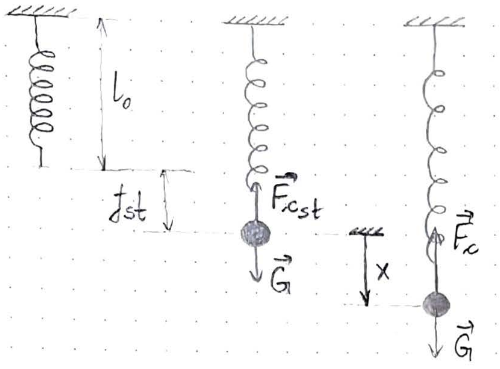
1)

4.1. Тело тежине 2N обешено је о еластичну опругу чија је крутост таква да под дејством силе од 0,5 N издужење износи 1 cm. Коју почетну брзину вертикалног правца треба саопштити телу у положају равнотеже да би амплитуде његових осцилација имале вредности 2cm.



$c = \frac{0,5N}{1cm} = 50\frac{N}{m}$

$R = 2cm$

$G = 2N$

$\dot{x}_0 \ldots ?$

$m\vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{cst} \,/\cdot \vec{i}$

$0 = G - cf_{st}$

$f_{st} = \frac{G}{c}$

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_c \,/\cdot \vec{i}$

$m\ddot{x} = G - c(x + f_{st})$

$m\ddot{x} = \cancel{G} - cx - \cancel{cf_{st}}$

$m\ddot{x} + cx = 0 \quad /:m$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$

$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$

$e^{\pm ikt} = \cos kt \pm \sin kt$

$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$

$C_1 = R\cos\alpha \; , \; C_2 = R\sin\alpha$

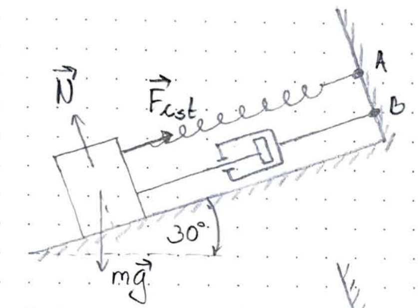
$x = R\cos\alpha\cos\omega t + R\sin\alpha\sin\omega t$

$x = R\cos(\omega t - \alpha) \overset{t_0}{\Rightarrow} 0 = R\cos(-\alpha) = R\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\dot{x} = -R\omega\sin(\omega t - \alpha) \overset{t_0}{\Rightarrow} \dot{x}_0 = -R\omega\sin(-\alpha) = R\omega\sin\alpha^{1}$

$\dot{x}_0 = R\sqrt{\frac{c}{m}} = R\sqrt{\frac{cg}{G}} = 0,02m\sqrt{\frac{50\cdot 9,81}{2}} \Rightarrow \dot{x}_0 = 0,31\,\frac{m}{s}$

4.30. Тело масе m везано је опругом крутости c за непокретну тачку A и пригушивачем за непокретну тачку B. Оно може да клизи по глаткој стрмој равни нагиба $\alpha = 30°$. Кретањем клипа у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора, пропорционална првом степену брзине клипа у односу на цилиндар. Коеф. пропорционалности је B. Одредити коефицијент B тако да је период осциловања 2 пута већи од периода осциловања без пригушивача.

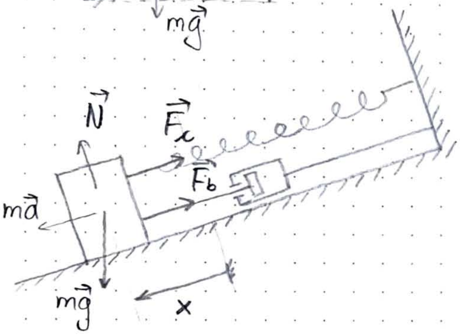


$$m\vec{a} = 0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{cst} \; / \cdot \vec{i}$$

$$0 = mg\sin 30° - F_{cst}$$

$$0 = \frac{1}{2}mg - cf_{st}$$

$$f_{st} = \frac{mg}{2c}$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}_b \; / \cdot \vec{i}$$

$$m\ddot{x} = mg\sin 30° - c(x + f_{st}) - B\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + B\dot{x} + cx = \frac{1}{2}mg - cf_{st} = 0 \; / : m$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{B}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

коефицијент пригушења

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad p^2 = \omega^2 - \delta^2$$

$$T_p = 2T_\omega$$

$$\frac{2\pi}{p} = 2\frac{2\pi}{\omega}$$

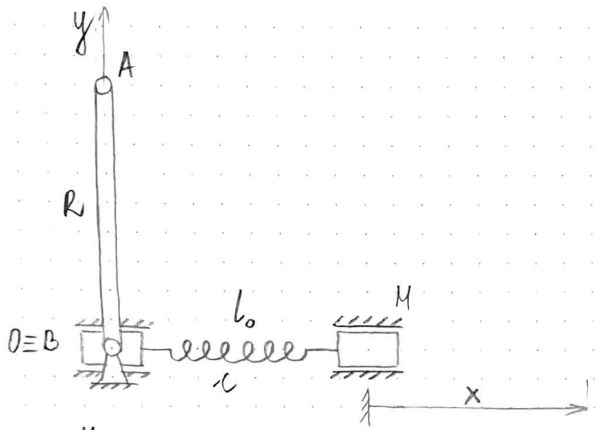
$$p = \frac{\omega}{2} = \sqrt{\omega^2 - \frac{B^2}{4m^2}} \; /^2$$

