је пребачено преко котура D а затим намотано на хомогени диск A полупречника R и масе $2m$. Друго уже, пребачено преко котура E, једним својим крајем намотано је на мањи цилиндар а другим крајем закачено за терет B масе $4m$ који клизи по храпавој стрмој равни нагиба $60°$. Непокретни котурови D и E су занемарљиве масе. Одредити убрзања средишта диска A и терета B.



КОАКСИЈАЛНИ ДИСКОВИ ⇒ РАВНО КР.
(КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА)

$x = R\theta$, 1 СТ. СЛ.

ДИСК A ⇒ РАВНО КР. , 2 СТ. СЛ.
(ЦЕНТАР A НЕ ПОМЕРА СЕ ХОРИЗОНТАЛНО)

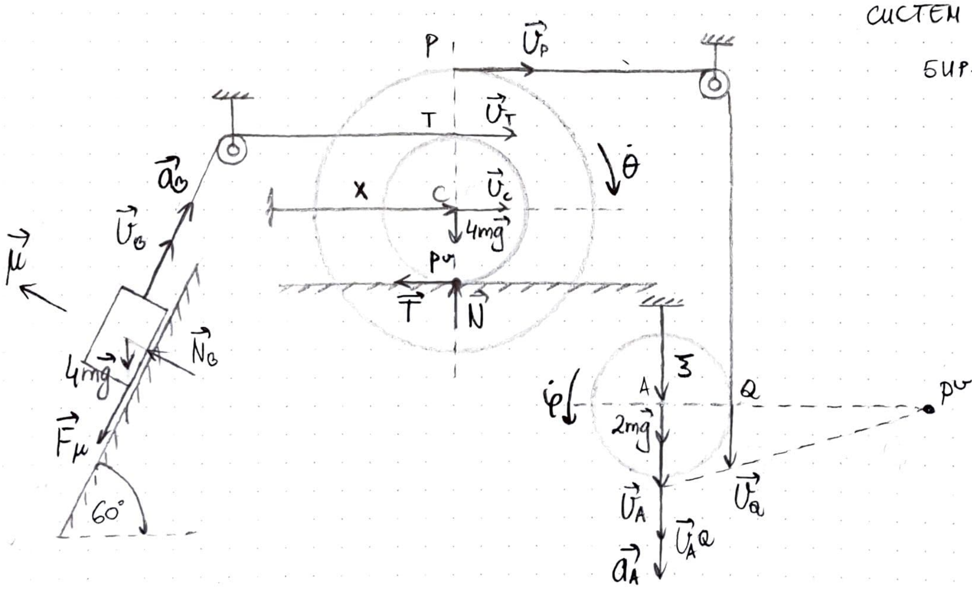
ТЕЛО B ⇒ ТРАНСЛАЦИЈА , 1 СТ. СЛ.

ЗБОГ 2 УЖЕТА БРОЈ СТЕПЕНИ СЛ.
СМАЊУЈЕ СЕ ЗА 2

СИСТЕМ ИМА 2 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

БИРАМО: $q_1 = x$

$q_2 = \xi$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi} = Q_\xi$$

$$E_k = E_k^A + E_k^B + E_k^C$$

$$v_C = \dot{x} \quad , \quad \dot{x} = \overline{CP^v}\dot{\theta} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$v_B = v_T = \overline{TP^v}\dot{\theta} = 2R\dot{\theta} = 2R\frac{\dot{x}}{R} = 2\dot{x}$$

$$v_A = \dot{\xi}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_Q + \vec{v}_A^Q \,/\cdot \vec{\lambda} \Rightarrow v_A = v_Q + v_A^Q \quad , \; v_Q = v_P = \overline{PP^v}\dot{\theta} = 3R\dot{\theta} = 3\dot{x} \; , \; v_A^Q = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{\xi} = 3\dot{x} + R\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{\xi} - 3\dot{x}}{R}$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^A = \frac{1}{2} 2m v_A^2 + \frac{1}{2} J_{Az} \dot{\varphi}^2$, $J_{Az} = \frac{1}{2} 2mR^2 = mR^2$

$= m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m\cancel{R^2} \frac{1}{\cancel{R^2}} (\dot{\xi} - 3\dot{x})^2 = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 - 3m\dot{x}\dot{\xi} + \frac{9}{2} m\dot{x}^2$

