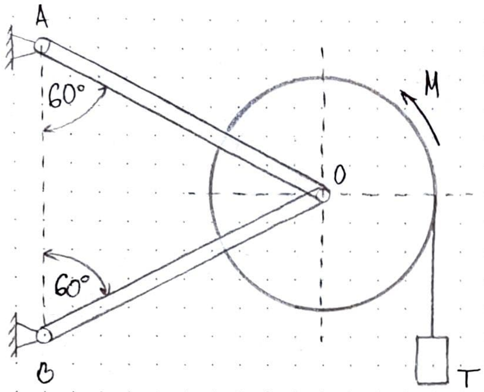
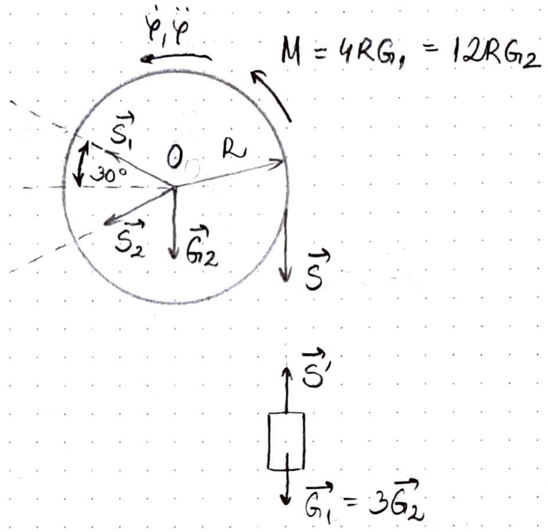
10.58. Два штапа AO и BO истих дужина и занемарљивих тежина везана су цилиндричним зглобовима A и B за вертикални зид под углом од 60°. У тачки O штапови су везани за осовину добоша (хомогеног диска) полупречника R и тежине G_2 на који делује спрег момента $M = 4RG_1$. На добош је једним крајем намотано неистегљиво уже, док је за други крај ужета везан терет тежине $G_1 = 3G_2$. Одредити силе у штаповима.





$$\circlearrowleft + \quad \frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{S} = M - SR = 12RG_2 - RS$$

$$L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}R^2\ddot{\varphi} = 12RG_2 - RS \quad (1)$$

$$\frac{G_2}{g}\vec{a_O} = \vec{G_2} + \vec{S_1} + \vec{S_2} + \vec{S} \quad /\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

$$x: \quad 0 = -S_1\cos 30° - S_2\cos 30° \Rightarrow S_1 = -S_2 \quad (2)$$

$$y: \quad 0 = S_1\sin 30° - S_2\sin 30° - G_2 - S \quad (3)$$

$$\frac{G_1}{g}\vec{a_T} = \vec{G_1} + \vec{S'} \;/\cdot\vec{j} \quad , \vec{S} = -\vec{S'} \;, \vec{G_1} = 3\vec{G_2}$$

$$y: \quad \frac{G_1}{g}\ddot{y}_T = -G_1 + S' \quad , S' = S \;, G_1 = 3G_2 \qquad * \; y_T = R\varphi \Rightarrow \ddot{y}_T = R\ddot{\varphi}$$