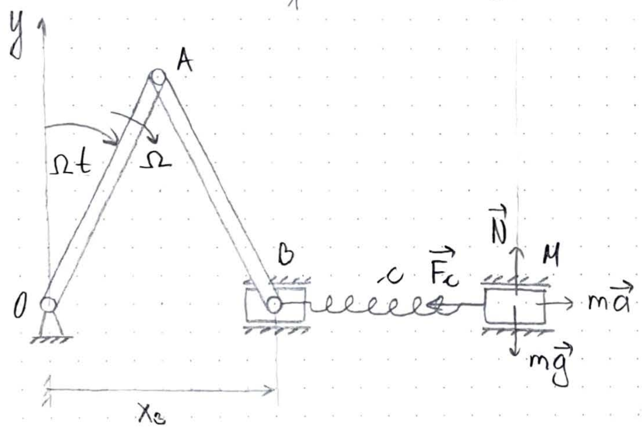
$$\frac{\omega^2}{4} = \omega^2 - \frac{B^2}{4m^2}$$

$$\frac{3}{4}\omega^2 = \frac{B^2}{4m^2} \Rightarrow B^2 = 3m^2\omega^2$$

$$B = \sqrt{3}m\omega$$

4.38. Кривајa OA клипног механизма обрће се константном угаоном брзином $\Omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$. За клизач B механизма везано је опругом крутости c тело M масе m које може да се креће по глаткој хоризонталној вођици. Ако је у поч. тр. опруга била ненапрегнута, а тело мировало, написати коначну једначину кретања тела. За коорд. поч. узети почетни положај тела M. Узети да је $\overline{OA}=\overline{AB}=R$. У почетном тренутку штапови су били вертикални.





$$x_B = 2R\sin\Omega t = 2R\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

$$F_c = -c(x-x_B) = -c\left(x-2R\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_c} \quad / \cdot \vec{i}$$

$$m\ddot{x} = -cx + 2Rc\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$$

$$m\ddot{x} + cx = 2Rc\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2R\omega^2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x_h = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \Omega \Rightarrow \text{РЕЗОНАНЦИЈА}$$

$$x_p = t(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

$$\dot{x}_p = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + t(-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t + (-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t) + t(-A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t)$$

$$= 2\Omega(B\cos\Omega t - A\sin\Omega t) - t\Omega^2(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

$$2\Omega(B\cos\Omega t - A\sin\Omega t) - t\Omega^2(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) + \omega^2 t(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) = 2R\omega^2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t \quad , \omega = \Omega$$

$$2\Omega B - \cancel{t\Omega^2 A} + \cancel{\omega^2 t A} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$-2\Omega A - t\Omega^2 B + \omega^2 t B = 2R\omega^2 \quad / : \omega = \Omega$$

$$-\cancel{2}A = \cancel{2}R\omega \Rightarrow A = -R\omega$$

$$x_p = -R\omega t\cos\Omega t$$

О.Р. $$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - R\omega t\cos\Omega t$$

$$\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t - R\omega(\cos\Omega t - t\Omega\sin\Omega t)$$

$$0 = C_1 + 0 - 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

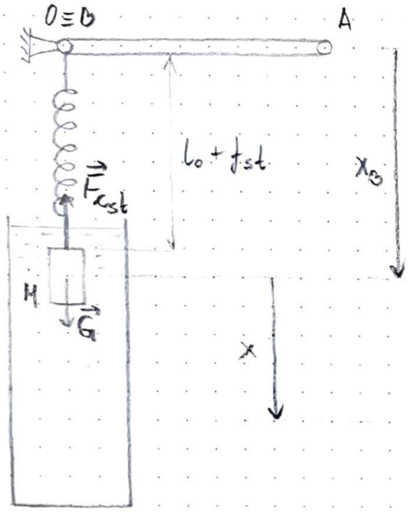
$$0 = -0 + C_2\omega - R\omega + 0 \Rightarrow C_2 = R$$

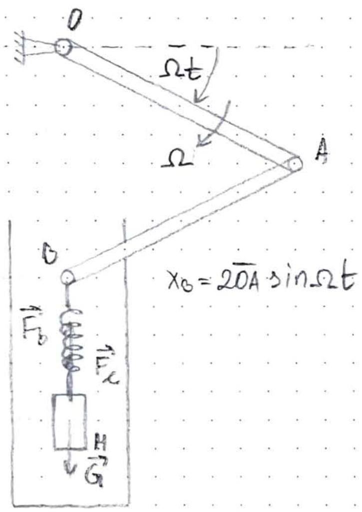
$$x = R\sin\omega t - R\omega t\cos\Omega t$$

$$x = R\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) - R\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

4.43. Горњи крај опруге крутости $c = 0,5\,\frac{N}{cm}$ везан је за тачку B клипног механизма, а доњи крај за тело M тежине $G = 1\,N$. Кривaja OA обрће се константном угаоном брзином $\Omega = 4\pi\,s^{-1}$, а тело M при томе осцилује у отпорној средини у којој је при брзини $v = 1\,\frac{cm}{s}$ сила отпора $0,02\,N$. Одредити коначну једначину крет. тела M око положаја статичке равнотеже који одговара углу $\varphi_0 = 0$. Узети да је $\overline{OA} = \overline{AB} = 3cm$.