$E_k^A = \frac{3}{2} m\dot{\xi}^2 - 3m\dot{x}\dot{\xi} + \frac{9}{2} m\dot{x}^2$

$\boxed{\text{ТРАНС.}}$ $E_k^B = \frac{1}{2} 4m v_B^2 = 8m\dot{x}^2$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^C = \frac{1}{2} 4m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \dot{\theta}^2$, $J_{Cz} = 4mi^2 = 4mR^2$

$= 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot 4m\cancel{R^2} \cdot \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}}$

$E_k^C = 4m\dot{x}^2$

$E_k = \frac{33}{2} m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} m\dot{\xi}^2 - 3m\dot{x}\dot{\xi}$

$\delta A^B(4m\vec{g}) = 4m\vec{g} \cdot d\vec{r}_B = 4m\vec{g} \cdot \vec{v}_B dt = -4mg v_B \cos(90° + 60°) dt = -4mg v_B \sin 60° dt$

$= -4mg \cdot 2\dot{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dt = -4\sqrt{3} mg\, dx \Rightarrow Q_x^{4mg} = -4\sqrt{3} mg$

$\delta A^C(4m\vec{g}) = 0 \quad (4m\vec{g} \perp d\vec{r}_C)$

$\delta A(2m\vec{g}) = 2m\vec{g} \cdot d\vec{r}_A = 2mg\, d\xi \Rightarrow Q_\xi^{2mg} = 2mg$

$\delta A(\vec{F}_\mu) = \vec{F}_\mu \cdot \vec{v}_B dt = -F_\mu \cdot v_B dt = -F_\mu \cdot 2\dot{x} dt = -2F_\mu dx$, $F_\mu = \mu N_B = \frac{\sqrt{3}}{2} N_B$

$4m\vec{a}_B = 4m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{F}_\mu + \vec{S}_{BE} \,/\cdot \vec{\mu} \Rightarrow 0 = N_B - 4mg\cos 60° \Rightarrow N_B = 2mg \Rightarrow F_\mu = \sqrt{3} mg$

$\delta A(\vec{F}_\mu) = -2\sqrt{3} mg\, dx \Rightarrow Q_x^{F_\mu} = -2\sqrt{3} mg$ * РАД СИЛА $\vec{N}, \vec{T}$ И $\vec{N}_B$ ЈЕ $= 0$

$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 33m\dot{x} - 3m\dot{\xi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = 33m\ddot{x} - 3m\ddot{\xi}$

$\frac{\partial E_k}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}} = 3m\dot{\xi} - 3m\dot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}}\right) = 3m\ddot{\xi} - 3m\ddot{x}$

$33m\ddot{x} - 3m\ddot{\xi} = -6\sqrt{3} mg$

$3m\ddot{\xi} - 3m\ddot{x} = 2mg \Rightarrow m\ddot{x} = \frac{3m\ddot{\xi} - 2mg}{3}$

$33 \frac{3m\ddot{\xi} - 2mg}{3} - 3m\ddot{\xi} = -6\sqrt{3} mg$

$33m\ddot{\xi} - 22mg - 3m\ddot{\xi} = -6\sqrt{3} mg \Rightarrow 30m\ddot{\xi} = (22 - 6\sqrt{3}) mg \,/ : m$

$\underline{\ddot{\xi} = a_A = \frac{11 - 3\sqrt{3}}{15} g} > 0$ КРЕЋЕ СЕ УБРЗАНО НАВИШЕ !

$m\ddot{x} = \frac{\frac{11 - 3\sqrt{3}}{5} mg - 2mg}{3} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{15} mg \,/ : m$

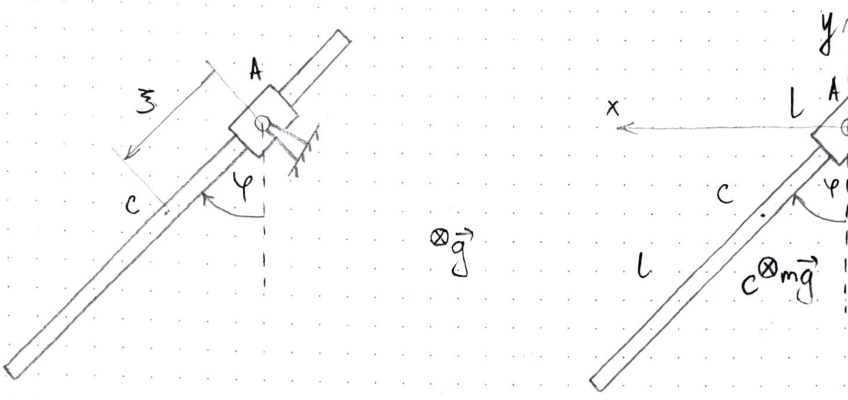
$\ddot{x} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{15} g$