$$3\frac{G_2}{g}R\ddot{\varphi} = -3G_2 + S \quad (4)$$

$$(1)/:R \Rightarrow \frac{G_2}{g}R\ddot{\varphi} = 24G_2 - 2S \rightarrow (4)$$

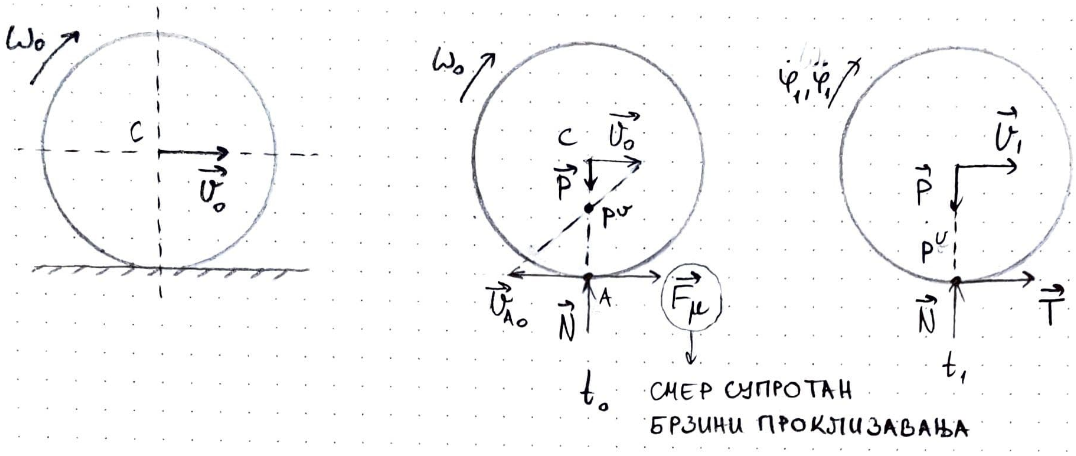
$$3(24G_2 - 2S) = -3G_2 + S$$

$$72G_2 - 6S = -3G_2 + S \Rightarrow 7S = 75G_2 \Rightarrow S = \frac{75}{7}G_2$$

$$(2)\rightarrow(3) \Rightarrow S_1 = G_2 + S = G_2 + \frac{75}{7}G_2$$

$$S_1 = -S_2 = \frac{82}{7}G_2$$

10.64. Центру C кружног хомогеног цилиндра полупречника R и тежине P који се налази на храпавој хоризонталној равни саопштена је почетна брзина v_0 паралелна равни. Истовремено, цилиндру је саопштена угаона брзина ω_0 са смером приказаним на слици. Ако је коефицијент трења клизања између цилиндра и равни μ, претпостављајући да је $R\omega_0 > v_0$, одредити тренутак t_1 када ће цилиндар почети да се котрља без клизања.



$v_1 = R\omega_1$

$\dot{x}_{c_1} = R\dot{\varphi}_1$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^{s} = -RF_\mu \quad , \; F_\mu = \mu N$$

$$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\ddot{\varphi} = -\mu R N \quad (1)$$

$$\frac{P}{g}\vec{a}_C = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_\mu \,/\, \vec{i} \,/\, \vec{j}$$

$$x: \; \frac{P}{g}\ddot{x}_c = F_\mu = \mu N \qquad \frac{\cancel{P}}{g}\ddot{x}_c = \mu \cancel{P} \Rightarrow \ddot{x}_c = \mu g \; (2)$$

$$y: \; 0 = N - P \Rightarrow N = P \rightarrow (1) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\cancel{P}}{g}R^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = -\mu \cancel{R}\cancel{P} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{2g\mu}{R} \; (3)$$

$$t_1 \Rightarrow \dot{x}_{c_1} = R\dot{\varphi}_1 \; (4)$$

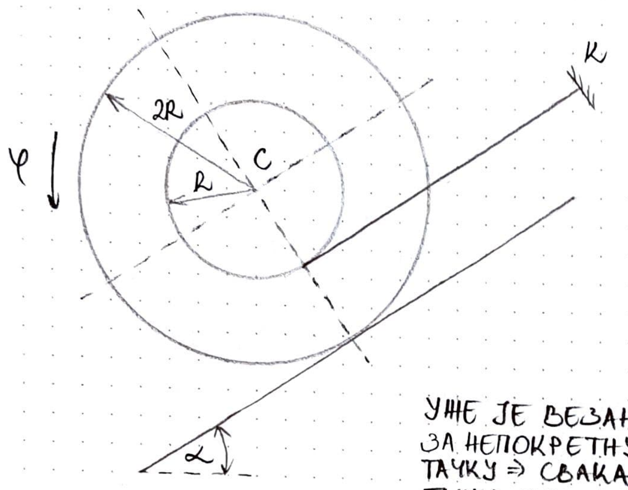
$$(2) \int_{v_0}^{\dot{x}_c} d\dot{x}_c = \mu g \int_0^t dt \Rightarrow \dot{x}_c = v_0 + \mu g t \quad (5)$$