* КАДА СЕ ТРАЖЕ ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ (ЗБИРКА) ⇒ ОДРЕДИТИ САМО x_p !





$$c = 0,5\frac{N}{cm} = 0,5\cdot 100\frac{N}{m} = 50\frac{N}{m}$$
$$G = 1N$$
$$\Omega = 4\pi s^{-1}$$
$$b = \frac{F_b}{v} = \frac{0,02}{1} = 0,02\frac{Ns}{cm} = 2\frac{kg}{s}$$
$$\varphi_0 = 0 \Rightarrow \text{стат. равн.}$$
$$\overline{OA} = \overline{AB} = 3cm = 0,03m$$
$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{bg}{2G} \approx \frac{2\cdot 10}{2\cdot 1} = 10$$
$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{G} \approx \frac{50\cdot 10}{1} \approx 500$$
$$\omega = \sqrt{500} = \sqrt{5}\cdot 10 \qquad \omega > \delta !$$

$$m\vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{c_{st}} \quad /\cdot\vec{i}$$
$$0 = G - cf_{st} \Rightarrow f_{st} = \frac{G}{c}$$

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_c + \vec{F}_b \quad /\cdot\vec{i}$$
$$m\ddot{x} = \cancel{G} - c(\cancel{f_{st}} + x - x_B) - b\dot{x} \quad /:m$$
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 2\omega^2\overline{OA}\sin\Omega t$$
$$\ddot{x} + 20\dot{x} + 500x = 30\sin(4\pi t)$$
$$\lambda^2 + 20\lambda + 500 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4\cdot 500}}{2} = \frac{-20 \pm i40}{2}$$
$$\lambda_{1,2} = -10 \pm i20$$
$$\boxed{x_h = e^{-10t}(c_1\cos 20t + c_2\sin 20t)}$$

$$x_p = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$
$$\dot{x}_p = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$
$$\ddot{x}_p = -A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t$$

$$-A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t$$
$$-20A\Omega\sin\Omega t + 20B\Omega\cos\Omega t$$
$$+500A\cos\Omega t + 500B\sin\Omega t$$
$$= 30\sin\Omega t$$

$$-B\Omega^2 - 20A\Omega + 500B = 30$$
$$-A\Omega^2 + 20B\Omega + 500A = 0$$
$$\Omega^2 = 16\pi^2$$

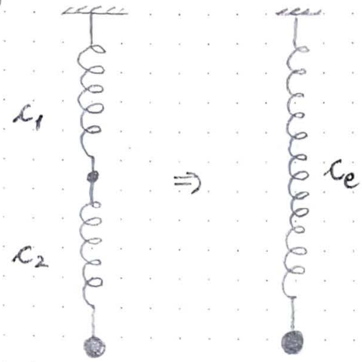
$$342,25B - 251,2A = 30$$
$$251,2B + 342,25A = 0 \quad /\cdot\frac{342,25}{251,2}$$
$$-251,2A - \frac{(342,25)^2}{251,2}A = 30 \quad /\cdot 251,2$$
$$-(251,2)^2A - (342,25)^2A = 30\cdot 251,2$$
$$A = -\frac{30\cdot 251,2}{(251,2)^2 + (342,25)^2} = -0,042$$
$$B = -\frac{342,25}{251,2}A = 0,057$$

$$\boxed{x_p = -0,042\cos 4\pi t + 0,057\sin 4\pi t}$$

$$x = e^{-10t}(c_1\cos 20t + c_2\sin 20t)$$
$$-0,042\cos 4\pi t + 0,057\sin 4\pi t$$
$$\dot{x} = -10e^{-10t}(c_1\cos 20t + c_2\sin 20t)$$
$$+ e^{-10t}(-20c_1\sin 20t + 20c_2\cos 20t)$$
$$+0,527\sin 4\pi t + 0,716\cos 4\pi t$$
$$0 = c_1 - 0,042 \Rightarrow c_1 = 0,042$$
$$0 = -10c_1 + 20c_2 + 0,716 \Rightarrow c_2 = 0,0148$$

$$\boxed{\begin{aligned} x = {} & e^{-10t}(0,042\cos 20t + 0,0148\sin 20t) \\ & -0,042\cos 4\pi t + 0,057\sin 4\pi t \end{aligned}}$$

I



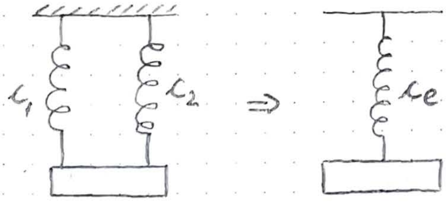
$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2$$

$$F_c = F_{c_1} = F_{c_2}$$

$$\frac{F_c}{c_e} = \frac{F_{c_1}}{c_1} + \frac{F_{c_2}}{c_2} \quad / : F_c$$

$$\boxed{\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

II



$$\Delta X = \Delta X_1 = \Delta X_2$$

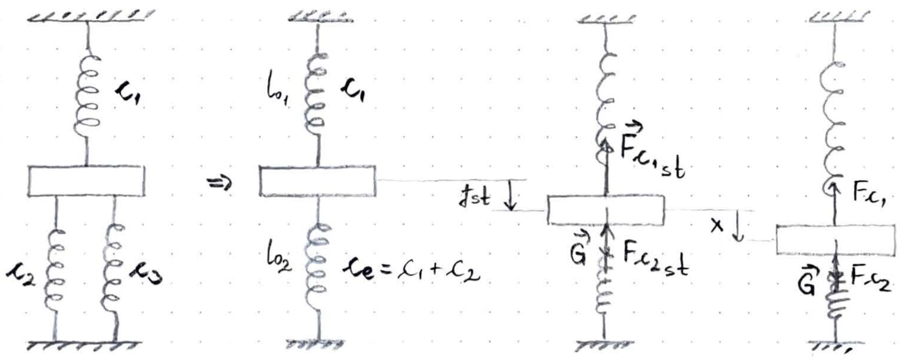
$$F_c = F_{c_1} + F_{c_2}$$

$$c_e \Delta X = c_1 \Delta X_1 + c_2 \Delta X_2 \quad / : \Delta X$$

$$\boxed{c_e = c_1 + c_2}$$

ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ ОПРУГЕ

4.8. Тело масе $m = 1kg$ везано је вертикалним опругама крутости $c_1 = 2\frac{N}{cm}$, $c_2 = c_3 = 7\frac{N}{cm}$. Одредити кружну фреквенцију вертикалних осцилација тела.