$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d(2\dot{x})}{dt} = 2\ddot{x}$

$\underline{a_B = \frac{2 - 6\sqrt{3}}{15} g} < 0 \Rightarrow$ КРЕЋЕ СЕ УСПОРЕНО НАВИШЕ !

ПОГРЕШНО ПРЕТПОСТАВЉЕН СМЕР ВЕКТОРА УБРЗАЊА

14.16. Хомогени штап дужине $2l$ и масе m креће се у хоризонталној равни при чему пролази кроз глатку обртну вођицу A чија се маса може занемарити. Оса вођице Az је вертикална. Одредити диференцијалне једначине кретања штапа.



ШТАП ВРШИ РАВНО КРЕТАЊЕ $\Rightarrow$ 3 СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

ЗБОГ ВЕЗЕ СА ОБРТНОМ ВОЂИЦОМ БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ СЕ СМАЊУЈЕ ЗА 1.

ГЕНЕРАЛИСАНЕ КООРД. $q_1 = \xi$ и $q_2 = \varphi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi} = Q_\xi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz}\dot\varphi^2 \quad , \quad J_{cz} = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$x_c = \xi\sin\varphi \Rightarrow \dot x_c = \dot\xi\sin\varphi + \xi\dot\varphi\cos\varphi$$

$$y_c = -\xi\cos\varphi \Rightarrow \dot y_c = -\dot\xi\cos\varphi + \xi\dot\varphi\sin\varphi$$

$$v_c^2 = \dot x_c^2 + \dot y_c^2 = \dot\xi^2\sin^2\varphi + \cancel{2\xi\dot\xi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi} + \xi^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi$$
$$+\dot\xi^2\cos^2\varphi - \cancel{2\xi\dot\xi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi} + \xi^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$v_c^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\varphi^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot\varphi^2$$

$\delta A = 0$ јер је $m\vec g \perp d\vec r_c$, а $d\vec r_A = 0$

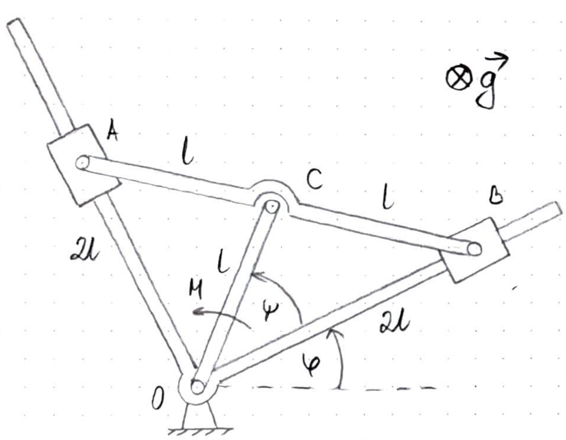
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_k}{\partial \xi} = m\xi\dot\varphi^2 \\ &\frac{\partial E_k}{\partial \dot\xi} = m\dot\xi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\xi}\right) = m\ddot\xi \end{aligned}\right\} \quad m\ddot\xi - m\xi\dot\varphi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot\xi - \xi\dot\varphi^2 = 0}}$$

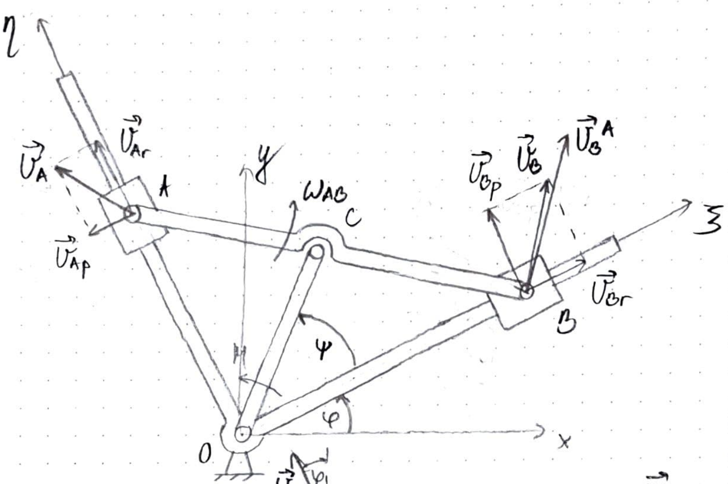
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$$

