

Основи Механике Материјала

1. УВОД

ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

Сви материјали имају извесне границе до којих могу бити оптерећени, па је зато одувек било потребно познавање њихових особина како би се могли направити алати и оруђа за рад, оружје, превозна средства и разне друге конструкције. На пример, још су стари Египћани имали нека своја правила градње, тако да су успели да подигну многе велелепне грађевине и споменике. Стари Грци су унапређивали вештину грађења, а у трећем веку пре нове ере развили су и једну посебну грану науке која се зове статика.

Овде треба посебно нагласити Архимедова достигнућа значајна за развој механике. Он је

- формулисао концепт услова равнотеже, укључујући силе и моменте;
- развио методу за одређивање тежишта крутих тела.

Римљани су, такође, много градили и доста иза себе оставили, а од најзначајнијих научника тога времена издвојићемо Vitruvius-a, римског архитекту из 1. века п.н.е, који је оставио за собом књигу са описима материјала, врста конструкција и неких од справа које су коришћене у то време. Пропашћу римског царства наступио је мрачни период у развоју цивилизације у току којег је већина тих знања пала у заборав. Са периодом ренесансе (15-16. век) долази до буђења многих наука и уметности, па се и оваква знања обнављају. У том периоду, нека од најзначајнијих имена су:

- Leonardo da Vinci (1452 – 1519), не само водећи уметник, већ и велики научник и инжењер са огромним интересовањем и талентом за механику; проучавао је отпорност грађевинских материјала; оставио је многе бележнице, а једна од њих носи назив: "Испитивање јачине гвоздене жице разних дужина"; разматрао је и отпорност греда и проблеме везане за њихову носивост (тек у 17. веку направљени су први покушаји изналажења потребних димензија грађевинских елемената путем математичке анализе);
- Galileo Galilei (1564 – 1642) у својој књизи "Due nuove science" из 1638. године, покушава да пронађе методу којом би се могла извршити анализа напона, што представља и званични почетак развоја науке о отпорности материјала.

У вековима који потом следе (17–18. век) многи научници су давали значајне доприносе, а овде ћемо поменути још једно име:

- Robert Hooke (1635–1703) је објавио рад "De Potentia Restitutiva" (о опрузи), што представља први објављени рад у коме се расправља о еластичним особинама материјала (такозвани Хуков закон послужио је као важна основа за даљи развој отпорности материјала).

На крају овог кратког историјског прегледа, треба поменути и имена још неких научника који су допринели развоју ове области: 1825 – Louis Navier (први курс Отпорности материјала), 1852 – Gabriel Lamé (први курс Теорије еластичности).

Овај кратки преглед историјског развоја науке о отпорности материјала завршавамо следећим коментаром: и данас и надаље праве се и правиће се озбиљни помаци на овом пољу. Нове технологије, нови вештачки материјали, нове прорачунске методе, реалне потребе за све сложенијим и компликованијим конструкцијама, воде и водиће ка све бољим и успешнијим конструктивним инжењерским резултатима.

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА - МЕХАНИКА МАТЕРИЈАЛА

- ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА
- НАУКА О ЧВРСТОЋИ
- STRENGTH OF MATERIALS

ПРЕДМЕТ ПРОУЧАВАЊА

Један од основних инжењерских задатака је да се обезбеди чврстоћа и крутост конструкције и елемената који је образују, при чему треба да се оствари најмањи могући утрошак материјала. То значи да људи који пројектују треба да располажу знањем које ће им омогућити да свим елементима конструкције одреде такве димензије и облике, који ће у примени обезбеђивати сигурност, поузданост, трајност и одговарајуће економиске ефекте.

На почетку предавања из предмета **Отпорност материјала - Механика материјала**, логично је поставити питање шта је то Отпорност материјала и чиме се она бави.

Пођимо од науке која се зове **Механика** и која се састоји из више области:

- **Статика** - проучава услове равнотеже недеформабилних тела,
- **Динамика** - проучава кретање недеформабилних тела,
- **Механика деформабилног тела** - проучава локалне промене међусобних положаја тачака тела (деформације),
- **Теорија еластичности** - основна подобласт Механике деформабилног тела; изучава везе између сила и деформација при чему користи сложен математички апарат који није погодан за инжењерску праксу.

Увођењем одређених претпоставки и упрошћавањем, приличан број закључака, посебно оних који се односе на технички важне проблеме, може се извести знатно једноставније.

Отпорност материјала је посебна научна дисциплина која обухвата инжењерске методе прорачуна:

- **чврстоће** (способност конструкције да издржи одређено оптерећење а да не дође до њеног попуштања),
- **крутости** (способност конструкције да се при супротстављању оптерећењима не деформише преко дозвољене границе) и
- **стабилности** (способност конструкције да сачува првобитни облик равнотеже)

конструкција или њихових делова.

Отпорност материјала уводи претпоставке о понашању материјала под дејством неког оптерећења које представљају апроксимацију стварности. Захваљујући томе, добијени обрасци који служе инжењеру да одреди носивост конструкције су једноставни и погодни за брзу и практичну примену за већину проблема који се појављују у инжењерској пракси. Отпорност материјала се углавном бави изучавањем проблема тела напрегнутих до границе еластичности, а у односу на геометрију тела, у највећем броју случајева, проучава линијске носеће елементе. Отпорност материјала је неопходна инжењеру било које специјалности. Без основног познавања ове области, немогуће је пројектовати било какву конструкцију.