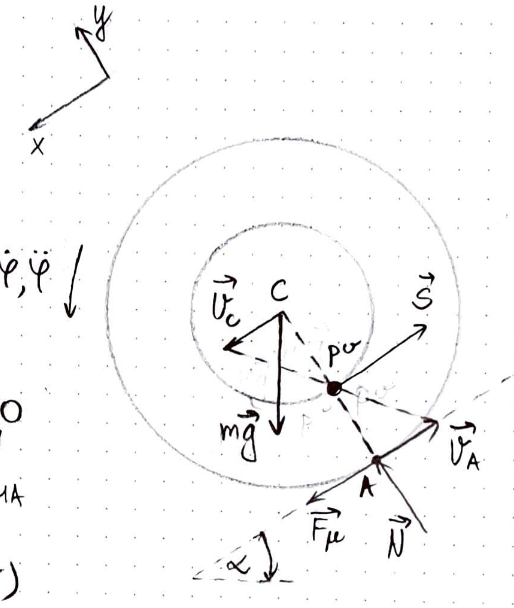
$$(3) \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = -\frac{2g\mu}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{2g\mu}{R}t \; (6)$$

$$(5),(6) \rightarrow t_1 \rightarrow (4) \Rightarrow \quad v_0 + \mu g t_1 = R\left(\omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t_1\right)$$

$$t_1 = \frac{R\omega_0 - v_0}{3\mu g}$$

10.61. Калем који се налази на стрмој равни нагиба α састављен је од цилиндара укупне масе m и пречника R и $2R$. На калем је намотано неистегљиво уже занемарљиве масе које је другим крајем везано за непокретну тачку K тако да је ненамотани део ужета паралелан стрмој равни. Коефицијент трења клизања између калема и стрме равни је μ, а полупречник инерције калема у односу на осу симетрије је $i_0 = R$. Ако калем почиње кретање из стања мировања, одредити силу у ненамотаном делу ужета.





УЖЕ ЈЕ ВЕЗАНО
ЗА НЕПОКРЕТНУ
ТАЧКУ ⇒ СВАКА
ТАЧКА УЖЕТА ИМА
БРЗИНУ = 0
(ЗАТО ЈЕ ТАЧКА
ДОДИРА ПОЛ P_v)

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^{S} = RS - 2RF_\mu$$

$$L_{Cz} = J_{Cz}\dot\varphi = m i_0^2 \dot\varphi = mR^2\dot\varphi$$

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = mR^2\ddot\varphi = RS - 2RF_\mu$$

$$\ddot\varphi = \frac{S}{mR} - 2\frac{F_\mu}{mR} \quad (1)$$

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{S} + \vec{N} + \vec{F}_\mu \;/\cdot\vec{i}\;/\cdot\vec{j}$$

$$x:\quad m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - S + F_\mu \quad (2)$$

$$y:\quad 0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_\mu = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

$$(1) \Rightarrow \ddot\varphi = \frac{S}{mR} - 2\frac{\mu g\cos\alpha}{R}$$

$$(2) \Rightarrow m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - S + \mu mg\cos\alpha$$

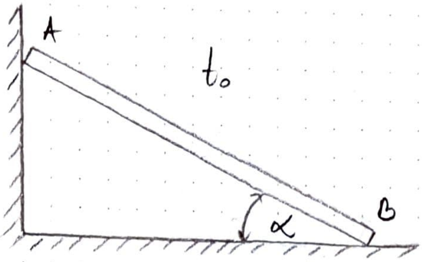
$$\dot{x}_C = \overline{CP_v}\,\dot\varphi = R\dot\varphi \Rightarrow \ddot{x}_C = R\ddot\varphi$$

