Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

17.06.2014. godine
grupa: A

Rešenja zadataka iz Matematike 1 - jun 2014

Moguće su greške u rešavanju i pisanju samih rešenja zadataka. Na osnovu ovih rešenja je prof. dr *Slobodan Radojević* pregledao zadatke sa pismenog ispita, te ona važe samo za studente koji su kod njega i slušali nastavu.

1. Rešiti i diskutovati sistem jednačina u zavisnosti od realnog parametra a:

$$\Sigma \quad : \quad \begin{array}{rcrcrl} ax & + & y & + & z & = a \\ x & + & (2a-1)\,y & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & (3a-2)\,z & = 1 \end{array}$$

Rešenje

Koristićemo teoremu Kramera. Nađimo determinantu sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 2a-2 & 0 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix}$$

Iskorišćene su dve osobine determinanti. Prva je, da se vrednost determinante ne menja ako se nekoj vrsti (koloni) doda neka druga vrsta (kolona) pomnožena sa nekoom konstantom. Druga je, da se determinatna množi konstantom tako što joj se samo jedna vrsta (kolona) pomnoži tom konstantom. Slično, kao u prethodnom:

$$\begin{aligned} D &= (1-a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} \\ &= (1-a) \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 3-3a \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} \\ &= -(a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} \\ &= (a-1)^2\,(6a+5) \end{aligned}$$

Za $D = 0$ dobijamo vrednosti za $a \in \mathbb{R}$ koje su potencijalni kandidati za diskusiju. Kako se determinante koje odgovaraju promenljivama dobijaju od D zamenom odgovarajuće kolone sa kolonom slobodnih članova, jednostavno se vidi da je $D = D_x$. Iskorišćavanjem osobine determinanti, determinanta jednaka nuli ako su joj dve vrste (kolone) jednake, tada je:

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} = D, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3a-2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rešenja sistema Σ su:

a) Ako je $a \neq 1$ i $a \neq -\dfrac{5}{6}$ tada je:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{D}{D} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{D} = 0, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{D} = 0$$

Sistem je saglasan i ima jedinstveno rešenje:

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ (1,0,0) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 1, -\frac{5}{6} \right\} \right\}$$

b) Ako je $a = 1$ sistem se svodi na jednu jednačinu:

$$\Sigma \quad : \quad x \; + \; y \; + \; z \; = 1$$

Uz pretpostaku da je $y = \alpha$ i $z = \beta$ gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sistema je saglasan sa više rešenja:

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ (1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Ako je $a = -\dfrac{5}{6}$ sistem se svodi na:

$$\Sigma \quad : \quad \begin{array}{rcrcrcr} -\frac{5}{6}x & + & y & + & z & = & -\frac{5}{6} \\ x & - & \frac{16}{6}y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & \frac{27}{6}z & = & 1 \end{array}$$

odnosno na:

$$\Sigma_1 \quad : \quad \begin{array}{rcrcrcrl} -5x & + & 6y & + & 6z & = & -5 & + \\ 3x & - & 8y & + & \boxed{3z} & = & 3 & -2 \quad 3 \\ 2x & + & 2y & - & 9z & = & 2 & + \end{array}$$

Posle prvog koraka Gausovog postupka dobijamo novi sistem:

$$\Sigma_2 \quad : \quad \begin{array}{rcrcr} -11x & + & 22y & = & -11 \\ 11x & - & 22y & = & 11 \end{array}$$

odnosno jednačinu:

$$\Sigma_2 \quad : \quad x - 2y = 1$$

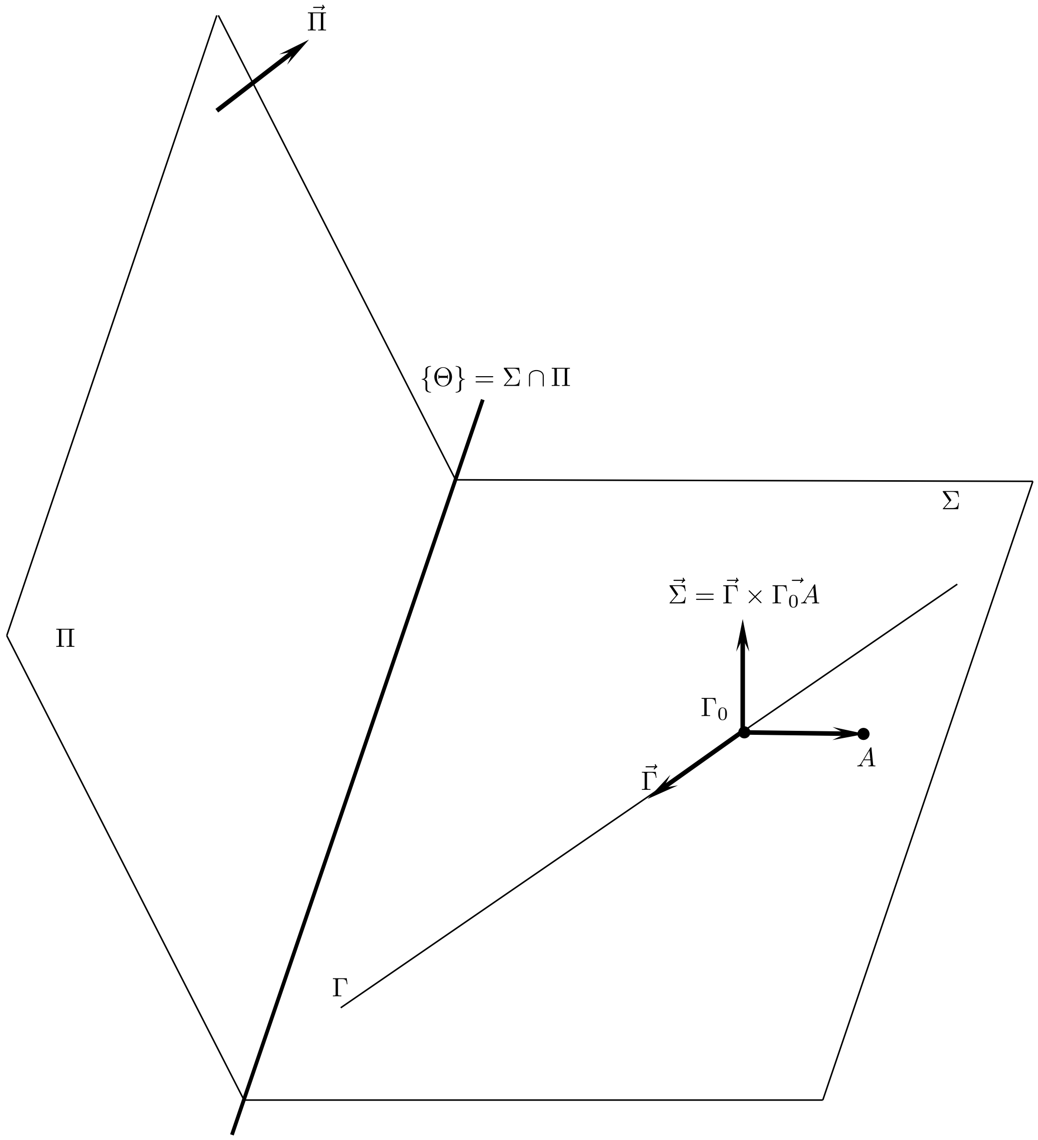
Ako je $y = \alpha \in \mathbb{R}$, sledi $x = 1 + 2\alpha$, odnosno $z = \dfrac{2}{3}\alpha$. Sistem je saglasan i ima više rešenja:

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(1 + 2\alpha, \alpha, \frac{2}{3}\alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Naći pravu Θ koja je presek ravni $\Pi : x + y = 2$ i ravni Σ određenoj sa tačkom $A(1, 2, -1)$ i pravom:

$$\Gamma : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Rešenje



Prava Γ određena tačkom $\Gamma_0(2, -1, 0)$ i vektorom $\vec{\Gamma} = (2, -1, 1)$. Vektor ravni Σ normalan je na vektor $\vec{\Gamma}$, jer prava pripada ravni Σ, i normalan je na bilo koji vektor koji se nalazi u samoj ravni. Tačke A i Γ_0 pripadaju ravni Σ, sledi da je vektor ravni Σ normalan na vektor

$\overrightarrow{\Gamma_0 A} = (1, -3, 1)$. Iz prethodnog sledi:

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma_0 A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -5)$$

Kako je $\Sigma = \langle A, \vec{\Sigma} \rangle$ tražena jednačina ravni je jednaka:

$$\Sigma \ : 2(x-1) - (y-2) - 5(z+1) = 0 \Rightarrow 2x - y - 5z - 5 = 0$$

Prava Θ dobija se kao presek ravni Σ i ravni Π. Odnosno $\{\Theta\} = \Sigma \cap \Pi$.

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & \boxed{-y} & - & 5z & = 5 \\ x & + & y & & & = 2 \end{array} \; +$$

Dobija se jednačina $3x - 5z = 7$ koja za $x = t$ daje $z = -\frac{7}{5} + \frac{3}{5}t$. Kako je:

$$y = 2x - 5z - 5 = 2t + 7 - 3t - 5 = 2 - t$$

možemo napisati parametarski oblik jednačine prave, ali i kanonski:

$$\Theta \ : \begin{array}{ccccc} x & = & & & t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & -\frac{7}{5} & + & \frac{3}{5}t \end{array} \Rightarrow \Theta \ : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z + \frac{7}{5}}{\frac{3}{5}}$$

3. Ispitati tok funkcije $f(x) = \ln\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)$ i skicirati njen grafik.

Rešenje

1.

Posmatrajmo nejednačinu $x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4} > 0$ gde je $|\ x\ | \geq 2$. Za $x \geq 2$ je $x^2 - 2 > 0$, a i koren je pozitivan, sledi da je nejednačina tačna. Ako je $x \leq 2$ tada je $x^2 - 2 > 0$ dok je drugi deo nejednačine, $x\sqrt{x^2-4}$, negativan. Proverimo da li je i tada:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4} > 0 \ &\Rightarrow \ x^2 - 2 > -x\sqrt{x^2-4} \\ &\Rightarrow \ \left(x^2-2\right)^2 > \left(-x\sqrt{x^2-4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \ x^4 - 4x^2 + 4 > x^2\left(x^2-4\right) \\ &\Rightarrow \ x^4 - 4x^2 + 4 > x^4 - 4x^2 \\ &\Rightarrow \ 4 > 0 \\ &\Rightarrow \ \top \end{aligned}$$

Sledi da je $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

2.

Kako je $f(-x) = x^2 - 2 - x\sqrt{x^2-4} \neq \pm f(x)$ funkcija nije ni parna ni neparna. Nađimo nule funkcije:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4} = 1 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 3 = -x\sqrt{x^2-4} \wedge x \leq -2 \\
&\Rightarrow \quad \left(x^2-3\right)^2 = \left(-x\sqrt{x^2-4}\right)^2 \wedge x \leq -2 \\
&\Rightarrow \quad x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 4x^2 \wedge x \leq -2 \\
&\Rightarrow \quad 2x^2 - 9 = 0 \wedge x \leq -2 \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \approx -2.12
\end{aligned}
$$

Funkcija ne seče y osu zbog prirode D_f.

3.

