Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Vektorski proizvod

Da ne bi bilo zabune o tome šta je na prošlonedeljnom predavanju tačno radjeno na temu vektorskog proizvoda, evo i u elektronskom obliku dokaza da za vektorski proizvod dva vektora $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ važi

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Valja još jednom napomenuti da vektorski proizvod nije ovako definisan, već to da se isti ovako računa sledi iz načina na koji je definisan (preko sinusa ugla).

Naime, polazeći od $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, kao i

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} & \vec{u} \times \vec{v} = \left(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}\right) \times \left(v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}\right) \\ = \; & u_x \cdot v_x \cdot \vec{i} \times \vec{i} + u_x \cdot v_y \cdot \vec{i} \times \vec{j} + u_x \cdot v_z \cdot \vec{i} \times \vec{k} \\ & + u_y \cdot v_x \cdot \vec{j} \times \vec{i} + u_y \cdot v_y \cdot \vec{j} \times \vec{j} + u_y \cdot v_z \cdot \vec{j} \times \vec{k} \\ & + u_z \cdot v_x \cdot \vec{k} \times \vec{i} + u_z \cdot v_y \cdot \vec{k} \times \vec{j} + u_z \cdot v_z \cdot \vec{k} \times \vec{k} \\ = \; & u_x \cdot v_y \cdot \vec{k} - u_x \cdot v_z \cdot \vec{j} - u_y \cdot v_x \cdot \vec{k} + u_y \cdot v_z \cdot \vec{i} + u_z \cdot v_x \cdot \vec{j} - u_z \cdot v_y \cdot \vec{i}, \end{aligned}$$

što upravo jeste vrednost gornje determinante kada se ista razvije na način na koji se to radi u srednjoj školi. Inače, poslednji izraz u sredjenom obliku glasi

$$\begin{aligned} & (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \vec{i} + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \vec{j} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \vec{k} \\ = \; & (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \vec{i} - (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot \vec{j} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \vec{k} \\ = \; & \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}, \end{aligned}$$

što predstavlja uobičajen razvoj determinante 3. reda po 1-oj vrsti (tzv. Laplasov razvoj). Poslednje možemo zapisati i kao

$$\left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right).$$

A. Pejčev