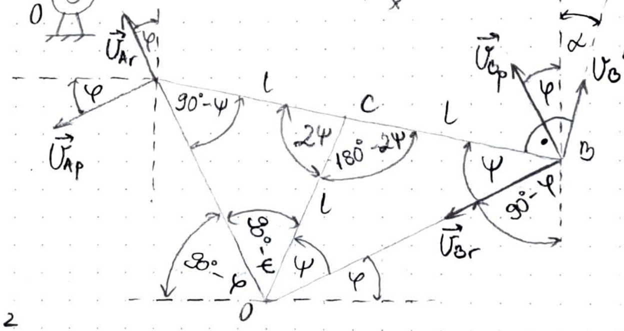
$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi} = m\xi^2\dot\varphi + \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) = 2m\xi\dot\xi\dot\varphi + m\xi^2\ddot\varphi + \frac{1}{3}ml^2\ddot\varphi$$

$$2m\xi\dot\xi\dot\varphi + m\xi^2\ddot\varphi + \frac{1}{3}ml^2\ddot\varphi = 0 \,/ : m \Rightarrow \underline{\underline{2\xi\dot\xi\dot\varphi + \left(\xi^2 + \frac{1}{3}l^2\right)\ddot\varphi = 0}}$$

14.26. Систем који се креће у <u>хоризонталној равни</u> састоји се од правоуглог угаоника чији су краци хомогени штапови једнаких дужина $2l$ и једнаких маса $2m$, хомогеног штапа AB дужине $2l$ и масе $2m$ и хомогеног штапа OC дужине l и масе m. Угаоник и штап OC обрћу се независно један од другог око вертикалне осе Oz. Штап AB везан је зглобно у средишту C за штап OC а својим крајевима за клизаче који се крећу по крацима угаоника без трења. У току кретања на штап OC делује спрег константног момента M. Узимајући за генералисане координате углове φ и ψ (видети слику) одредити коначне једначине кретања, ако је у почетном тренутку $(t=0)$
$\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0, \quad \dot\varphi(t_0) = \dot\psi(t_0) = 0$







$$\alpha = \cancel{90°} - \varphi + \psi + \cancel{90°} - \cancel{180°} = \psi - \varphi$$

$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi$ → РЕЛАТИВНИ УГАО У ОДНОСУ НА ПРАВАЦ OB

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \psi} = Q_\psi$$

$$E_k = E_k^L + E_k^{OC} + E_k^{AB}$$

$\boxed{\text{РОТ.}}$ $E_k^L = \frac{1}{2} J_{Oz}^L \dot\varphi^2, \quad J_{Oz} = \left[\frac{1}{3} 2m (2l)^2\right] \cdot 2 = \frac{16}{3} m l^2$

$$E_k^L = \frac{8}{3} m l^2 \dot\varphi^2$$

$\boxed{\text{РОТ.}}$ $E_k^{OC} = \frac{1}{2} J_{Oz}^{OC} \omega_{OC}^2, \quad J_{Oz}^{OC} = \frac{1}{3} m l^2$

ω_{OC} ⇒ АПСОЛУТНА УГАОНА БРЗИНА ШТАПА OC

$\theta = \varphi + \psi$ ⇒ АПСОЛУТНИ УГАО

$\dot\theta = \omega_{OC} = \dot\varphi + \dot\psi$

$$E_k^{OC} = \frac{1}{6} m l^2 (\dot\varphi + \dot\psi)^2$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $E_k^{AB} = \frac{1}{2} 2m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega_{AB}^2, \quad J_{Cz} = \frac{1}{12} 2m (2l)^2 = \frac{2}{3} m l^2$

