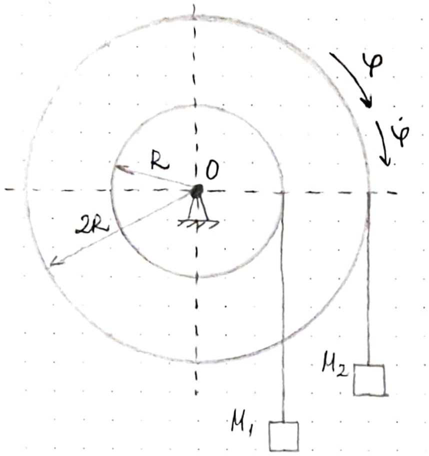
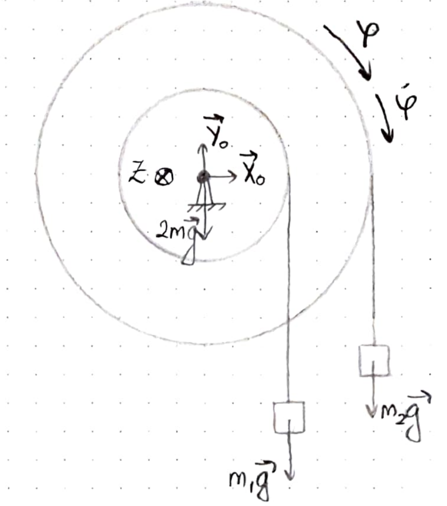
8.20. Терети M_1 и M_2 маса $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ везани су за крајеве ужади која су намотана на два хомогена, коаксијална, међусобно круто везана цилиндра полупречника R и $2R$ и укупне масе $2m$. Цилиндри се обрћу око непокретне хоризонталне осе симетрије за коју је њихов полупречник инерције $i_0 = \sqrt{2}R$. Одредити општу једначину обртања цилиндра.





ЗБОГ ВЕЗА (УЖАДИ) МОЖЕМО ДА ОДРЕДИМО КОЛИКО СЕ ПОМЕРЕ ТЕРЕТИ, АКО ЗНАМО ЗА КОЛИКО СЕ ОБРНУ КОАКСИЈАЛНИ ЦИЛИНДРИ А ТО ЈЕ УГАО ОБРТАЊА (φ)

$\Downarrow$

ИАКО СЕ 3 ТЕЛА КРЕЋУ, ПОСТОЈИ САМО ЈЕДАН СТЕПЕН СЛОБОДЕ

ТЕОРЕМА О ПРОМЕНИ МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА НЕПОКРЕТНУ ОСУ Oz $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_i^{s})}$ (1) $*$ $\mathcal{L} \Rightarrow$ ПИСАНО СЛОВО L

$\mathcal{L}_{Oz} \Rightarrow$ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА ОСУ Oz

$M_{Oz}(\vec{F}_i^{s}) \Rightarrow$ МОМЕНТ СПОЉАШЊИХ СИЛА ЗА ОСУ Oz

(2) $\underbrace{\mathcal{L}_{Oz}^{D}}_{\boxed{\text{РОТАЦИЈА}}} + \underbrace{\mathcal{L}_{Oz}^{M_1} + \mathcal{L}_{Oz}^{M_2}}_{\boxed{\text{ТРАНСЛАЦИЈА}}}$ $\Rightarrow$ УКУПНИ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА ОСУ Oz ЈЕДНАК ЈЕ ЗБИРУ ПОЈЕДИНАЧНИХ

$\boxed{\mathcal{L}_{Oz}^{D} = J_{Oz}\dot{\varphi}}$ $\Rightarrow$ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ТЕЛА КОЈЕ РОТИРА ОКО НЕПОКРЕТНЕ ОСЕ ЗА ТУ ОСУ

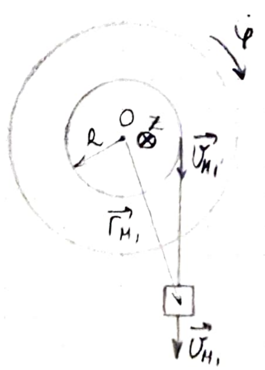
$*$ $J_{Oz} \Rightarrow$ АКСИЈАЛНИ МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ ЗА ОСУ РОТАЦИЈЕ Oz

$J_{Oz} = 2m \cdot (i_0)^2 = 4mR^2$

$\mathcal{L}_{Oz}^{D} = 4mR^2 \cdot \dot{\varphi}$ (3)

$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_O^{M_1} = \vec{r}_{M_1} \times m_1\vec{v}_{M_1}}$ $\Rightarrow$ МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ТЕЛА КОЈЕ ТРАНСЛИРА ЗА ТАЧКУ O