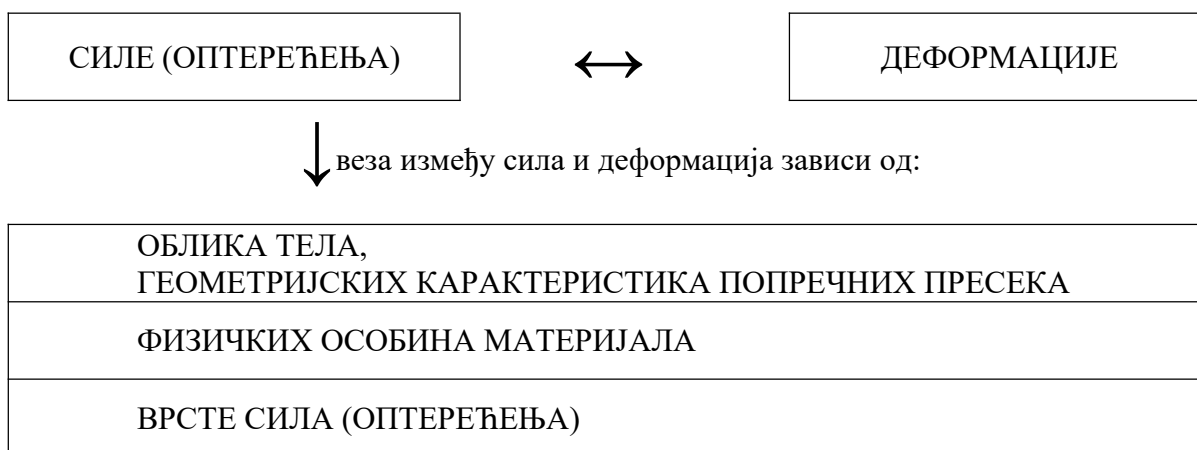
Пред сваког конструктора, у процесу стварања новог решења, поставља се неколико, на први поглед, противречних захтева: оптималан облик конструкције, економичност при употреби материјала, сигурност у раду, дуг век трајања и ниска цена производа. Испунити оптимално све ове захтеве скоро је немогуће, па на конструктору остаје да у сваком конкретном случају одабере онај којем треба дати предност. Отпорност материјала не даје одговоре на сва питања која се

постављају пред инжењера током пројектовања, па због тога при примени појединих образаца треба бити опрезан (користити их ако постоји дугогодишње искуство у њиховој примени).

У машинству односно машинској техници, наука о Отпорности материјала представља основу за прорачун машинских делова и конструкција. Механика и математика представљају теоријски, а физика и наука о материјалима експериментални део њених основа.

Основни задатак којим ћемо се бавити у даљем излагању овог курса из Отпорности материјала - Механике материјала, јесте проучавање напона и деформација неког тела изазваног дејством одговарајућег оптерећења.

На основу претходно реченог, интересоваће нас веза:



ФИЗИЧКЕ ОСОБИНЕ МАТЕРИЈАЛА

У оквирима механике се посматрају две основне врсте тела:

- **круто** или **недеформабилно** тело и
- **чврсто** или **деформабилно** тело.

Материјал деформабилних тела посматра се као:

- **еластичан**, када се све тачке посматраног тела после уклањања оптерећења враћају у првобитни положај и
- **нееластичан** односно **пластичан**, када то није случај.

Такође, материјал може бити:

- **хомоген**, ако има исте особине у свим тачкама посматране запремине и
- **нехомоген** ако нема исте особине у свим тачкама.

Ако се посматрају особине материјала по правцима, материјали се деле на две основне групе:

- **изотропне**, када имају исте особине у свим правцима и
- **анизотропне**, када физичке карактеристике материјала нису исте у произвољно изабраним правцима.

У оквиру основног курса из Механике материјала, најбитнији машински материјал **челик** посматра се као **хомоген, еластичан и изотропан**.

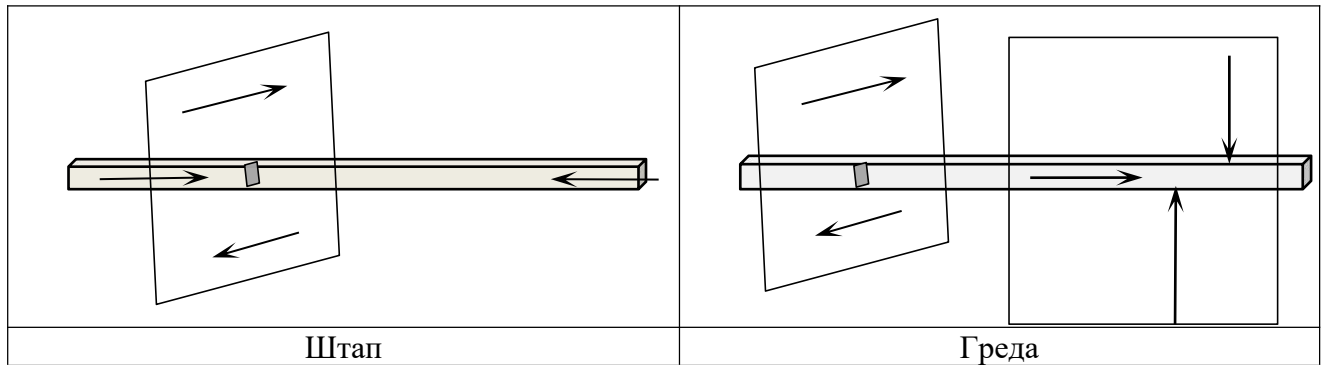
ОБЛИК ТЕЛА

Сва тела су тродимензионална, али у зависности од врсте инжењерских проблема, није увек неопходно сваки проблем решавати као тродимензионалан, већ је увођењем одређених претпоставки, до којих се долази искуством и експериментима, могуће тродимензионалне облике упростити и свести их на два облика тела који се изучавају у Теорији еластичности:

- **линијски** носећи елемент (штап, греда),
- **површински** носећи елемент (плоча, љуска).