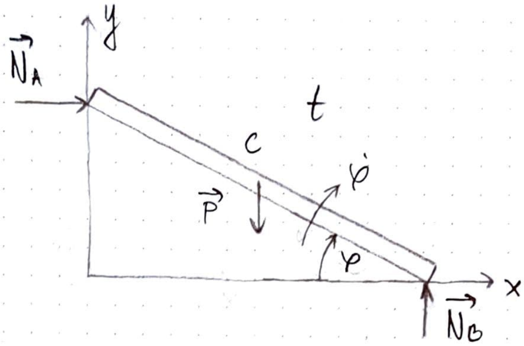
$$g\sin\alpha - \frac{S}{m} + \mu g\cos\alpha = \frac{S}{m} - 2\mu g\cos\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}m\left(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + 2\mu g\cos\alpha\right)$$

$$S = \frac{1}{2}mg\sin\alpha + \frac{3}{2}\mu mg\cos\alpha$$

10.33. Хомогени штап AB тежине P својим крајем A може да клизи по глаткој вертикалној равни. У почетном положају штап мирује, а његова оса гради са хоризонталом угао α. Одредити реакције равни у тачкама A и B у почетном тренутку.





$$\frac{P}{g}\vec{a}_C = \vec{P} + \vec{N}_A + \vec{N}_B \;/\cdot\vec{i}\,/\cdot\vec{j}$$

(1) $x:\quad \frac{P}{g}\ddot{x}_c = N_A \quad , \; x_c = \frac{l}{2}\cos\varphi \Rightarrow \dot{x}_c = -\frac{1}{2}l\dot{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \ddot{x}_c = -\frac{1}{2}l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$

(2) $y:\quad \frac{P}{g}\ddot{y}_c = N_B - P \quad , \; y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi \Rightarrow \dot{y}_c = \frac{1}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \ddot{y}_c = \frac{1}{2}l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$

$$\circlearrowleft +\quad \frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = M^S_{Cz} = N_A\frac{l}{2}\sin\varphi - N_B\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$\mathcal{L}_{Cz} = J_{Cz}\dot{\varphi} = \frac{1}{12}\frac{P}{g}\overline{AB}^2\dot{\varphi}\;, \quad \overline{AB} = l$$

(3) $$\frac{d\mathcal{L}_{Cz}}{dt} = \frac{1}{12}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi} = N_A\frac{l}{2}\sin\varphi - N_B\frac{l}{2}\cos\varphi$$

(1) $\Rightarrow \quad N_A = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$

(2) $\Rightarrow \quad N_B = P + \frac{1}{2}\frac{P}{g}l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$

(3) $\Rightarrow \quad \frac{1}{12}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{4}\frac{P}{g}l^2(\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + \cancel{\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi})$

$$+\frac{1}{2}Pl\cos\varphi - \frac{1}{4}\frac{P}{g}l^2(\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - \cancel{\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi})$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}Pl\cos\varphi$$

$$-\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}Pl\cos\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi \qquad \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\int_{\alpha}^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\dot{\varphi}^2 = 2\left(-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\alpha\right) = 3\frac{g}{l}(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

(1) $\Rightarrow \quad N_A = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}l\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi\sin\varphi + 3\frac{g}{l}(\sin\alpha - \sin\varphi)\cos\varphi\right]$

$$N_A(0) = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}l\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\alpha\sin\alpha + 3\frac{g}{l}\underbrace{(\sin\alpha - \sin\alpha)}_{0}\cos\alpha\right]$$

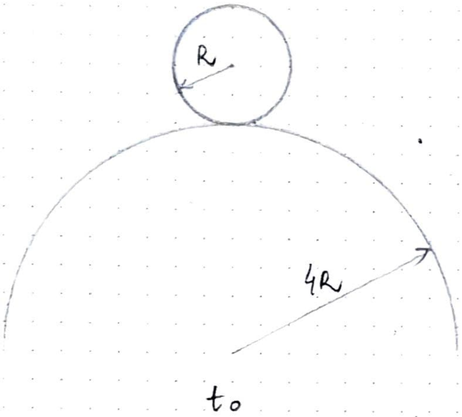
$$N_A(0) = \frac{3}{4}P\sin\alpha\cos\alpha$$