$$m\vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{c_1 st} + \vec{F}_{c_2 st}$$

$$0 = G - c_1 f_{st} - c_e f_{st}$$

$$(c_1 + c_e) f_{st} = G$$

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_{c_1} + \vec{F}_{c_2}$$

$$m\ddot{x} = \cancel{G} - c_1(\cancel{f_{st}} + x) - c_e(\cancel{f_{st}} + x)$$

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_e)x = 0$$

$$c = c_1 + c_e = c_1 + c_2 + c_3$$

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad /:m$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

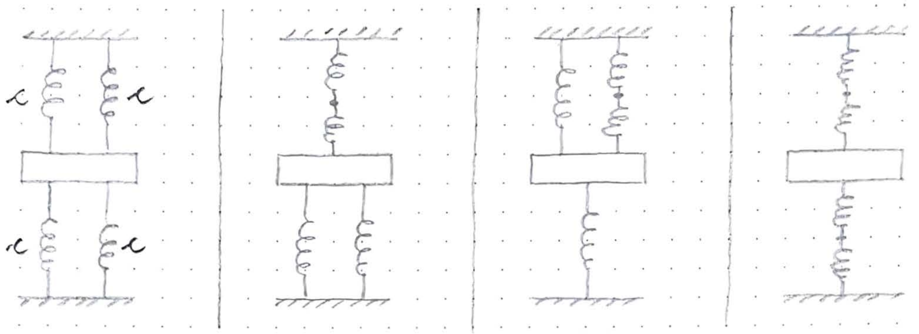
$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{16\frac{N}{cm}}{1kg}} = 4\sqrt{100\frac{kg\frac{m}{m}\cdot\frac{1}{s^2}}{kg}} \Rightarrow \underline{\omega = 40 s^{-1}}$$

4.9. Тело масе m, везано помоћу четири опруге једнаких крутости c, врши вертикалне осцилације. На сликама приказана су четири различита начина везивања опруга. Одредити периоде осциловања за сва четири случаја.

$c_{e_1} \Rightarrow$

$c_{e_2} \Rightarrow$

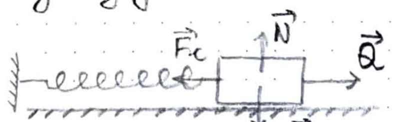


$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Из задатка 4.8 види се да је $\omega^2 = \dfrac{c_{e_1} + c_{e_2}}{m} = \dfrac{c_e}{m}$

$c_{e_1} = 2c$	$\frac{1}{c_{e_1}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c}$	$c_{e_1} = c + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}c$	$c_{e_1} = \frac{c}{2}$
$c_{e_2} = 2c$	$c_{e_1} = \frac{c}{2}$	$c_{e_2} = c$	$c_{e_2} = \frac{c}{2}$
$\omega^2 = \frac{4c}{m}$	$c_{e_2} = 2c$	$\omega^2 = \frac{5c}{2m}$	$\omega^2 = \frac{c}{m}$
$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\omega^2 = \frac{\frac{5}{2}c}{m} = \frac{5c}{2m}$	$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5c}}}$	$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}}$
$\underline{T = \pi\sqrt{\frac{m}{c}}}$	$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5c}}}$		

4.37. Тело A масе $m = 1\,kg$ везано опругом крутости $c = 0{,}1\,\frac{kN}{m}$ креће се по хоризонталној глаткој равни под дејством принудне силе $Q = 10\sin\left(10t + \frac{1}{3}\right)[N]$, $t[s]$. Одредити принудне осцилације тела A.



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{Q} \;/\; \vec{i}$$

$$m\ddot{x} = -cx + 10\sin\left(10t + \frac{1}{3}\right)$$

$$m\ddot{x} + cx = 10\sin\left(10t + \frac{1}{3}\right) \;/ : m$$

$$\ddot{x} + 100x = 10\sin\left(10t + \frac{1}{3}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = 100$$

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i10$$

$$x_h = C_1\cos 10t + C_2\sin 10t$$

Да ли ипак резонанција?!