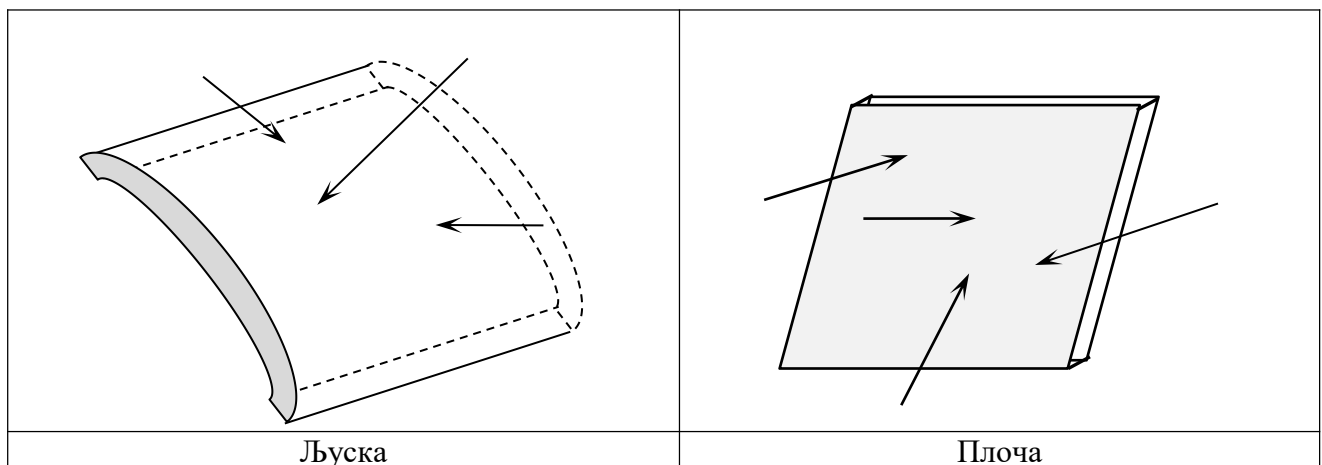
На овај начин се инжењеру омогућава да проблем сведе на једнодимензионални или дводимензионални.

Штап (греда) је линијски носећи елемент, односно тело чија је једна димензија много већа од друге две. Теоријски настаје тако што се произвољна равна фигура креће дуж неке линије - подужне осе елемента. Термин штап се користи за носећи линијски елемент који је оптерећен само силама у правцу своје подужне осе и/или моментима који делују у равнима управним на подужну осу. Греда је линијски елемент који може да буде оптерећен и у равнима које садрже подужну осу (слика 2.1). Линијски елементи могу да буду прави или криви, а њихов попречни пресек константан или променљив.



Слика 1.1 Линијски носећи елементи

Површински носећи елементи (плоче и љуске) су посебан предмет проучавања у оквиру Теорије еластичности. Значи, плоче и љуске су површински носећи елементи, односно тела којима је једна димензија (дебљина) много мања од друге две. Средњом површи тих елемената се назива она површина која дебљину ових елемената дели на пола. Средња површ љуске је крива, а средња површ плоче равна.

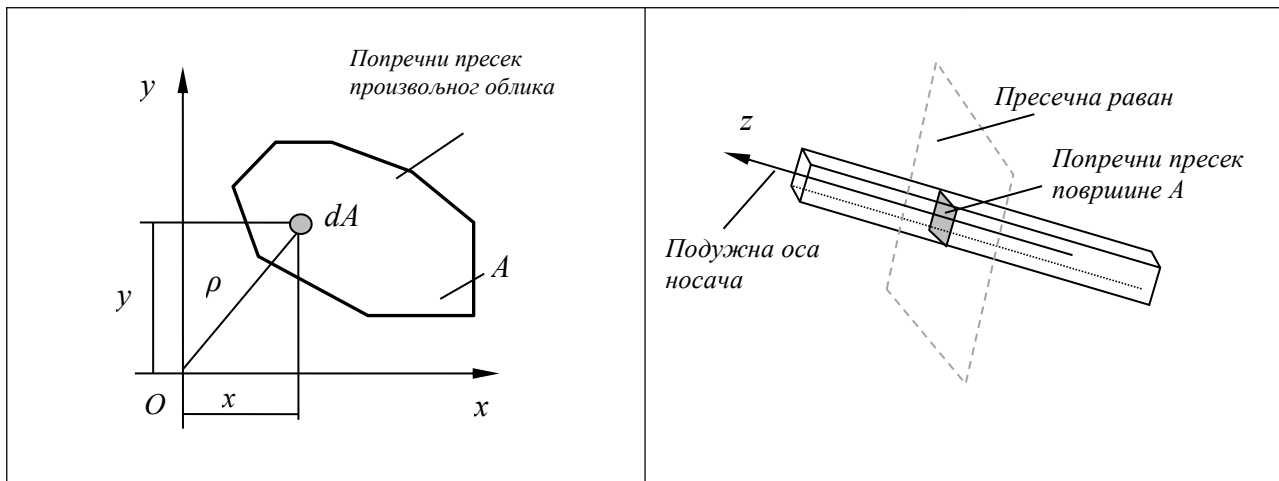


Слика 1.2 Површински носећи елементи

У Отпорности материјала, у даљим разматрањима, анализираћемо углавном праве или благо закривљене штапове (греде), као и конструкције састављене од више правих или благо закривљених штапова (греда), а у виду раванских и просторних форми.

2. ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОПРЕЧНИХ ПРЕСЕКА

Попречни пресек је фигура у пресечној равни која је управна на подужну осу носача (штапа или греде).



Слика 2.1. Попречни пресек носача

Геометријска карактеристика пресека је величина која дефинише пресек и зависи од његовог облика и положаја у простору. Посматрајмо произвољни попречни пресек приказан на слици 2.1. Положај елементарне површине dA дефинисан је координатама x и y .

Површина пресека се рачуна као

$$A = \iint_A dA. \quad (2.1)$$

Увек је позитивна и њена димензија је дужина на квадрат $[l^2]$.