* $\overrightarrow{OA} = 2l \sin\psi \, \vec{\mu} \Rightarrow v_A = \dot{\overline{OA}} = 2l \dot\psi \cos\psi, \quad v_{Ap} = \overline{OA}\,\dot\varphi = 2l \dot\varphi \sin\psi$

$\overrightarrow{OB} = 2l \cos\psi \, \vec{\lambda} \Rightarrow \vec{v}_{Br} = \frac{d_r \overrightarrow{OB}}{dt}$ ⇒ РЕЛАТИВНИ ИЗВОД

$$v_{Br} = \frac{d\overline{OB}}{dt} = -2l \dot\psi \sin\psi$$

$$v_{Bp} = \overline{OB}\,\dot\varphi = 2l \dot\varphi \cos\psi$$

$$\left.\begin{aligned} x_C = l\cos(\varphi+\psi) &\Rightarrow \dot x_C = -l(\dot\varphi+\dot\psi)\sin(\varphi+\psi) \\ y_C = l\sin(\varphi+\psi) &\Rightarrow \dot y_C = l(\dot\varphi+\dot\psi)\cos(\varphi+\psi) \end{aligned}\right\} v_C^2 = l^2(\dot\varphi+\dot\psi)^2$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{\,A}$$

$$\vec{v}_{Bp} + \vec{v}_{Br} = \vec{v}_{Ap} + \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_B^{\,A} \;\Big/\cdot \vec{i} \qquad v_B^A = 2l\omega_{AB}$$

x: $$-v_{Bp}\sin\varphi + v_{Br}\cos\varphi = -v_{Ap}\cos\varphi - v_{Ar}\sin\varphi + v_B^A\sin(\psi-\varphi)$$

$$-2l\dot\varphi\cos\psi\sin\varphi - 2l\dot\psi\sin\psi\cos\varphi = -2l\dot\varphi\sin\psi\cos\varphi - 2l\dot\psi\cos\psi\sin\varphi + 2l\omega_{AB}\sin(\psi-\varphi)$$

$$2l\dot\varphi(\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) - 2l\dot\psi(\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) = 2l\omega_{AB}\sin(\psi-\varphi)$$

$$\cancel{2l}\dot\varphi\,\cancel{\sin(\psi-\varphi)} - \cancel{2l}\dot\psi\,\cancel{\sin(\psi-\varphi)} = \cancel{2l}\omega_{AB}\,\cancel{\sin(\psi-\varphi)}$$

$$\omega_{AB} = \dot\varphi - \dot\psi$$

$$E_k^{AB} = ml^2(\dot\varphi+\dot\psi)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ml^2(\dot\varphi-\dot\psi)^2 = \frac{4}{3}ml^2\dot\varphi^2 + \frac{4}{3}ml^2\dot\varphi\dot\psi + \frac{4}{3}ml^2\dot\psi^2$$

$$E_k^{AB} = \frac{4}{3}ml^2\left(\dot\varphi^2 + \dot\varphi\dot\psi + \dot\psi^2\right)$$

$$E_k = \frac{25}{6}ml^2\dot\varphi^2 + \frac{5}{3}ml^2\dot\varphi\dot\psi + \frac{3}{2}ml^2\dot\psi^2$$

$$\delta A(\vec{M}) = \vec{M}\cdot d\vec{\theta} = +M\,d\theta = M(d\varphi + d\psi) \;\Rightarrow\; Q_\varphi^M = M\;,\; Q_\psi^M = M$$

* СИСТЕМ ЛЕЖИ У ХОРИЗОНТАЛНОЈ РАВНИ ⇒ ТЕЖИНЕ СУ НОРМАЛНЕ НА ПРАВЦЕ КРЕТАЊА
* РАДОВИ СИЛА РЕАКЦИЈА ИДЕАЛНИХ ВЕЗА У ТАЧКАМА O, A, B, C СУ $= 0$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial E_k}{\partial\psi} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} = \frac{25}{3}ml^2\dot\varphi + \frac{5}{3}ml^2\dot\psi \qquad\qquad \frac{\partial E_k}{\partial\dot\psi} = \frac{5}{3}ml^2\dot\varphi + 3ml^2\dot\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{25}{3}ml^2\ddot\varphi + \frac{5}{3}ml^2\ddot\psi \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\psi}\right) = \frac{5}{3}ml^2\ddot\varphi + 3ml^2\ddot\psi$$