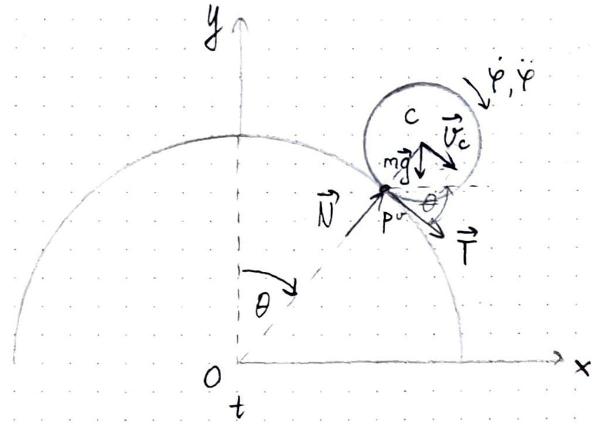
(2) $\Rightarrow \quad N_B = P + \frac{1}{2}\frac{P}{g}l\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos^2\varphi - 3\frac{g}{l}(\sin\alpha - \sin\varphi)\sin\varphi\right]$

$$N_B(0) = P + \frac{1}{2}\frac{P}{g}l\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos^2\alpha - 3\frac{g}{l}\underbrace{(\sin\alpha - \sin\alpha)}_{0}\sin\alpha\right]$$

$$N_B(0) = P - \frac{3}{4}P\cos^2\alpha$$

10.48. Хомогени танки цилиндар масе m и полупречника R може да се котрља без клизања по непомичном полуцилиндру полупречника $R_1 = 4R$. У почетном тренутку цилиндар је био у највишем положају у стању мировања. Одреди положај у коме ће се цилиндар одвојити од полуцилиндра ако је из почетног положаја кренуо занемарљивом брзином.





$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \;/\cdot\vec{t}\;/\cdot\vec{n}$$

$t:\quad ma_{ct} = mg\sin\theta + T$

$n:\quad ma_{cn} = mg\cos\theta - N$

$$v_c = \overline{CP^v}\,\dot\varphi = R\dot\varphi$$
$$= \overline{CO}\,\dot\theta = (4R+R)\dot\theta = 5R\dot\theta$$
$$R\dot\varphi = 5R\dot\theta \;/:R\;, \quad \dot\varphi = 5\dot\theta \quad (1)$$

$$a_{ct} = \ddot{s}\;, \quad s = (4R+R)\theta = 5R\theta \Rightarrow \ddot{s} = 5R\ddot\theta \Rightarrow a_{ct} = 5R\ddot\theta$$

$$a_{cn} = \frac{\dot{s}^2}{(4R+R)} = \frac{\dot{s}^2}{5R}\;, \quad \dot{s} = 5R\dot\theta \Rightarrow a_{cn} = \frac{25R^2\dot\theta^2}{5R} = 5R\dot\theta^2$$

$$5mR\ddot\theta = mg\sin\theta + T \quad (2)$$

$$5mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta - N \quad (3)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = M^s_{cz} = -TR$$

$$\mathcal{L}_{cz} = J_{cz}\dot\varphi = mR^2\dot\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\mathcal{L}_{cz}}{dt} = mR^2\ddot\varphi = -TR \Rightarrow \ddot\varphi = -\dfrac{T}{mR} \\ (1) \Rightarrow \ddot\varphi = 5\ddot\theta \end{array}\right\} \quad \ddot\theta = -\frac{T}{5mR} \quad (4) \Rightarrow T = -5mR\ddot\theta$$