Статички моменти су геометријске карактеристике пресека чије су димензије $[l^3]$:

$$S_x = \iint_A y dA \quad (2.2a)$$

$$S_y = \iint_A x dA \quad (2.26)$$

У односу на изабрани координатни систем имају следеће знаке:

- у првом квадранту $S_x > 0$, $S_y > 0$,
- у другом квадранту $S_x > 0$, $S_y < 0$,
- у трећем квадранту $S_x < 0$, $S_y < 0$,
- у четвртном квадранту $S_x < 0$, $S_y > 0$.

Тежиште (центар) попречног пресека се дефинише на основу статичких момената тако што су статички моменти за тежишне осе једнаки нули.

За произвољно одабран координатни систем, координате тежишта износе:

$$x_C = \frac{S_y}{A} \quad (2.3a)$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} \quad (2.3b)$$

Моменти инерције су геометријске карактеристике пресека димензије дужина на четврти степен $[l^4]$.

Аксијални моменти инерције показују положај површине пресека у односу на одабрану осу и на тај начин дефинишу њен отпор на напрезање које се зове савијање:

$$I_x = \iint_A y^2 dA \quad (2.4a)$$

$$I_y = \iint_A x^2 dA \quad (2.4b)$$

Увек су позитивни: $I_x > 0, I_y > 0$.

Центрифугални момент инерције се дефинише за пар међусобно управних оса као

$$I_{xy} = \iint_A xy dA \quad (2.5)$$

Ако се цела фигура (површина) налази у првом или трећем квадранту њен центрифугални момент је позитиван, а ако се налази у другом или четвртном квадранту он је негативан. Центрифугални момент може да буде и једнак нули. Свака површина било ког облика има пар оса за које је центрифугални момент нула и те осе се зову главне тежишне осе. Ако површина има осу симетрије, за сваки пар оса од којих је једна оса симетрије центрифугални момент је једнак нули.

Поларни момент инерције се дефинише у односу на пол (координатни почетак) као

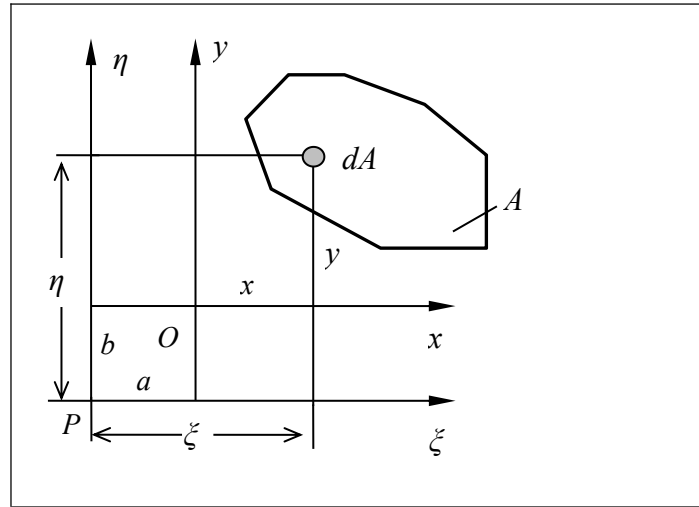
$$I_0 = \iint_A \rho^2 dA \quad (2.6)$$

и зато је увек позитиван. На основу слике 2.1 може се написати

$$I_0 = \iint_A \rho^2 dA = \iint_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x \quad (2.7)$$

што показује да је збир аксијалних момената инерције за сваки пар међусобно управних оса са истим координатним почетком константан.

2.1 Промена момената инерције при трансляцији координатног система



Слика 2.2. Транслација координатног система

Посматрајмо два паралелна координатна система (xOy) и $(\xi P\eta)$ на међусобном растојању (a, b) (a -хоризонтално) и $(b$ -вертикално). На основу слике 2.2 веза између координата износи

$$\xi = x + a \quad \text{и} \quad \eta = y + b. \quad (2.8)$$

Аксијални момент инерције за осу ξ износи

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \iint_A \eta^2 dA = \iint_A (y + b)^2 dA = \iint_A (y^2 + 2yb + b^2) dA \\ I_{\xi} &= \iint_A y^2 dA + 2b \iint_A y dA + b^2 \iint_A dA = I_x + 2bS_x + b^2 A \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аксијални момент инерције за осу η износи

$$\begin{aligned} I_{\eta} &= \iint_A \xi^2 dA = \iint_A (x + a)^2 dA = \iint_A (x^2 + 2xa + a^2) dA \\ I_{\eta} &= \iint_A x^2 dA + 2a \iint_A x dA + a^2 \iint_A dA = I_y + 2aS_y + a^2 A \end{aligned} \quad (2.10)$$

Одговарајући центрифугални момент за осе ξ и η је

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \iint_A \xi\eta dA = \iint_A (x + a)(y + b) dA = \iint_A (xy + xb + ya + ab) dA \\ I_{\xi\eta} &= \iint_A xy dA + b \iint_A x dA + a \iint_A y dA + ab \iint_A dA = I_{xy} + bS_y + aS_x + abA \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ако је координатни систем (x, y) тежишни (централни), статички моменти су једнаки нули и

$$a = \xi_C \quad \text{и} \quad b = \eta_C.$$

Изрази (2.9), (2.10) и (2.11) постају

$$I_{\xi} = I_x + \eta_C^2 A$$

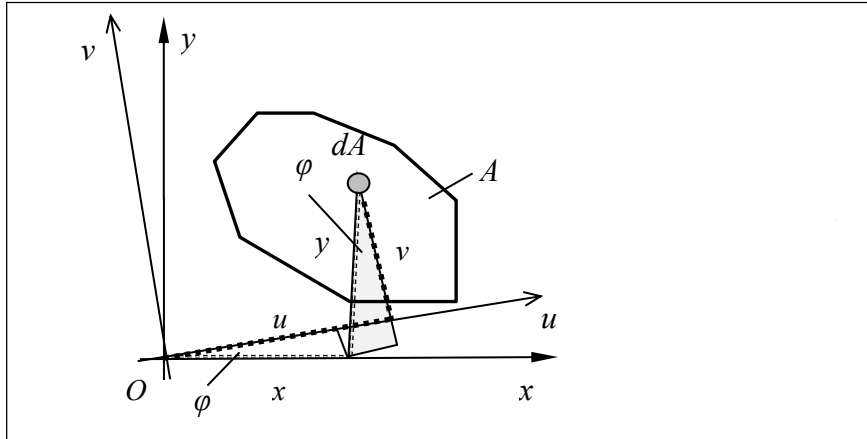
$$I_{\eta} = I_y + \xi_C^2 A$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + \xi_C \eta_C A \quad (2.12)$$