Potrebno je ispitati ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti. Funkcija nema vertikalne asimptote, ali zbog crtanja grafika pogodno je izračunati $f(2) = \ln 2 \approx 0.69$, i $f(-2) = \ln 2 \approx 0.69$. Ponašanje funkcije u na krajevima oblasti definisanosti podrazumeva nalaženje sledećih graničnih vrednosti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)\right)$$

Ovo je moguće uraditi jer je elementarna funkcija $\ln x$ neprekidna. Izraz pod graničnom vrednošću je ekvikonvergentan, ponaša se isto kao, x^2 za $x \geq 2$. Tada je:

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty} x^2\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Nešto složenija je druga granična vrednost:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)\right)$$

Za $x \leq -2$ izraz pod graničnom vrednošću je ekvikonvergentan $x^2 + x \mid x \mid$. Tada je:

$$\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + x \mid x \mid\right)\right) = \ln 0 = -\infty$$

4.

U nalaženju izvoda, potrebno je primeniti više puta, pravilo o nalaženju složenog izvoda:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}} \cdot \left(x^2 - 2 + x\sqrt{x^2-4}\right)'
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}\left(2x+\sqrt{x^2-4}+x\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}2x\right)\\
&= \frac{1}{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}\left(2x+\sqrt{x^2-4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right)\\
&= \frac{1}{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}\frac{2x\sqrt{x^2-4}+x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}}\\
&= 2\cdot\frac{1}{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}\frac{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}
\end{aligned}$$

Sledi da je za sve vrednosti iz D_f prvi izvod $f'(x) \neq 0$ i da je $f'(x) > 0$. Posledica je da funkcija nema ekstrema i rastuća je. Problem diferencijabilnosti se ne pojavljuje.

5.

$$f''(x) = 2\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}2x = \frac{-2x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$$

Funkcija je konveksna za $x \leq -2$, dok je konkavna za $x \geq 2$.

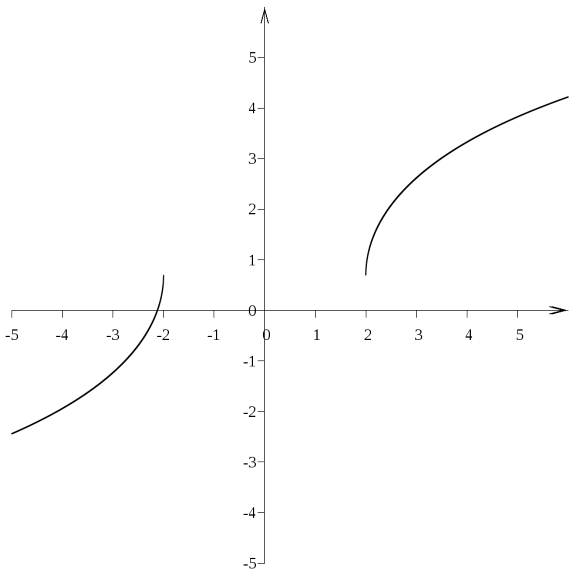
6.

Kosih asimptota nema jer:

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2-4}} = 0$$

7.

Grafik funkcije je dat sledećim crtežom.



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \ln\left(x^2-2+x\sqrt{x^2-4}\right)$.

4. Razviti funkciju $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ u Maklorenov red stepena 4 i pomoću njega približno izračunati $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$.

Rešenje

Dovoljno je razviti funkciju $g(x) = \operatorname{arctg} x$ u Maklorenov polinom 3 stepena. Tada je:

$$g(x) \approx g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3$$

Kako je:

$$\begin{aligned}
g(0) &= 0 \\
g'(0) &= \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow g'(0) = 1 \\
g''(0) &= \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x \Rightarrow g''(0) = 0 \\
g'''(0) &= \frac{2}{(1+x^2)^3} \cdot (2x)^2 + \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2 \Rightarrow g'''(0) = -2
\end{aligned}$$

razvitak funkcije $g(x)$ jednak je:

$$g(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{-2}{6}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3$$

Funkcija $f(x)$ u razvijenom obliku jednaka je:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

Iz $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ sledi:

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\frac{75-1}{75} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{74}{375}$$