Рада Мутавџић Ђукић

Матрице

Матрица формата $m \times n$ је правоугаона табела бројева са m врста и n колона. Записујемо је у облику

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Елемент a_{ij} се налази у i-тој врсти и j-тој колони дате матрице.

Ако је $m = n$, матрицу зовемо *квадратном*.

Квадратна матрица димензије n је а) дијагонална, б) горње-троугаона или в) доње-троугаона, ако је облика

$$\text{а)} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{б)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \text{в)} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

<u>Сабирање матрица</u>. Можемо сабирати матрице истих формата тако што сабирамо елементе на одговарајућим позицијама, тј. ако су дате матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, тада је $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

<u>Множење матрица бројем</u>. Матрица се множи бројем тако што се сви елементи матрице помноже тим бројем, тј. $\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

<u>Множење матрица</u>. Матрице A и B се тим редом могу множити, ако је $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$. Тада је $A \cdot B = C_{m\times p}$. Ако је $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$, тада је $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, тј. матрице се множе тако што се за сваку позицију скаларно помноже врста из прве матрице са колоном из друге матрице.

Приметимо да у општем случају множење матрица није комутативно, тј. $AB \neq BA$. Штавише, ако је AB дефинисано, онда то не мора бити и BA.

Јединична матрица E или I је квадратна матрица облика

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ако је A произвољна квадратна матрица исте димензије као E, тада је $AE = EA = A$.

Транспонована матрица матрице A, у ознаци A^T настаје када у матрици A врсте замене места са одговарајућим колонама. Важи $(AB)^T = B^T A^T$.

Нека је дата квадратна матрица $A = [a_{ij}]$ димензије n.

Минор M_{ij} елемента a_{ij} је детерминанта реда $n-1$ која се добија изостављањем i-те врсте и j-те колоне из матрице A.

Алгебарски кофактор (комплемент) A_{ij} елемента a_{ij} је број $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Адјунгована матрица $\operatorname{adj} A$ матрице A је матрица

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \qquad \text{(транспонована матрица кофактора).}$$

Инверзна матрица A^{-1} матрице A (ако постоји) је матрица за коју важи $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Инверзна матрица постоји ако и само ако детерминанта матрице није нула. У том случају матрицу зовемо *регуларном*. Иначе је матрица *сингуларна*.

Када инверзна матрица постоји, налазимо је по формули $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$.

Важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Матричне једначине облика $AX = B$ и $XA = B$, где су A и B познате матрице, а X непозната матрица, решавамо множењем са A^{-1} са леве, односно са десне стране редом. Тада је решење облика $X = A^{-1}B$, односно $X = BA^{-1}$.

Задаци

1. Наћи A^3, ако је $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

   Решење. Прво рачунамо $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, а затим $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Наћи A^{-1}, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   Решење. Како је $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq .0$, постоји A^{-1}, коју налазимо по формули
   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

3. Наћи A^{-1}, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Решење. Детерминанта дате матрице је $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Даље је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{па је} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

4. Решити матричну једначину $AX = A + E + 2X$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   Решење. Дату једначину можемо написати у облику $(A-2E)X = A+E$, одакле је $X = M^{-1}N$, где је $M = A - 2E$ и $N = A + E$. Дакле,
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Даље налазимо $\det M = -2$,
$$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\text{ и }\; X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -3 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Решити матричну једначину $(A + X)^{-1} = BX^{-1}$, где су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Решење. Множењем дате једначине са $A + X$ са леве и са X са десне стране добијамо једначину $X = (A + X)B$, тј. $X(E - B) = AB$. Ако уведемо ознаке $M = E - B$ и $N = AB$, тада је тражено решење $X = NM^{-1}$. Прво налазимо матрице
$$M = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Даље је $\det M = -3$,
$$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{bmatrix} -4/3 & -1 & -2 \\ -8/3 & -2 & -3 \\ 1/3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Решити матричну једначину $AXB = AX + E$, где су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   Решење. Дата једначина се може написати у облику $AX(B-E) = E$, одакле се множењем са A^{-1} са леве и са $(B - E)^{-1}$ са десне стране добија $X = A^{-1}(B - E)^{-1} = ((B - E)A)^{-1}$. Нека је
$$M = (B - E)A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2P,$$
   где је $P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тада је $\det P = 1$,
$$\operatorname{adj} P = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \frac{1}{2}P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 7/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Детерминанте

Детерминанта је број који придружујемо квадратној матрици. Знамо да рачунамо детерминанте до трећег реда:

$|a_{11}| = a_{11}$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Нека је $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ квадратна матрица димензије n и D њена детерминанта. Означимо са A_{ij} кофактор који одговара елементу a_{ij} у матрици A. Важи наредна теорема.