што представља **Штајнерову теорему** која гласи: моменти инерције за произвољне осе једнаки су збиру сопствених (за паралелне осе које пролазе кроз тежиште) и одговарајућих положајних момената инерције.

2.2 Промена момената инерције при ротацији координатног система

Извршимо анализу аналогно оној приказаној у претходном поглављу.



Слика 2.3. Ротација координатног система

Посматрајмо координатни систем (u, v) заокренут за угао $+\varphi$ у односу на координатни систем (x, y) . На основу слике 2.3 може се написати веза између координата као

$$\begin{aligned} u &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ v &= y \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

На основу дефиниције момената инерције добија се

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi + x^2 \sin^2 \varphi) dA, \\ I_u &= \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA + \sin^2 \varphi \int_A x^2 dA = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{xy} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ I_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dA = \int_A (x^2 \cos^2 \varphi + 2xy \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dA, \\ I_v &= \cos^2 \varphi \int_A x^2 dA + 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA + \sin^2 \varphi \int_A y^2 dA = I_y \cos^2 \varphi + I_x \sin^2 \varphi + I_{xy} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(y \cos \varphi - x \sin \varphi) dA = \int_A (xy \cos^2 \varphi + (y^2 - x^2) \sin \varphi \cos \varphi - xy \sin^2 \varphi) dA$$

$$I_{uv} = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_A xy dA + \sin \varphi \cos \varphi \left(\int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right) = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) I_{xy} + \sin \varphi \cos \varphi (I_x - I_y).$$

Једначине (2.14) дају вредности тражених момената инерције у зависности од угла φ у облику

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ I_v &= I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ I_{uv} &= (I_x - I_y) \sin \varphi \cos \varphi + I_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Да би се олакшала математичка анализа прелази се на двоструки угао 2φ тако да претходни изрази постају

$$I_u = I_x \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + I_y \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} - I_{xy} \sin 2\varphi = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi, \quad (2.16a)$$

$$I_v = I_x \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + I_y \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + I_{xy} \sin 2\varphi = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi, \quad (2.16b)$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi. \quad (2.16v)$$

Потражимо екстремне вредности аксијалних момената инерције преко првих извода одговарајућих функција. Изједначимо први извод функција I_u и I_v са нулом

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_u}{\partial \varphi} &= -(I_x - I_y) \sin 2\varphi - 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0, \\ \frac{\partial I_v}{\partial \varphi} &= +(I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Угао $\varphi = \alpha$ при коме се јављају њихове екстремне вредности приказан је тангенсом

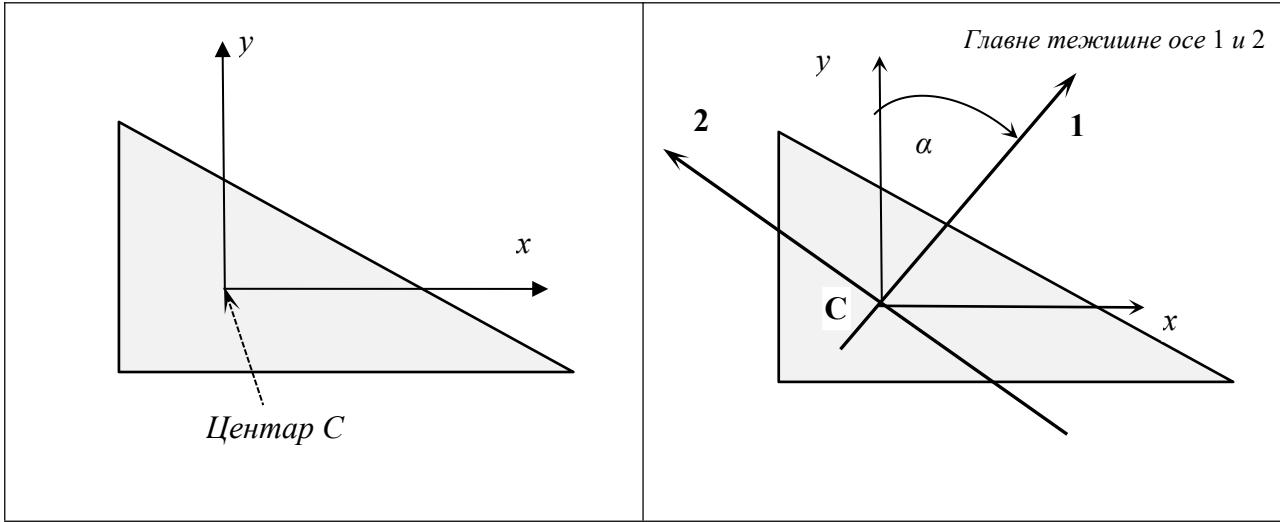
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (2.18)$$

Тангенс је периодична функција са периодом π , тако да се екстремне вредности појављују при угловима $\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}, \alpha + \pi, \alpha + \frac{3\pi}{2} \dots$

Када координатни почетак вежемо за тежиште фигуре, односно када је $O=C$, аксијални моменти инерције са екстремним вредностима обележавају се као (I_1, I_2) и називају се главним моментима инерције (слика 2.4). Осе 1 и 2 називају се главним тежишним (централним) осама.