$$\frac{25}{3}ml^2\ddot\varphi + \frac{5}{3}ml^2\ddot\psi = M$$

$$\frac{5}{3}ml^2\ddot\varphi + 3ml^2\ddot\psi = M \;\Rightarrow\; ml^2\ddot\psi = \frac{1}{3}\left(M - \frac{5}{3}ml^2\ddot\varphi\right)$$

$$\frac{25}{3}ml^2\ddot\varphi + \frac{5}{9}M - \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{3}ml^2\ddot\varphi = M$$

$$\frac{9\cdot25-25}{3\cdot\cancel{27}}ml^2\ddot\varphi = \frac{4}{\cancel{9}}M \;\Rightarrow\; \frac{2\cancel{8}\cdot25}{3}ml^2\ddot\varphi = 4M \;\Rightarrow\; \frac{50}{3}ml^2\ddot\varphi = M \;\Rightarrow\; ml^2\ddot\varphi = \frac{3}{50}M$$

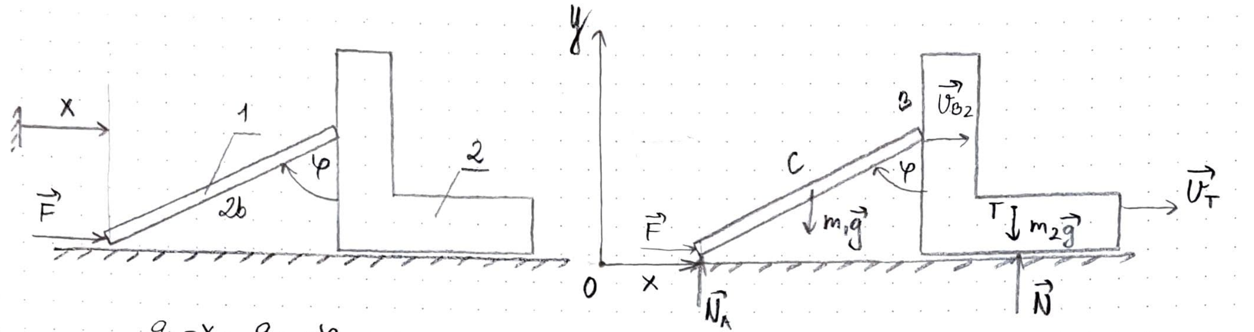
$$ml^2\ddot\psi = \frac{1}{3}M - \frac{\cancel{5}}{9}\,\frac{3}{\cancel{50}_{10}}M = \frac{30-3}{90}M = \frac{27}{90}M = \frac{3}{10}M$$

$$\ddot\varphi = \frac{3}{50}\frac{M}{ml^2} \;\Rightarrow\; \int_0^{\dot\varphi} d\dot\varphi = \frac{3}{50}\frac{M}{ml^2}\int_0^t dt \;\Rightarrow\; \dot\varphi = \frac{3}{50}\frac{M}{ml^2}t \;\Rightarrow\; \int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{3}{50}\frac{M}{ml^2}\int_0^t t\,dt$$

$$\ddot\psi = \frac{3}{10}\frac{M}{ml^2} \;\Rightarrow\; \int_0^{\dot\psi} d\dot\psi = \frac{3}{10}\frac{M}{ml^2}\int_0^t dt \;\Rightarrow\; \dot\psi = \frac{3}{10}\frac{M}{ml^2}t \;\Rightarrow\; \int_0^{\psi} d\psi = \frac{3}{10}\frac{M}{ml^2}\int_0^t t\,dt$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{3}{100}\frac{M}{ml^2}t^2\\ \psi &= \frac{3}{20}\frac{M}{ml^2}t^2\end{aligned}\right\}\text{ КОНАЧНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА}$$

14.29. Систем који се састоји од хомогеног штапа масе m_1 и дужине $2b$ и тела 2 масе m_2 може да се креће у вертикалној равни. Ако је сила F хоризонталног правца, као што је на слици приказано, написати диференцијалне једначине кретања система за дате генералисане координате. Трење занемарити.