$\omega = 10$

$\Omega = 10$

иако код принудне силе постоји фазна разлика!

$$\sin\left(10t + \frac{1}{3}\right) = \sin 10t\cos\frac{1}{3} + \cos 10t\sin\frac{1}{3}$$

$$\ddot{x} + 100x = 10\cos\frac{1}{3}\cdot\sin 10t + 10\sin\frac{1}{3}\cdot\cos 10t \qquad \underline{\omega = \Omega}!$$

$$x_p = t\left(A\sin 10t + B\cos 10t\right)$$

$$\dot{x}_p = A\sin 10t + B\cos 10t + t\left(10A\cos 10t - 10B\sin 10t\right)$$

$$\ddot{x}_p = 20A\cos 10t - 20B\sin 10t - t\left(100A\sin 10t + 100B\cos 10t\right)$$

$$20A\cos 10t - 20B\sin 10t - 100At\sin 10t - 100Bt\cos 10t$$
$$+ 100At\sin 10t + 100Bt\cos 10t = 10\cos\frac{1}{3}\sin 10t + 10\sin\frac{1}{3}\cos 10t$$

$$20A - \cancel{100Bt} + \cancel{100Bt} = 10\sin\frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}$$

$$-20B - \cancel{100At} + \cancel{100At} = 10\cos\frac{1}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}$$

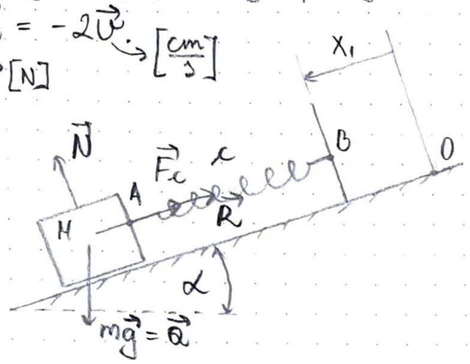
$$x_p = \frac{1}{2}t\left(\sin\frac{1}{3}\sin 10t - \cos\frac{1}{3}\cos 10t\right)$$

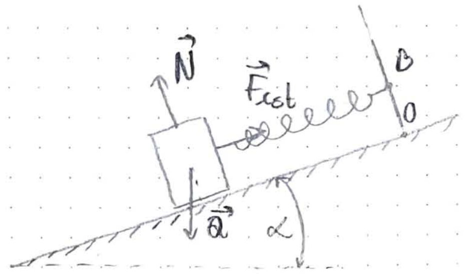
$$\underline{x_p = -\frac{1}{2}t\cos\left(10t + \frac{1}{3}\right)}$$

x.

4.42. На стрмој равни нагиба $\alpha = 30^\circ$ налази се тело M тежине $Q = 100N$. Тело је везано за крај A еластичне опруге крутости $c = 50\frac{N}{cm}$. Крај B опруге креће се дуж осе опруге по закону $x_1 = 2\sin(15t)$. Одредити једначину принудних осцилација тела M, ако се при његовом кретању јавља и сила отпора $\vec{R} = -2\vec{v}$

$\vec{R} \rightarrow [N]$, $\vec{v} \rightarrow \left[\frac{cm}{s}\right]$





$$m\vec{a} = 0 = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F}_{cst}$$

$$0 = Q\sin\alpha - c f_{st}$$

$$c f_{st} = \frac{1}{2}Q$$

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F_c} + \vec{R}$$

$$F_c = c(f_{st} + x - x_1) \qquad c = 50\frac{N}{cm} = 50 \cdot 100\frac{N}{m} = 5000\frac{N}{m}$$

$$R = -2\dot{x}, \quad \dot{x}\left[\frac{cm}{s}\right], \; R[N] \Rightarrow -2\left[\frac{kg}{s} \cdot 10^2\right] \cdot \dot{x}\left[\frac{10^{-2}\,m}{s}\right] = R[N] \Rightarrow R = -2 \cdot 10^2\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = \cancel{Q} - c(\cancel{f_{st}} + x - x_1) - 200\dot{x} \qquad m = \frac{G}{g} = 10{,}19\,kg$$

$$10{,}19\ddot{x} + 200\dot{x} + 5000x = 5000 \cdot 2\sin(15t) \quad /:10{,}19$$

$$\ddot{x} + 19{,}63\dot{x} + 490{,}68x = 981{,}35\sin(15t)$$

$$x_p = A\sin 15t + B\cos 15t \Rightarrow \dot{x}_p = 15A\cos 15t - 15B\sin 15t \Rightarrow \ddot{x}_p = -225(A\sin 15t + B\cos 15t)$$

$$-225A\sin 15t - 225B\cos 15t + 294{,}45A\cos 15t - 294{,}45B\sin 15t$$
$$+ 490{,}68A\sin 15t + 490{,}68B\cos 15t = 981{,}35\sin 15t$$

$$-225A - 294{,}45B + 490{,}68A = 981{,}35$$

$$-225B + 294{,}45A + 490{,}68B = 0 \Rightarrow A = -\frac{265{,}68}{294{,}45}B = -0{,}902B$$

$$265{,}68(-0{,}902B) - 294{,}45B = 981{,}35 \Rightarrow B = 1{,}837$$

$$A = -1{,}657$$

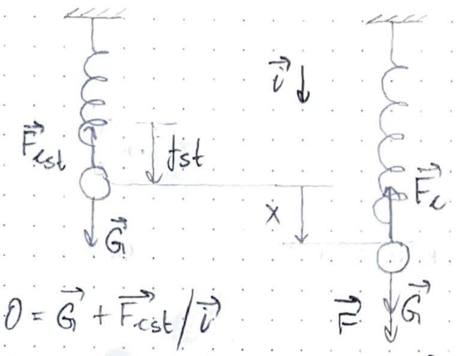
$$\underline{x_p = -1{,}657\sin 15t + 1{,}837\cos 15t}$$

8.32 $G = 2{,}45N$

$c = 1\frac{N}{cm} = 100\frac{N}{m}$

$F = 1{,}8\sin(16t)\,[N]$

x_p - ?