Заменом (2.18) у (2.16v) добија се одговарајућа вредност центрифугалног момента, односно

$$I_{12} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi = I_{xy} \cos 2\varphi \left(1 + \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}} \operatorname{tg} 2\varphi \right) = 0. \quad (2.19)$$



Слика 2.4. Главне тежишне осе 1 и 2

Да би одредили минималну и максималну вредност аксијалних момената инерције потражимо и други извод функције I_u

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_u}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[- (I_x - I_y) \sin 2\varphi - 2I_{xy} \cos 2\varphi \right] = -2(I_x - I_y) \cos 2\varphi + 4I_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= -2 \cos 2\varphi \left[(I_x - I_y) - 2I_{xy} \left(\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \right] = \frac{-2 \cos 2\varphi}{I_x - I_y} \left[(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Знак другог извода зависи од члана $\frac{-2 \cos 2\varphi}{I_x - I_y}$. Када је други извод мањи од нуле функција има максималну вредност, и обрнуто. Користећи последњи израз напишимо функцију I_u из једначина (2.16) у облику

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \left[(I_x - I_y) + \frac{4I_{xy}^2}{I_x - I_y} \right]. \quad (2.21)$$

Применом адиционе формуле представимо косинус угла помоћу његовог тангенса

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}} = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}. \quad (2.22)$$

Како је $\cos 2\varphi = -\cos 2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, заменом (2.22) у (2.21) добијају се екстремне вредности аксијалних момената инерције, односно максимални момент I_1 и минимални момент I_2

$$I_{1/2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (2.23)$$

Максимални центрифугални момент инерције добија се преко првог извода функције представљене изразом (2.16в)

$$\frac{\partial I_{uv}}{\partial \varphi} = (I_x - I_y) \cos 2\varphi - 2I_{xy} \sin 2\varphi = 0. \quad (2.24)$$

Угао при коме се појављују екстремне вредности приказан је котангенсом

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (2.25)$$

Поређењем (2.18) и (2.25) види се да максимални центрифугални момент имају осе под углом од 45° у односу на главне осе. Максимални центрифугални момент износи

$$|I_{uv \max}| = \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (2.26)$$

ГЛАВНЕ ТЕЖИШНЕ ОСЕ И ГЛАВНИ МОМЕНТИ ИНЕРЦИЈЕ

Покушајмо да пронађемо матрицу момената инерције која има само аксијалне компоненте, док су центрифугални моменти једнаки нули. Назовимо ту матрицу матрицом главних момената и напишимо

$$\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} I_{g1} & 0 \\ 0 & I_{g2} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Одузимањем формирајмо матрицу

$$\begin{bmatrix} I_x - I_g & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y - I_g \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Да би пронашли решења за интензитете главних напона изједначимо детерминанту матрице (2.28) са нулом. Започнимо сређивање на следећи начин

$$(I_x - I_g)(I_y - I_g) - I_{xy}^2 = 0.$$

Измножимо све чланове и групишимо према степену уз I_g . Добијамо

$$\begin{aligned} I_x I_y - I_x I_g - I_y I_g + I_g^2 - I_{xy}^2 &= 0 \quad \rightarrow \quad I_g^2 - I_g c_1 + c_2 = 0. \\ c_1 &= I_x + I_y = I_{nv1} \\ c_2 &= I_x I_y - I_{xy}^2 = I_{nv2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Величине c_1 и c_2 (I_{nv1}, I_{nv2}) називају се прва и друга инваријанта момената инерције. Интензитети главних момената добијају се решавањем једначине (2.29). Применимо претходна разматрања да добијемо израз (2.23) за главне тежишне моменте инерције.

Квадратна једначина има облик

$$I_g^2 - I_g(I_x + I_y) + (I_x I_y - I_{xy}^2) = 0. \quad (2.30)$$

Како је решење квадратне једначине типа $ax^2 + bx + c = 0$ дефинисано изразом

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ за главне моменте инерције се добија}$$

$$I_{g1/g2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}, \quad (2.31)$$

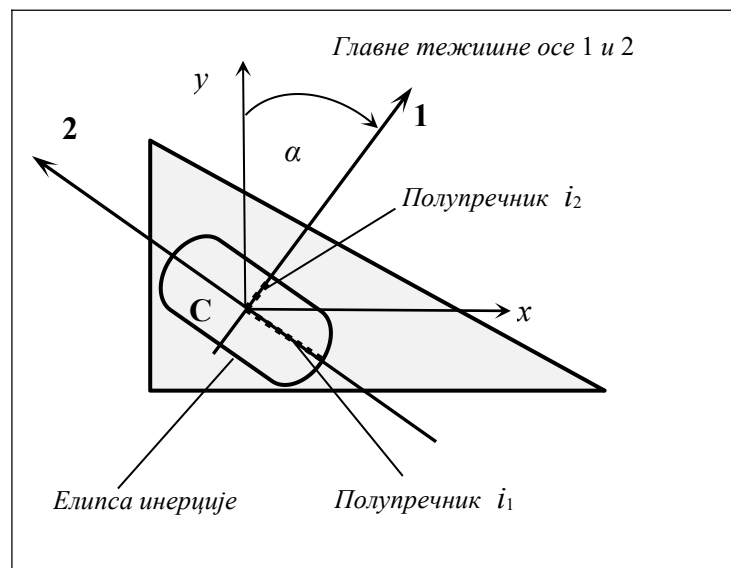
што је, наравно, идентично изразу (2.23).

ЕЛИПСА ИНЕРЦИЈЕ

Полупречници елипсе инерције се дефинишу изразима

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad \text{и} \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad (2.32)$$

и имају димензију дужине. Елипса се црта тако што се већи полупречник i_1 наноси на осу 2, и обрнуто. Елипса инерције се простира у правцу пружања попречног пресека, односно прати његов облик.