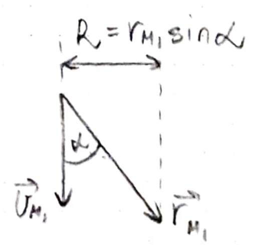
$*$ $\vec{r}_{M_1} \Rightarrow$ ПОЛОЖАЈ ТЕЛА M_1 У ОДНОСУ НА ТАЧКУ O



$v_{M_1} = R\dot{\varphi}$

$\mathcal{L}_O^{M_1} = r_{M_1} \cdot m_1 v_{M_1} \cdot \sin \underbrace{\measuredangle(\vec{r}_{M_1}, \vec{v}_{M_1})}_{\alpha}$

$\mathcal{L}_O^{M_1} = m_1 v_{M_1} \cdot \underbrace{r_{M_1} \sin\alpha}_{R} = 2m \cdot R\dot{\varphi} \cdot R$



(4) $\mathcal{L}_O^{M_1} = 2mR^2\dot{\varphi} = \mathcal{L}_{Oz}^{M_1}$

$*$ ПОШТО БРЗИНА $\vec{v}_{M_1}$ ЛЕЖИ У РАВНИ Oxy $\vec{\mathcal{L}}_O^{M_1}$ ИМА САМО ПОЗИТИВНУ ПРОЈЕКЦИЈУ НА ОСУ Oz (ОСА "ПРОДИРЕ У ПАПИР" $\otimes Oz$)

ЗА ТЕЛО M_2 ⇒ АНАЛОГНО ПОСТУПКУ ЗА ТЕЛО M_1

$$\vec{\mathcal{L}}_O^{M_2} = \vec{r}_{M_2} \times m_2 \vec{v}_{M_2}$$

$$\mathcal{L}_O^{M_2} = r_{M_2} \cdot m_2 \cdot v_{M_2} \cdot \sin\measuredangle(\vec{r}_{M_2}, \vec{v}_{M_2}) \quad , \quad m_2 = m, \; v_{M_2} = 2R\dot{\varphi}, \; r_{M_2}\sin\measuredangle(\vec{r}_{M_2}, \vec{v}_{M_2}) = 2R$$

$$(5) \quad \underline{\underline{\mathcal{L}_O^{M_2} = 4mR^2\dot{\varphi} = \mathcal{L}_{Oz}^{M_2}}}$$

$$(3),(4),(5) \rightarrow (2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{Oz} = 4mR^2\dot{\varphi} + 2mR^2\dot{\varphi} + 4mR^2\dot{\varphi}$$

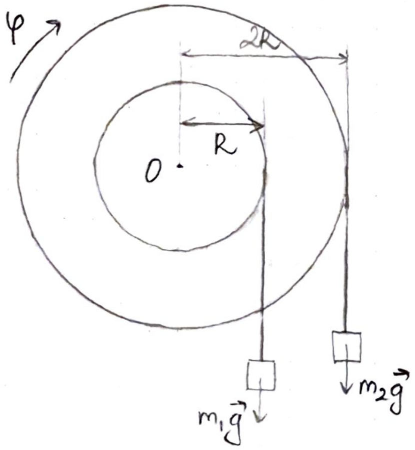
$$\underline{\underline{\mathcal{L}_{Oz} = 10mR^2\dot{\varphi}}} \quad (6)$$

МОМЕНАТИ $\underbrace{\text{СПОЉАШЊИХ СИЛА}}$ ЗА ОСУ Oz

$\vec{X}_O, \vec{Y}_O, 2m\vec{g}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$

↓

ОВЕ СИЛЕ НЕ ПРАВЕ МОМЕНТ ЗА ОСУ Oz !



* $m_1\vec{g}$ ПРАВИ МОМЕНТ СА КРАКОМ R
* $m_2\vec{g}$ ПРАВИ МОМЕНТ СА КРАКОМ $2R$

$$\circlearrowleft + \; M_{Oz}(m_1\vec{g}) = m_1 g R = 2mgR$$

$$\circlearrowleft + \; M_{Oz}(m_2\vec{g}) = m_2 g \cdot 2R = 2mgR$$

! ПОЗИТИВАН СМЕР МОМЕНТА ЈЕ СМЕР РОТАЦИЈЕ

$$\Sigma M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = 2mgR + 2mgR$$

$$\underline{\underline{\Sigma M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = 4mgR}} \quad (7)$$

$$(6),(7) \rightarrow (1) \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} &= \Sigma M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = 4mgR \\ \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} &= \frac{d(10mR^2\dot{\varphi})}{dt} = 10mR^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad 10mR^2\ddot{\varphi} = 4mgR \; / : 10mR^2$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{5}\frac{g}{R} \Rightarrow \text{ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ОБРТАЊА ЦИЛИНДРА}$$