$0 = \vec{G} + \vec{F}_{cst} / \vec{i}$

$0 = G - F_{cst}$

$F_{cst} = c f_{st}$

$\boxed{0 = G - c f_{st}}$

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_c + \vec{F} / \cdot \vec{i}$

$m\ddot{x} = G - F_c + F$

$F_c = c(f_{st} + x)$

$m\ddot{x} = \cancel{G} - c(\cancel{f_{st}} + x) + F$

$m\ddot{x} + cx = F / : m$

$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} \cdot 1{,}8\sin(16t)$, $m = \frac{G}{g} \approx 0{,}25kg$

$\omega^2 = \frac{c}{m} = 400 s^{-1}$

$\ddot{x} + 400x = 7{,}2\sin(16t)$

$\left.\begin{matrix} \omega = 20 \\ \Omega = 16 \end{matrix}\right\}$ НЕМА РЕЗОНАНЦИЈЕ

$x_p = A\sin 16t + B\cos 16t$

$\dot{x}_p = 16A\cos 16t - 16B\sin 16t$

$\ddot{x}_p = -16^2 A\sin 16t - 16^2 B\cos 16t = -16^2 x_p$

$-16^2 x_p + 400x_p = 7{,}2\sin 16t$

$(-16^2 + 400)(A\sin 16t + B\cos 16t) = 7{,}2\sin 16t$

$B = 0$

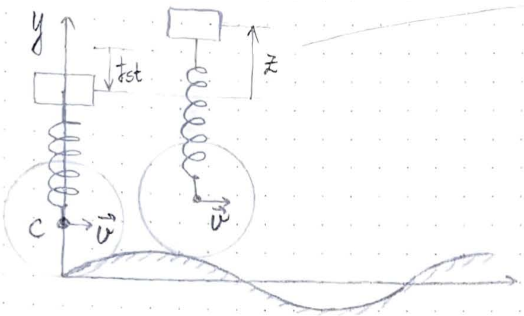
$A = \frac{7{,}2}{400 - 16^2} = 0{,}05$

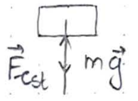
$\boxed{x_p = 0{,}05\sin 16t}$ [m]

* $x_p = 5\sin 16t$ [cm]

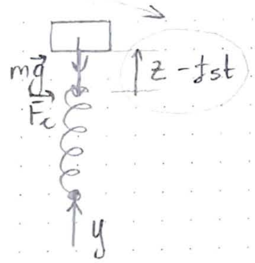
4.34. $v = 30\frac{m}{s}$, $G = 2kN$, $c = 40\frac{kN}{m}$, $y = a\sin\frac{\pi x}{l}$, $a = 1,5cm$; $l = 2,5m$

ДИМЕНЗИЈЕ ТОЧКА СЕ ЗАНЕМАРУЈУ





$mg - cf_{st} = 0$



$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_c} \,/\cdot \vec{k}$

$m\ddot{z} = -mg - F_c \qquad F_c = c(z - f_{st} - y)$

$m\ddot{z} = -\cancel{mg} - c(z - \cancel{f_{st}} - y)$

$m\ddot{z} + cz = cy$

$\ddot{z} + \omega^2 z = \omega^2 a \cdot \sin\frac{\pi x}{l} \qquad x = vt \qquad v\left[\frac{m}{s}\right], l[s]$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{40000}{\frac{2000}{9,81}} = 196,2s^{-2}$$

$\ddot{z} + 196,2[s^{-2}]z = 196,2[s^{-2}] \cdot 1,5[cm] \sin\frac{\pi \cdot 30t}{2,5}$

$\ddot{z} + 196,2z = 294,3 \sin 12\pi t \; [cm]$

$z_p = A\cos 12\pi t + B\sin 12\pi t \Rightarrow \dot{z}_p = -12A\pi \sin 12\pi t + 12\pi B \cos 12\pi t$

$\Rightarrow \ddot{z}_p = -144\pi^2 z_p$

$(-144\pi^2 + 196,2)(A\cos 12\pi t + B\sin 12\pi t) = 294,3 \sin 12\pi t$

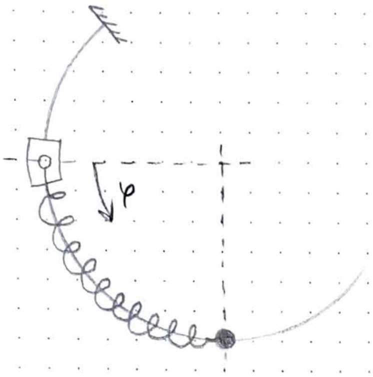
$A = 0$

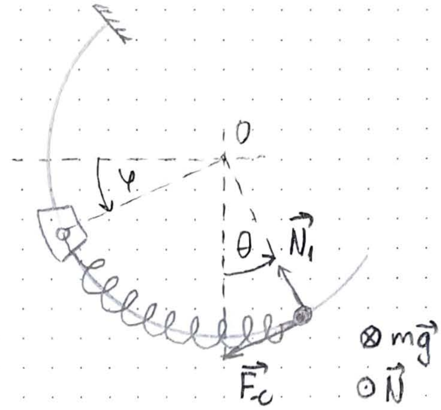
$(-144\pi^2 + 196,2)B = 294,3 \Rightarrow B = -0,24$

$z_p = -0,24 \sin 12\pi t \Rightarrow A = 0,24\ cm$

4.40. $m = 1kg$ ХОР. РАВАН! $c = 1\frac{N}{cm}$ $\varphi = \sin(10t)$ $t_0 = 0 \Rightarrow$ ОПРУГА НЕНАПРЕГНУТА
ТАЧКА МИРУЈЕ

$\theta(t)\ldots?$





$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N_1} + \vec{F_c} \; / \cdot \vec{t}$

$ma_t = -F_c$ $\qquad F_c = cR(\theta - \varphi)$, $a_t = R\ddot{\theta}$

$m\cancel{R}\ddot{\theta} = -c\cancel{R}(\theta - \varphi)$

$m\ddot{\theta} + c\theta = c\varphi \; / : m$

$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2 \sin(10t)$ $\qquad \omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{100}{1} = 100$

$\ddot{\theta} + 100\theta = 100\sin(10t)$ $\qquad \Omega = 10$ $\Big\}$ РЕЗОНАНЦИЈА!