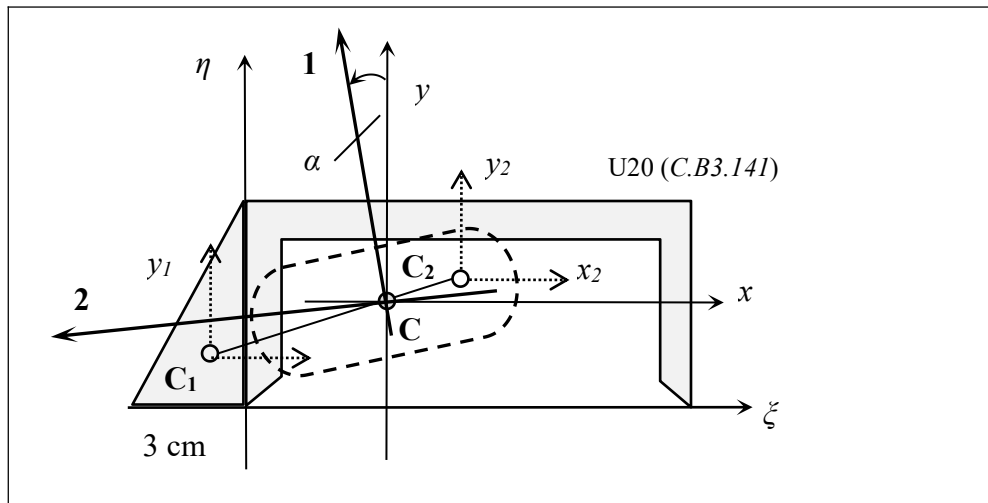
Слика 2.5. Елипса инерције

При цртању главних тежишних оса и елипсе инерције користи се следеће правило (уместо да се траже изводи):

- упореде се вредности аксијалних момената инерције за тежишне осе x и y (I_x и I_y);
- оса са већим моментом инерције заокрене се за угао α и добије се оса 1 (пази се на знак угла, позитиван смер иде супротно од казаљке на сату);
- оса 2 се учрта заокретањем осе 1 за $+90$ степени.

Пример 1

Користећи задати почетни координатни систем (ζ, η) одредити главне тежишне моменте инерције и скицати елипсу инерције.



Слика 2.6. Пример 1

1. Припрема задатка: Помоћу Таблица из Отпорности материјала (стр. 37 и стр. 190) прочитати површине, координате тежишта и сопствене моменте инерције

	Фигура $i=1$ - троугао	Фигура $i=2$ - профил U 20
Површина A_i	$3 \times 7,5/2 = 11,25 \text{ cm}^2$	$32,2 \text{ cm}^2$
Координата ξ_i	-1 cm	10 cm
Координата η_i	$+7,5/3 = 2,5 \text{ cm}$	$7,5 - 2,01 = 5,49 \text{ cm}$
Аксијални момент I_{xi}	$3 \times 7,5^3/36 \text{ cm}^4$	148 cm^4
Аксијални момент I_{yi}	$3^3 \times 7,5/36 \text{ cm}^4$	1910 cm^4
Центрифугални момент I_{xyi}	$+3^2 \times 7,5^2/72 \text{ cm}^4$	0

2. Одредити моменте инерције за задате осе (ζ, η)

$$I_{\zeta} = \sum_{i=1}^2 (I_{xi} + A_i \eta_i^2) = \left[\frac{3 \cdot 7,5^3}{36} + 11,25 \cdot 2,5^2 \right]_1 + [148 + 32,2 \cdot 5,49^2]_2 = 1223,98 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = \sum_{i=1}^2 (I_{yi} + A_i \xi_i^2) = \left[\frac{3^3 \cdot 7,5}{36} + 11,25 \cdot (-1)^2 \right]_1 + [1910 + 32,2 \cdot 10^2]_2 = 5146,88 \text{ cm}^4$$

$$I_{\zeta\eta} = \sum_{i=1}^2 (I_{xyi} + A_i \cdot \xi_i \cdot \eta_i) = \left[+ \frac{3 \cdot 7,5^3}{72} + 11,25 \cdot (-1) \cdot 2,5 \right]_1 + [0 + 32,2 \cdot 10 \cdot 5,49]_2 = 1746,69 \text{ cm}^4$$

3. Одредити површину целог пресека и координате тежишта целог пресека

$$A = \sum_{i=1}^2 (A_i) = \left[\frac{3 \cdot 7,5^2}{2} \right]_1 + [32,2]_2 = 43,45 \text{ cm}^2$$

$$\xi_C = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i \xi_i}{A} = \frac{11,25 \cdot (-1) + 32,2 \cdot 10}{43,45} = 7,152 \text{ cm}$$

$$\eta_C = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i \eta_i}{A} = \frac{11,25 \cdot 2,25 + 32,2 \cdot 5,49}{43,45} = 4,716 \text{ cm}$$

4. Одредити моменте инерције за тежишне осе x , y

$$I_x = I_{\xi} - A\eta_c^2 = 1223,98 - 43,45 \cdot 4,716^2 = 257,62 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{\eta} - A\xi_c^2 = 5146,875 - 43,45 \cdot 7,152^2 = 2924,36 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} - A \cdot \xi_c \eta_c = 1746,686 - 43,45 \cdot 7,152 \cdot 4,716 = 281,17 \text{ cm}^4$$

5. Одредити главне централне моменте инерције

$$I_{1/2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \Rightarrow I_1 = 2953,76 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 228,35 \text{ cm}^4$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0,211 \Rightarrow \alpha = 6^\circ$$