$q_1 = x, \quad q_2 = \varphi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$E_k = E_k^{I} + E_k^{II}$$

$$E_k^{I} = \frac{1}{2}m_1 v_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2, \quad J_{Cz} = \frac{1}{12}m_1(2b)^2 = \frac{1}{3}m_1 b^2$$

$$x_C = x + b\sin\varphi \Rightarrow \dot{x}_C = \dot{x} + b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$y_C = b\cos\varphi \Rightarrow \dot{y}_C = -b\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + b^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_k^{I} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + m_1 b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m_1 b^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}m_1 b^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_k^{I} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + m_1 b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{2}{3}m_1 b^2\dot{\varphi}^2$$

$E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2 v_T^2$, $\quad v_T = v_{B2}$ (БРЗИНА ТАЧКЕ B2 НА ТЕЛУ 2 $\rightarrow v_{B2} = v_{B1,x}$!)

$$x_{B2} = x + 2b\sin\varphi \Rightarrow \dot{x}_{B2} = v_T = \dot{x} + 2b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$E_k^{II} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + 2m_2 b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + 2m_2 b^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + (m_1+2m_2)b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{2}{3}m_1 b^2\dot{\varphi}^2 + 2m_2 b^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$\delta A(\vec{F}) = F dx \Rightarrow Q_x^F = F$$

$$\delta A(m_1\vec{g}) = m_1\vec{g}\cdot d\vec{r}_C = -m_1 g\, dy_C, \quad dy_C = -b\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= +m_1 g b\sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow Q_\varphi^{m_1 g} = m_1 g b\sin\varphi$$

$$\delta A(m_2\vec{g}) = 0 \quad (m_2\vec{g} \perp d\vec{r}_T)$$

* РАДОВИ СИЛА $\vec{N}_A, \vec{N}, (\vec{N}_B, \vec{N}_B')$ СУ ЈЕДНАКИ НУЛИ

$$Q_x = F$$

$$Q_\varphi = m_1 g b\sin\varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + (m_1+2m_2)b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

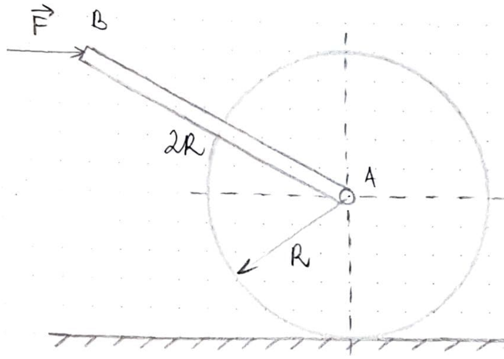
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x} + (m_1+2m_2)b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

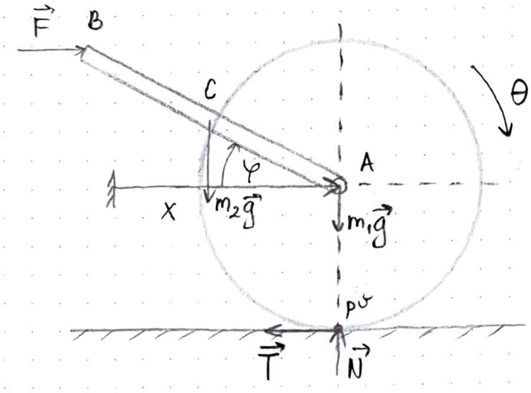
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -4m_2 b^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = (m_1+2m_2)b\dot{x}\cos\varphi + \frac{4}{3}m_1 b^2\dot{\varphi} + 4m_2 b^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (m_1+2m_2)b(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi) + \frac{4}{3}m_1 b^2\ddot{\varphi} + 4m_2 b^2(\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi)$$

$$\text{Д.Ј.}\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + (m_1+2m_2)b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = F \\ (m_1+2m_2)b(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi) + \frac{4}{3}m_1 b^2\ddot{\varphi} + 4m_2 b^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 4m_2 b^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi = m_1 g b\sin\varphi \end{cases}$$

14.30. Хомогени ваљак масе m_1 и полупречника R може да се котрља без клизања по хоризонталној равни. За средиште цилиндра зглобно је везан хомогени штап дужине $2R$ и масе m_2 на чијем другом крају делује сила F константног интензитета и хоризонталног правца, као што је приказано на слици. Поставити диференцијалне једначине кретања система.