$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i10$

$\theta_h = C_1\cos10t + C_2\sin10t$

$\theta_p = t(A\cos10t + B\sin10t) \Rightarrow \dot{\theta}_p = A\cos10t + B\sin10t + t(-10A\sin10t + 10B\cos10t)$

$\ddot{\theta}_p = -20A\sin10t + 20B\cos10t - 100X_p$

$-20A\sin10t + 20B\cos10t - \cancel{100X_p} + \cancel{100X_p} = 100\sin(10t)$

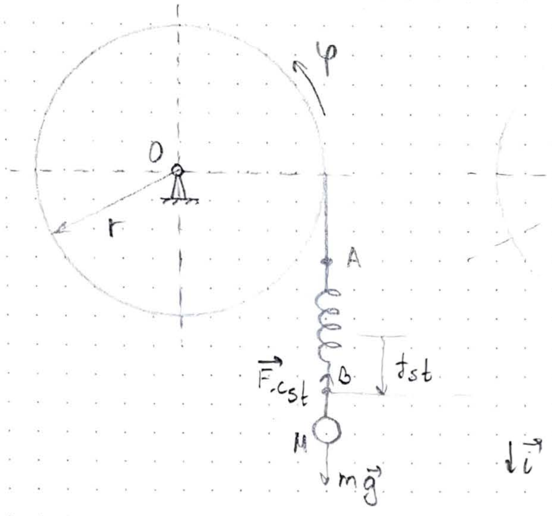
$\left.\begin{matrix} B = 0 \\ A = 5 \end{matrix}\right\} \theta_p = 5t\cos10t$

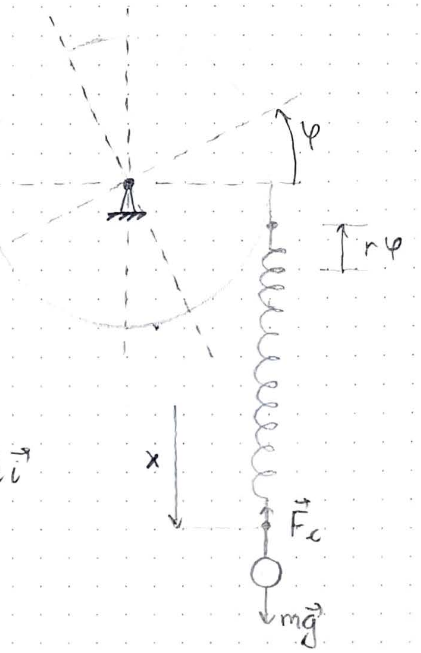
$\theta = C_1\cos10t + C_2\sin10t + 5t\cos10t$

$\dot{\theta} = -10C_1\sin10t + 10C_2\cos10t + 5\cos10t - 50t\sin10t$

$\left.\begin{matrix} 0 = C_1 \\ 0 = 10C_2 + 5 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \underline{\theta(t) = -\frac{1}{2}\sin10t + 5t\cos10t}$

4.33. r c $M:m$ $\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$ $x_p \ldots ?$ а) $\Omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$
б) $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$





$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{cst} \;/\cdot \vec{i}$$
$$0 = mg - F_{cst}$$
$$F_{cst} = c f_{st}$$
$$\boxed{0 = mg - c f_{st}}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c \;/\cdot \vec{i}$$
$$m\ddot{x} = mg - F_c$$
$$F_c = c\left(f_{st} + x + r\varphi\right)$$
$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - c\left(\cancel{f_{st}} + x + r\varphi\right)$$
$$m\ddot{x} + cx = -cr\varphi \;/: m$$
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = -\frac{cr}{m}\varphi_0 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t \,, \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \,, \quad h = -\frac{cr\varphi_0}{m}$$

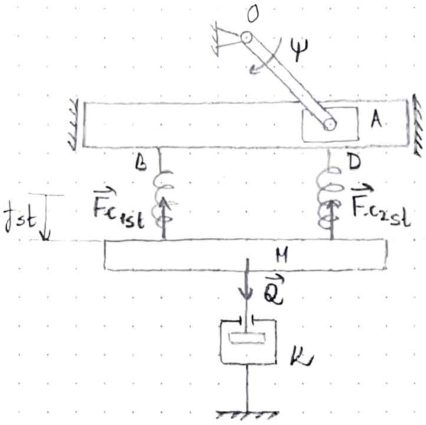
а) $\Omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}} \neq \omega$