6. Одредити полупречнике елипсе инерције

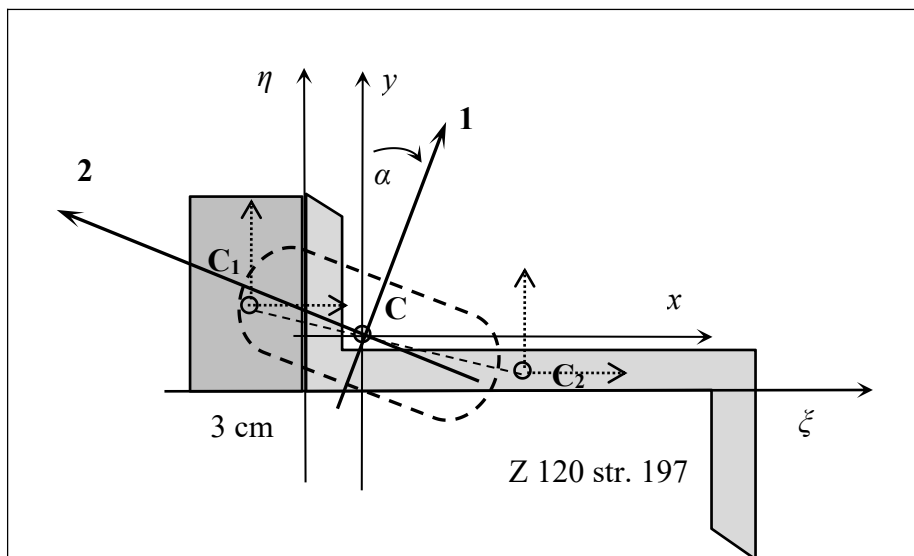
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = 8,245 \text{ cm} \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 2,292 \text{ cm}$$

A1	11,25	A2	32,2	A3	0
xc1	-1	xc2	10	xc3	0
yc1	2,5	yc2	5,49	yc3	0
lx1	35,156	lx2	148	lx3	0
ly1	5,625	ly2	1910	ly3	0
lxy1	7,03	lxy2	0	lxy3	0
A	43,45				
xc	7,151898734				
yc	4,715834292				
lksi	1223,97972				
leta	5146,875				
lksieta	1746,685				
lx	257,691126				
ly	2924,422468				
lxy	281,2394937				
I1	2953,75987	Io	3182,113594		
I2	228,3537239	Io	3182,113594		
tg 2alfa	0,210924505				
alfa	5,955426925				
i1	8,245038778				
i2	2,29249902				

За Семинарски рад 1. део

- Ставити у Excel (за најмање три фигуре)
 - Дат је најједноставнији пример, улазни подаци (плаво) се уносе помоћу задате слике и Таблица

Пример 2



A1	18	A2	18,2	A3	0
xc1	-1,5	xc2	6	xc3	0
yc1	3	yc2	0,35	yc3	0
lx1	54	lx2	106	lx3	0
ly1	13,5	ly2	402	ly3	0
lxy1	0	lxy2	-158	lxy3	0

A	36,2
xc	2,270718232
yc	1,667679558

lksi	324,2295
leta	1111,2
lksieta	-200,78

lx	223,5516851
ly	924,5469613
lxy	-337,8632597

l1	1060,875962	lo	1148,098646
l2	87,22268408	lo	1148,098646

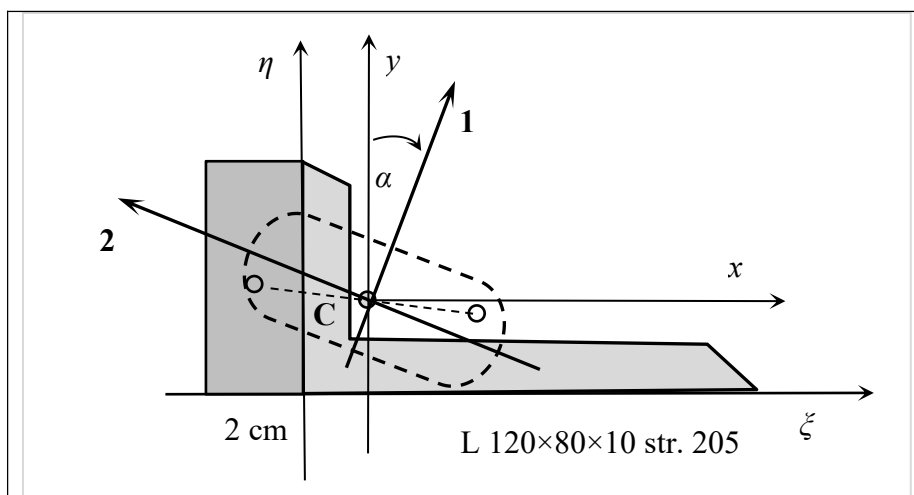
tg 2alfa	-0,963953028
alfa	-21,97489533

i1	5,413498482
i2	1,552245603

Напомене (црвена боја):

1. Пазити на дебљину профила
2. Пазити на знак центрифугалног момента (у Таблицама се даје само апсолутна вредност)
3. Пазити на положај профила у односу на Таблице

Пример 3



A1	16 A2	19,1 A3	0
xc1	-1 xc2	3,92 xc3	0
yc1	4 yc2	1,95 yc3	0
lx1	85,333 lx2	98,1 lx3	0
ly1	5,333 ly2	276 ly3	0
lxy1	0 lxy2	-96,103 lxy3	0

A	35,1
xc	1,677264957
yc	2,884472934

lksi	512,06075
leta	590,83124
lksieta	-14,1026

lx	220,0222877
ly	492,0872974
lxy	-183,9172906

I1	584,813207	Io	712,1095852
I2	127,2963782	Io	712,1095852

tg 2alfa	-1,35200988
----------	-------------

alfa	-26,75674179
------	--------------

i1	4,081831075
i2	1,904383743

Напомене:

- Пазити на положај профила у односу на Таблице
- Центрифугални момент L профила (црвено) израчунати применом друге инваријанте

$$I_x I_y - I_{xy}^2 = I_1 I_2 - I_{12}^2$$

$$I_{xy} = \pm \sqrt{I_x I_y - I_1 I_2}$$

- Пазити на знак центрифугалног момента