ДИСК ⇒ РАВНО КРЕТАЊЕ, КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА $(x = R\theta)$ ⇒ 1 СТ. СЛ. $\quad q_1 = \theta$

ШТАП ⇒ РАВНО СЛОЖЕНО, РЕЛАТИВНА РОТАЦИЈА ОКО Az ⇒ 1 СТ. СЛ. $\quad q_2 = \varphi$

АПСОЛУТНИ УГАО ПОШТО РОТАЦИЈА ДИСКА НЕ УТИЧЕ НА РОТАЦИЈУ ШТАПА

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$E_k = E_k^D + E_k^Š$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $\quad E_k^D = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_{Az}\dot\theta^2 \quad , \quad J_{Az} = \frac{1}{2} m_1 R^2$

$$v_A = \dot x = R\dot\theta$$

$$E_k^D = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{4} m_1 R^2 \dot\theta^2$$

$$E_k^D = \frac{3}{4} m_1 R^2 \dot\theta^2$$

$\boxed{\text{РАВНО}}$ $\quad E_k^Š = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\dot\varphi^2 \quad , \quad J_{Cz} = \frac{1}{12} m_2 (2R)^2 = \frac{1}{3} m_2 R^2$

$$x_C = x - R\cos\varphi = R\theta - R\cos\varphi \Rightarrow \dot x_C = R\dot\theta + R\dot\varphi\sin\varphi$$

$$y_C = R\sin\varphi \Rightarrow \dot y_C = R\dot\varphi\cos\varphi$$

$$v_C^2 = \dot x_C^2 + \dot y_C^2 = R^2\dot\theta^2 + 2R^2\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + R^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + R^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi$$

$$v_C^2 = R^2\dot\theta^2 + 2R^2\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + R^2\dot\varphi^2$$

$$E_k^Š = \frac{1}{2} m_2 \left(R^2\dot\theta^2 + 2R^2\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + R^2\dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m_2 R^2 \dot\varphi^2$$

$$E_k^Š = \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot\theta^2 + m_2 R^2 \dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3} m_2 R^2 \dot\varphi^2$$

$$E_k = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) R^2\dot\theta^2 + m_2 R^2 \dot\theta\dot\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3} m_2 R^2 \dot\varphi^2$$

$$\delta A(m_1\vec g) = 0 \qquad (m_1\vec g \perp d\vec r_A)$$

$$\delta A(m_2\vec g) = m_2\vec g \cdot d\vec r_C = -m_2 g\, dy_C \quad , \quad y_C = R\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -m_2 g R\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\hookrightarrow Q_\varphi^{m_2 g} = -m_2 g R\cos\varphi$$

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_B = F\,dx_B \qquad x_B = x - 2R\cos\varphi$$

$$dx_B = dx + 2R\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\,dx + 2R\sin\varphi\, F\, d\varphi$$

$$\hookrightarrow Q_x^F = F$$

$$Q_\varphi^F = 2R\sin\varphi F$$

* RAD CUJA $\vec{N}, \vec{T}$ u $(\vec{R_A}, \vec{R_A'})$ JE $=0$

$$Q_x = F$$

$$Q_\varphi = -m_2 g R\cos\varphi + 2R\sin\varphi \cdot F$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta} = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)R^2\dot\theta + m_2 R^2 \dot\varphi \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta}\right) = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)R^2\ddot\theta + m_2R^2\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = m_2 R^2 \dot\varphi\dot\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi} = m_2R^2\dot\theta\sin\varphi + \frac{4}{3}m_2R^2\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) = m_2R^2\left(\ddot\theta\sin\varphi + \dot\theta\dot\varphi\cos\varphi\right) + \frac{4}{3}m_2R^2\ddot\varphi$$

$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)R^2\ddot\theta + m_2R^2\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) = F$$

$$m_2R^2\left(\ddot\theta\sin\varphi + \cancel{\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi}\right) + \frac{4}{3}m_2R^2\ddot\varphi - \cancel{m_2R^2\dot\varphi\dot\theta\cos\varphi} = -m_2gR\cos\varphi + 2R\sin\varphi \cdot F \quad / :R$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)R^2\ddot\theta + m_2R^2\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) - F = 0 \\ &m_2R\ddot\theta\sin\varphi + \frac{4}{3}m_2R\ddot\varphi + m_2g\cos\varphi - 2F\sin\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \text{D.J.}$$