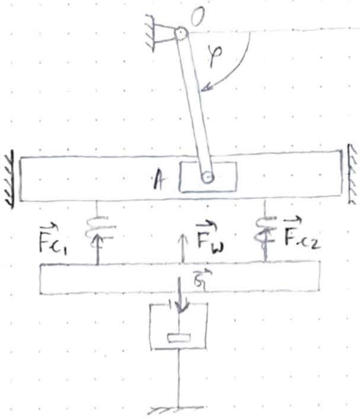
$$x_p = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \Rightarrow \dot{x}_p = A\Omega \cos \Omega t - B\Omega \sin \Omega t \Rightarrow \ddot{x}_p = -\Omega^2 A \sin \Omega t - \Omega^2 B \cos \Omega t$$
$$-\Omega^2 A \sin \Omega t - \Omega^2 B \cos \Omega t + \omega^2 A \sin \Omega t + \omega^2 B \cos \Omega t = h \sin \Omega t$$
$$\left.\begin{array}{ll} -\Omega^2 A + \omega^2 A = h & \Rightarrow A = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \\ -\Omega^2 B + \omega^2 B = 0 & \Rightarrow B = 0 \end{array}\right\} \; x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t$$

б) $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega \Rightarrow$ РЕЗОНАНЦИЈА

$$x_p = t\left(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t\right) \Rightarrow \dot{x}_p = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t + t\left(A\Omega \cos \Omega t - B\Omega \sin \Omega t\right)$$
$$\ddot{x}_p = 2A\Omega \cos \Omega t - 2B\Omega \sin \Omega t + t\left(-\Omega^2 A \sin \Omega t - \Omega^2 B \cos \Omega t\right)$$
$$2A\Omega \cos \Omega t - 2B\Omega \sin \Omega t + t\left(\cancel{-\Omega^2 A \sin \Omega t - \Omega^2 B \cos \Omega t}\right) + \omega^2 t\left(\cancel{A \sin \Omega t + B \cos \Omega t}\right) = h \sin \Omega t$$
$$\left.\begin{array}{ll} -2B\Omega = h & \Rightarrow B = -\frac{h}{2\Omega} \\ 2A\Omega = 0 & \Rightarrow A = 0 \end{array}\right\} \; x_p = -\frac{h}{2\Omega} t \cos \Omega t$$

4.44. Тежина тела M је $Q = 98N$, коефицијенти крутости опруга, закачених за кулису BD, су $c = 6{,}8 \frac{N}{cm}$. Пригушивач K даје силу отпора такву да је коефицијент пригушења једнак кружној фреквенцији слободних осцилација $(\delta = \omega)$. Одредити једначину принудних осцилација терета M ако је $\overline{OA} = 7{,}5\,cm$, а угаона брзина кривајe OA константна и износи $6\,s^{-1}$.





$\overline{OA}\sin\varphi$, $\psi = const. \Rightarrow \varphi = \psi t$

$c = 6{,}8 \frac{N}{cm} = 680 \frac{N}{m}$

$\psi = 6\,s^{-1}$

$\overline{OA} = 7{,}5\,cm = 0{,}075\,m$

$Q = 98N$

$$0 = \vec{Q} + \vec{F}_{c1st} + \vec{F}_{c2st} \ / \cdot \vec{i}$$

$$0 = Q - F_{c1st} - F_{c2st}$$

$$F_{c1st} = F_{c2st} = c f_{st}$$

$$0 = Q - c f_{st} - c f_{st}$$

$$* \ \boxed{0 = Q - 2c f_{st}}$$

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_{c_1} + \vec{F}_{c_2} + \vec{F}_w \ / \cdot \vec{i}$$

$$m\ddot{x} = Q - F_{c_1} - F_{c_2} - F_w$$

$$F_{c_1} = F_{c_2} = c(f_{st} + x - \overline{OA}\sin\psi t)$$

$$F_w = B\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = \cancel{Q} - 2c(\cancel{f_{st}} + x - \overline{OA}\sin\psi t) - B\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + B\dot{x} + 2cx = 2c\overline{OA}\sin\psi t \ / : m$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{B}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{2c}{m}}_{\omega^2} x = \underbrace{\frac{2c\overline{OA}}{m}}_{h}\sin\psi t$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = h\sin\psi t \qquad \omega^2 = \frac{2c}{m} = \frac{2cg}{G} = \frac{2 \cdot 680 \cdot 9{,}81}{98} = 136\,s^{-2}$$

$$2\delta = \frac{B}{m}, \quad \text{услов} \Rightarrow \delta = \omega = \sqrt{\frac{2c}{m}} = \sqrt{136} \Rightarrow 2\delta = 2\sqrt{136} \approx 23{,}3$$

$$h = \frac{2c\overline{OA}}{m} = \frac{2c\overline{OA}g}{G} = \frac{2 \cdot 680 \cdot 0{,}075 \cdot 9{,}81}{98} = 10{,}2$$

$$\ddot{x} + 23{,}3\dot{x} + 136x = 10{,}2\sin 6t$$

$$x_p = A\sin 6t + B\cos 6t \Rightarrow \dot{x}_p = 6A\cos 6t - 6B\sin 6t \Rightarrow \ddot{x}_p = -36A\sin 6t - 36B\cos 6t$$

$$-36A\sin 6t - 36B\cos 6t + 139{,}8A\cos 6t - 139{,}8B\sin 6t + 136A\sin 6t + 136B\cos 6t = 10{,}2\sin 6t$$

$$-36A - 139{,}8B + 136A = 10{,}2$$

$$-36B + 139{,}8A + 136B = 0 \Rightarrow B = -\frac{139{,}8}{100}A$$

$$-36A - 139{,}8 \cdot \left(-\frac{139{,}8}{100}A\right) + 136A = 10{,}2 \Rightarrow 295{,}4A = 10{,}2 \Rightarrow A = 0{,}034$$

$$B = -0{,}047$$

$$x_p = 0{,}034\sin 6t - 0{,}047\cos 6t \ [m]$$

$$x_p = 3{,}4\sin 6t - 4{,}7\cos 6t \ [cm]$$