Теорема (Лапласов развој детерминанте).

$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$ (развој по i-тој врсти детерминанте D);

$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ (развој по j-тој колони детерминанте D).

Правила за рад са детерминантама.

1. Ако су у детерминанти D две врсте (колоне) пропорционалне, тада је $D = 0$.
2. Заменом места две врсте (колоне) детерминанта мења знак.
3. Детерминанта се множи бројем α тако што се елементи једне врсте (колоне) помноже са α.
4. Детерминанта се не мења ако елементима једне врсте (колоне) додамо елементе неке друге врсте (колоне) помножене бројем α.
5. Вредност детерминанте горње троугаоне матрице једнака је производу елемената на главној дијагонали.

За детерминанте важе једнакости $\det A = \det A^T$ и $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Задаци

1. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

   Решење. Означимо i-ту врсту (колону) матрице са V_i (K_i), замену места i-те и j-те врсте са $V_i \leftrightarrow V_j$, множење са k i-те врсте са kV_i и операцију додавања

j-те врсте помножене са k i-toj врсти са V_i+kV_j. Тада детерминанту можемо израчунати на следећи начин:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{V_4+V_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_2-K_1 \\ K_3-K_1}}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

2. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

<u>Решење.</u> Рачунамо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{V_2-V_1 \\ V_3-V_1}}{\underset{\substack{V_4-V_1 \\ V_5-6V_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -11 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ -11 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{K_2+2K_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -11 & -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -27 & -5 & -5 \end{vmatrix} = - \left(-2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -27 & -5 \end{vmatrix} \right)$$

$$=394.$$

3. Израчунати вредност детерминанте $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

<u>Решење.</u>

$$D = abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_2-K_1 \\ K_3-K_1 \\ K_4-K_1}}{=\!=\!=} abcd \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= abcd(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+c^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{K_2-K_1 \\ K_3-K_1}}{=\!=\!=} abcd(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ba+a^2 & (c-b)(a+b+c) & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$= abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix}$$

$$= abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Ранг матрице

Подматрица матрице A је матрица која настаје изостављањем неких врста или колона из матрице A.

Ранг матрице је димензија њене највеће квадратне регуларне подматрице.

Ранг матрице је заправо максималан број линеарно независних врста (колона) матрице и рачунамо га коришћењем *елементарних трансформација* матрице:

1. замена места две врсте (колоне);
2. множење елемената једне врсте (колоне) ненула бројем;
3. множење елемената једне врсте (колоне) ненула бројем и додавање на одговарајуће елементе неке друге врсте (колоне).

Применом елементарних трансформација добијају се *еквиваленте* матрице - оне које имају исти ранг. Приликом налажења ранга матрицу сводимо на квази-троугаону матрицу облика $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & O \end{array}\right]$, где је A (регуларна) горње троугаона матрица и O нула матрица. Тада је ранг матрице једнак димензији матрице A.

1. У зависности од параметра a наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$.

   Решење. Прво рачунамо $\det A = a^2+7a-8 = (a-1)(a+8)$. Следи да је за $a \neq -8$ и $a \neq 1$ матрица A регуларна, па је њен ранг $r(A) = 3$. Иначе посматрамо (водећу) подматрицу $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ која је регуларна (њена детерминанта је 5), па је $r(A) = 2$.

2. Наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Решење. Применом елементарних трансформација налазимо

$$A \overset{V_1 \leftrightarrow V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{V_2-2V_1 \\ V_4-4V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_2 \leftrightarrow V_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \overset{V_4-V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_4-V_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дакле, $r(A) = 3$ (једнак броју ненула елемената на главној дијагонали).

3. У зависности од параметара α и β наћи ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & \alpha & \beta & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење. Рачунамо

$$A \overset{\substack{V_2-3V_1 \\ V_3+V_1 \\ V_4-3V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 9 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & \alpha-9 & \beta+3 & -9 \end{bmatrix} \overset{V_3+V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & -9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-9 & \beta+3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{K_3 \leftrightarrow K_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -13 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \beta+3 & \alpha-9 \end{bmatrix} \overset{V_4+9V_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -13 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+48 & \alpha-9 \end{bmatrix}.$$

Дакле, за $\beta = -48$ и $\alpha = 9$ је $r(A) = 3$, а иначе је $r(A) = 4$.