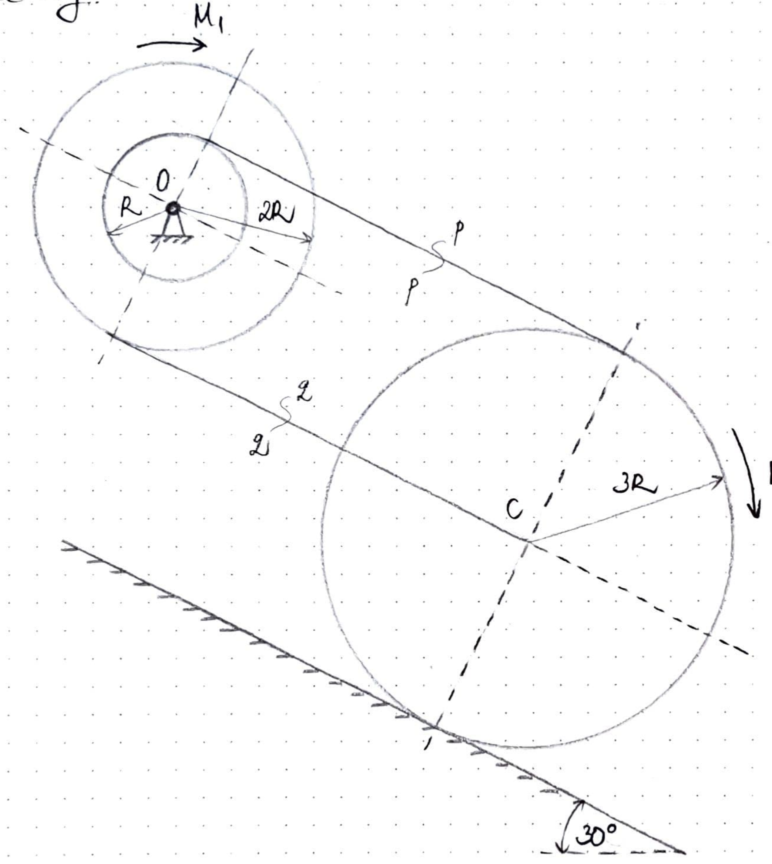
$$(4) \to (2) \Rightarrow 5mR\ddot\theta = mg\sin\theta - 5mR\ddot\theta$$
$$10mR\ddot\theta = mg\sin\theta$$
$$\ddot\theta = \frac{1}{10}\frac{g}{R}\sin\theta\;, \quad \ddot\theta = \frac{d\dot\theta}{dt}\cdot\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\dot\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot\theta\, d\dot\theta}{d\theta}$$

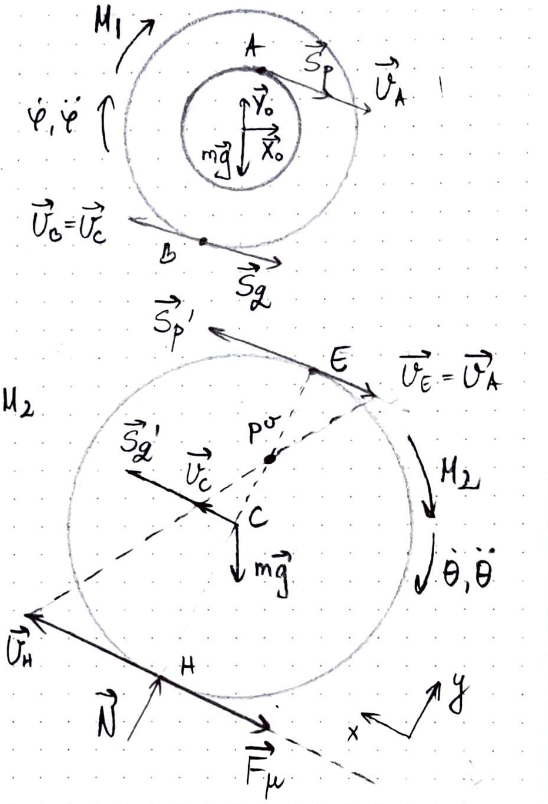
$$\int_0^{\dot\theta}\dot\theta\, d\dot\theta = \frac{1}{10}\frac{g}{R}\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{1}{5}\frac{g}{R}(1-\cos\theta) \quad (5)$$

$$(5) \to (3) \Rightarrow N = mg\cos\theta - 5mR\frac{1}{5}\frac{g}{R}(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1)$$