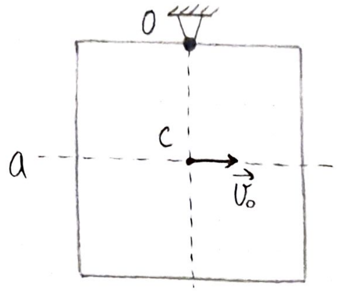
$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2}{5}\frac{g}{R} \; / \cdot dt \Rightarrow \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \frac{2}{5}\frac{g}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 = \frac{2}{5}\frac{g}{R}t$$

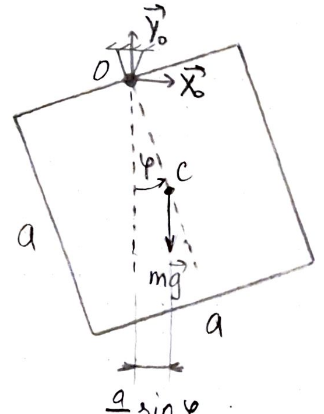
$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}_0 + \frac{2}{5}\frac{g}{R}t \; / \cdot dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \dot{\varphi}_0\int_0^t dt + \frac{2}{5}\frac{g}{R}\int_0^t t\,dt$$

$$\varphi - \varphi_0 = \dot{\varphi}_0 t + \frac{2}{5}\frac{g}{R}\frac{t^2}{2}$$

$$\underline{\varphi = \frac{1}{5}\frac{g}{R}t^2 + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0} \quad \text{ОПШТА ЈЕДНАЧИНА}$$

8.23. Хомогена квадратна плоча странице a и масе m обрће се око хоризонталне осе Oz управне на раван плоче. Одредити коначну једначину малих осцилација плоче око равнотежног положаја, ако је у почетном тренутку $t_0 = 0$ тежиште плоче било у најнижем положају и имало брзину $\vec{v}_0$.





$$(1)\quad \frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_i^s)$$

$$(2)\quad \mathcal{L}_{Oz} = J_{Oz}\dot{\varphi} \qquad \boxed{\text{РОТАЦИЈА}}$$

$J_{Oz} \Rightarrow$ АКСИЈАЛНИ МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ КВАДРАТНЕ ПЛОЧЕ <u>ЗА ОСУ Oz</u>

$$J_{Cz'} = \frac{1}{6}ma^2 \Rightarrow \underline{\text{ЗА ОСУ } Cz'}$$

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{ШТАЈНЕРОВА ТЕОРЕМА}$$

$$J_{Oz} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{5}{12}ma^2$$

$$(3)\quad \mathcal{L}_{Oz} = \frac{5}{12}ma^2\dot{\varphi}$$

$$(3)\rightarrow(2) \Rightarrow \mathcal{L}_{Oz} = \frac{5}{12}ma^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Oz}}{dt} = \frac{5}{12}ma^2\ddot{\varphi} \quad (4)$$

! СЛИКА МОРА ДА СЕ НАЦРТА У ПРОИЗВОЉНОМ ПОЛОЖАЈУ ДА БИ СЕ ПРИМЕНИО ЗАКОН И ВИДЕО КРАК СИЛЕ

! ПОЗИТИВАН СМЕР СЕ ПОКЛАПА СА СМЕРОМ ОБРТАЊА

$$\circlearrowleft + \sum M_{Oz}(\vec{F}_i^s) = M_{Oz}(m\vec{g}) + \cancel{M_{Oz}(\vec{X}_0)}^{0} + \cancel{M_{Oz}(\vec{Y}_0)}^{0} = -mg\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi \quad (5)$$

МОМЕНТ СИЛЕ НИЈЕ У ПОЗИТИВНОМ СМЕРУ

$$(4),(5)\rightarrow(1) \Rightarrow \frac{5}{12}ma^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}mga\sin\varphi$$

$$\frac{5}{12}ma^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mga\sin\varphi = 0 \;\Big/ : \frac{5}{12}ma^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{6}{5}\frac{g}{a}\sin\varphi = 0$$

ЗА МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{g}{a}}_{\omega^2}\varphi = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{5a}}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$\varphi = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

$$\dot{\varphi} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$$

$$0 = C_1 + 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{\frac{a}{2}} = 0 + C_2\omega \Rightarrow C_2 = \frac{2v_0}{a\omega} = \frac{2v_0}{a}\sqrt{\frac{5a}{6g}}$$

$$\underline{\varphi = \frac{2v_0}{a}\sqrt{\frac{5a}{6g}}\sin\sqrt{\frac{6g}{5a}}\,t}$$