Von Mizesovi naponi u analizi naponskog stanja

Za određivanje veličina napona i deformacija u čvorovima modela potrebno je rešiti jednačine statičke ravnoteže, koje uspostavljaju veze između napona i spoljašnjih zapremiskih sila u određenoj tački modela (x, y, z), a pisane u matričnom obliku su:

$$B^{T}\ \sigma + F = 0, \tag{5.25}$$

gde je B^{T} - transponovana matrica diferencijalnih operatora,

a parcijalnim diferenciranjem vektora napona σ dobija se sistem jednačina koje treba rešiti:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_F = 0, \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y_F = 0 \text{ i} \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z_F = 0. \tag{5.28}$$

gde su X_F, Y_F i Z_F komponente spoljašnjih zapreminskih sila. Zbog simetričnosti tenzora napona važi: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, (i,j = x, y, z).

Ova faza rešavanja jednačina statičke ravnoteže zahteva dosta vremena, zavisno od broja i oblika konačnih elemenata ali i složenosti opterećenja. Sa razvojem savremenih računara i metoda faza procesiranja se ipak može obaviti relativno brzo tako da se može doći do rezultata u razumnom vremenskom periodu. **Izračunavanje vrednosti napona i deformacija MKE u programskom paketu CATIA, kao i u najvećem broju sličnih alata za numeričko izračunavanje zasniva se na specifičnom deformacionom radu po jedinici zapremine, odnosno hipotezi Hubera (Huber) i Mizesa (Mises)** o slomu materijala o čemu će ovde ukratko biti reči.

Posmatrajući mehanički model (npr. čauru ležaja) kao relativno prostu deformabilnu konstrukciju, ona će se deformisati pošto je izložena dejstvu sistema spoljašnjih sila. Napadne tačke sila će se tako pomerati a spoljašnje sile će na tim pomeranjima izvršiti određen rad. To će u sistemu izazvati promenu energije. Ukoliko se zanemari ubrzanje tačaka pri deformaciji, samim tim može se reći da nema promene kinetičke energije sistema. Ako nema nekih dodatnih poremećaja može se reći da je **ukupna promena unutrašnje energije jednaka promeni njene potencijalne energije**. Uz pretpostavku da je čaura ležaja izrađena od idealno elastičnog materijala može se reći da je u pitanju **energija elastične deformacije koja se često naziva i deformacioni rad**. Ako se u proizvoljnom položaju napadna tačka sile pomeri za $d\delta$, sila će na tom pomeranju izvršiti rad $dA_d \approx F(\delta)\,d\delta$, a ukupni rad spoljašnje sile biće:

$$A_d = \int_0^{\delta} F(\delta)\,d\delta\,. \tag{5.29}$$

Ovaj izraz je najjednostavnije izračunati ako uzmemo da se **materijal od koga je izrađen deo ponaša po Hukovom zakonu, po kom je sila linearna funkcija pomeranja**. To znači da bi izraz mogao da se koristi samo u oblasti elastičnih deformacija dela koji se posmatra. Tada je rad:

$$A_d = \frac{F \cdot \delta}{2}. \tag{5.30}$$

Deformacioni rad se može izraziti i preko veličina napona koji se javljaju usled delovanja opterećenja. Tako za jedan složeno napregnut zapreminski element $dV = dx\,dy\,dz$ opšti izraz za deformacioni rad ima oblik:

$$dA_d = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) dV. \tag{5.31}$$

U praksi se veoma često razmatra **deformacioni rad po jedinici zapremine, ili specifičan deformacioni rad** koji je jednak:

$$A_d' = \frac{dA_d}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right). \tag{5.32}$$

Ukoliko se odrede **glavni pravci napona**, dobija se nešto jednostavniji oblik, jer nemamo napone smicanja:

$$A_d' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3\right) = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu_p\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \tag{5.33}$$

Pretpostavimo da se ukupan specifični deformacioni rad sastoji od dva dela, jednog koji vrši promenu zapremine i drugog koji vrši promenu oblika. **Specifični deformacioni rad promene zapremine** može da se definiše kao:

$$A_d'^{V} = \frac{1-2\nu_p}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{E}{6(1-2\nu_p)}\left(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3\right)^2, \tag{5.34}$$

dok se **rad promene oblika može dobiti kao razlika ukupnog i specifičnog deformacionog rada promene zapremine.**

U literaturi ne postoji jedna univerzalna teorija koju je moguće primeniti u svim slučajevima procene čvrstoće, krutosti ili stabilnosti određenog dela konstrukcije pri poznatom stanju napona i deformacija. Pošto ih ima više i svaka od njih daje manje ili više zadovoljavajuće rezultate za različite materijale prikladnije ih je nazivati hipotezama o slomu materijala. U većini alata za sprovođenje analize napona i deformacija numeričkim putem **u primeni je hipoteza najvećeg specifičnog deformacionog rada, koja je bolje od ostalih pokazala slaganje sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja kada se radi o materijalima kakvi su recimo čelik, čelični liv, ali i obojeni metali, aluminijum, bakar bronza itsl.** Odstupanja koja postoje u odnosu na stvarne vrednosti napona, kod ove hipoteze su uvek na strani sigurnosti.

Ova hipoteza koja je poznata i po autorima koji su je razmatrali kao što su Huber (Huber), Mizes (Mises) i Henki (Hencky), kaže da do kritičnog stanja dolazi kada specifični deformacioni rad promene oblika dostigne kritičnu vrednost. Prema prethodno izvedenom o specifičnom deformacionom radu može da se napiše sledeći izraz:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \;\; \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \;\; \leq \;\sigma \;\;^2 . \tag{5.35}$$

Za slučaj ravanskog stanja napona dobija se nešto jednostavnije:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq \;\sigma \;\;^2 . \tag{5.36}$$

Odavde sledi da je **ekvivalentni napon za ravansko stanje napona**:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2} \; . \tag{5.37}$$

Ova hipoteza opisuje početak plastičnih deformacija, što je poznato kao Mizesov uslov tečenja koji se daje izrazom:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2 . \tag{5.38}$$