$$N_1 = 0 \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = 60^\circ$$

10.72. Тело 1 састављено од круто везаних коаксијалних цилиндара R и $2R$ и масе m и полупречника инерције $i_0=\sqrt{2}R$ за централну осу, може да се обрће око непокретне хоризонталне осе O. Хомогени ваљак 2 полупречника $3R$ и масе m повезан је неистегљивим ужадима са телом 1 и, као што је приказано на слици, може да се креће уз стрму раван нагиба $\alpha_1 = 30°$. Коефицијент трења између ваљка и стрме равни је $\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Одредити константне моменте M_1 и M_2 спрегова који делују на тела 1 и 2, тако да силе у пресецима ужади S_p и S_q буду једнаке и износе mg.





$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz} = RS_p - 2RS_q + M_1$$
$$L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\varphi} = m i_0^2\dot{\varphi} = 2mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{dL_{Oz}}{dt} = 2mR^2\ddot{\varphi}$$
$$2mR^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = \cancel{R}S_p - 2\cancel{R}S_q + M_1 \;/ : R$$
$$2mR\ddot{\varphi} = S_p - 2S_q + \frac{M_1}{R} \quad (1)$$

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{S}_q{}' + \vec{S}_p{}' \;/\; \vec{i} \;/\; \vec{j}$$
$$x: \quad m\ddot{x}_c = -mg\sin 30° - F_\mu + S_q' + S_p' \quad , \; S_q' = S_q, \; S_p' = S_p$$
$$y: \quad 0 = -mg\cos 30° + N \Rightarrow N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \Rightarrow F_\mu = \mu N = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3}\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}mg = \frac{1}{2}mg$$
$$m\ddot{x}_c = -\frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}mg + S_q + S_p \Rightarrow m\ddot{x}_c = -mg + S_q + S_p \quad (2)$$

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = M_{Cz} = -3RS_p - 3RF_\mu + M_2 = -3RS_p - \frac{3}{2}mgR + M_2$$
$$L_{Cz} = J_{Cz}\dot{\theta} = \frac{1}{2}m(3R)^2\dot{\theta} = \frac{9}{2}mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL_{Cz}}{dt} = \frac{9}{2}mR^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{9}{2}mR^2\ddot{\theta} = -3RS_p - \frac{3}{2}mgR + M_2$$
$$\frac{9}{2}mR\ddot{\theta} = -3S_p - \frac{3}{2}mg + \frac{M_2}{R} \quad (3)$$

$$v_A = R\dot{\varphi} = v_E = \overline{EP^v}\dot{\theta}$$
$$v_B = 2R\dot{\varphi} = v_C = \overline{CP^v}\dot{\theta}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{EP^v}}{\overline{CP^v}} \Rightarrow \overline{CP^v} = 2\overline{EP^v}$$
$$\overline{CP^v} + \overline{EP^v} = 3R$$
$$\overline{EP^v} = R, \quad \overline{CP^v} = 2R$$

$$R\dot{\varphi} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{\theta} \quad (6)$$
$$v_c = \dot{x}_c = 2R\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_c = 2R\ddot{\varphi} \quad (7)$$ (ТАЧКА C ⇒ ПРАВОЛИНИЈСКО КР.)

(1) $2mR\ddot{\varphi} = S_p - 2S_Q + \frac{M_1}{R}$

(7) → (2) $2mR\ddot{\varphi} = -mg + S_Q + S_p$

(6) → (3) $\frac{9}{2}mR\ddot{\varphi} = -3S_p - \frac{3}{2}mg + \frac{M_2}{R}$

$S_p = S_Q = mg$ ⇒ УСЛОВ ЗАДАТКА

$$2mR\ddot{\varphi} = -mg + \frac{M_1}{R}$$

$$2\cancel{m}R\ddot{\varphi} = \cancel{m}g \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{g}{R}$$

$$\frac{9}{2}mR\ddot{\varphi} = -\frac{9}{2}mg + \frac{M_2}{R}$$

$M_1 = 2mgR$

$M_2 = \frac{27}{4}mgR$