1. колоквијум из Математике 2 (смене 3 и 4) 8.4.2015.

Група 1 - решења

1. Применом дефиниције одређеног интеграла израчунати

$$\int_0^2 x^3 dx.$$

Решење. Поделимо сегмент $[0,2]$ на n једнаких делова помоћу тачака $x_i = 0 + ih = ih$, $0 \le i \le n$, где је $h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. За истакнуте тачке изаберимо десне крајеве тако добијених делова, тј. $\xi_i = ih = i \cdot \frac{2}{n}$, $1 \le i \le n$. Тада интегралне суме имају облик

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h = \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^4 \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{2}{n}\right)^4 \left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right),$$

а дати интеграл је једнак

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{n}\right)^4 \left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right)\right] = 2^4 \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} = 2^4 \cdot \frac{1}{4} = 4.$$

2. Одредити

$$\int \frac{x^4+1}{x^4 - x^3 + x^2 - x} dx.$$

Решење. Нека је

$$I = \int \frac{x^4+1}{x^4 - x^3 + x^2 - x} dx.$$

Како је степен полинома у бројиоцу (већи или) једнак степену полинома у growthимениоцу, прво треба поделити полином у бројиоцу полиномом у имениоцу:

$$(x^4+1) : (x^4 - x^3 + x^2 - x) = 1 + \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x},$$

па је

$$I = \int \left(1 + \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x}\right) dx.$$

Разломак у овако добијеном подинтегралном изразу представља праву рационалну функцију и важи

$$\frac{x^3-x^2+x+1}{x^4-x^3+x^2-x}=\frac{x^3-x^2+x+1}{x(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Множењем претходног израза са $x(x-1)(x^2+1)$ добијамо

$$\begin{aligned} x^3-x^2+x+1 &= A(x-1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-1) \\ &= (A+B+C)x^3+(-A-C+D)x^2 \\ &\quad +(A+B-D)x-A. \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене добијамо систем

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ -A-C+D &= -1 \\ A+B-D &= 1 \\ -A &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=-1,$$

па је

$$\begin{aligned} I &= \int\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= x-\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+c \\ &= x+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\sqrt{x^2+1}\right)-\arctan x+c. \end{aligned}$$

3. Одредити

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Решење. Нека је

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Како је у изразу под кореном коефицијент уз x^2 већи од 0 ($a=1$), можемо користити Ојлерову смену

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x.$$

Након квадрирања претходног израза добијамо

$$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2,$$

одакле следи

$$x+1=t^2-2tx,$$

односно

$$x(1+2t)=t^2-1,$$

па је

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1}.$$

Ако диференцирамо овај израз имамо

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt=\frac{4t^2+2t-2t^2+2}{(2t+1)^2}dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt.$$

Приметимо још да из Ојлерове смене имамо

$$x+\sqrt{x^2+x+1}=t.$$

Кад заменимо добијено у дати интеграл биће

$$I=\int\frac{\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt}{t}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}dt,$$

чиме смо добили интеграл праве рационалне функције. Даље важи

$$\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}.$$

Множењем претходног израза са $t(2t+1)^2$ добијамо

$$
\begin{aligned}
t^2+t+1 &= A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct \\
&= A(4t^2+4t+1)+B(2t^2+t)+Ct \\
&= (4A+2B)t^2+(4A+B+C)t+A.
\end{aligned}
$$

Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене добијамо систем

$$
\begin{aligned}
4A+2B &= 1 \\
4A+B+C &= 1 \\
A &= 1,
\end{aligned}
$$

чије је решење

$$A=1, \quad B=-\frac{3}{2}, \quad C=-\frac{3}{2},$$

па је

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt = \left\{\begin{array}{c} \text{смена } 2t+1=s \\ 2dt=ds \end{array}\right\} \\
&= 2\left(\ln|t|-\frac{3}{2}\int\frac{\frac{1}{2}ds}{s}-\frac{3}{2}\int\frac{\frac{1}{2}ds}{s^2}\right)=2\left(\ln|t|-\frac{3}{4}\ln|s|+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s}\right)+c \\
&= 2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}+c \\
&= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+1\right| \\
&\quad +\frac{3}{2}\frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+1}+c.
\end{aligned}
$$

4. Наћи одговарајућу рекурентну формулу, а затим израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{20}x\,dx.$$

Решење. Прво тражимо одговарајућу рекурентну формулу. Имамо

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} u = \cos^{n-1} x,\ dv = \cos x dx \\ du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)dx,\ v = \sin x \end{array} \right\} \\
&= \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx\right) \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n),
\end{aligned}
$$

одакле следи

$$
I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
$$

Ако наставимо да примењујемо овако добијену рекурентну формулу имамо

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \cdots \\
&= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1, & n \text{ непарно} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{3} I_2, & n \text{ парно.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Израчунајмо интеграле

$$
I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1
$$

и

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \sin\pi - \sin 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Одавде је

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ непарно} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ парно} \end{cases} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ непарно} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ парно.} \end{cases}$$

На основу добијеног је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{20} x dx = \frac{(20-1)!!}{20!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(19)!!}{20!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

1. колоквијум из Математике 2 (смене 3 и 4) 8.4.2015.

Група 2 - решења

1. Применом дефиниције одређеног интеграла израчунати

$$\int_0^3 x^2 dx.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 1. задатку групе 1. На крају се добија

$$\int_0^3 x^2 dx = 9.$$

2. Одредити

$$\int \frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x} dx.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1. На крају се добија

$$\int \frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x} dx = x - \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan x + c.$$

3. Одредити

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1. На крају се добија

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}} &= 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right| \\ &\quad -\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\right| \\ &\quad -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}-x-1}+c.\end{aligned}$$

4. Наћи одговарајућу рекурентну формулу, а затим израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{20} x dx.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 4. задатку групе 1. Одговарајућа рекурентна формула гласи

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ непарно} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ парно,} \end{cases}$$

а дати интеграл је једнак

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{20} x dx = \frac{(19)!!}{20!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$