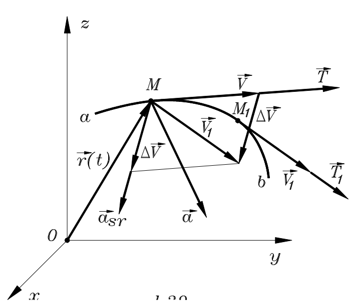
Ubrzanje tačke

Kinematička veličina koja karakteriše promenu vektora brzine tačke naziva se ubrzanje tačke.

Vektorski način određivanja ubrzanja tačke

Neka se uočena tačka M kreće po putanji ab. Uočavaju se dva bliska položaja posmatrane tačke: položaj tačke M određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u kome se tačka nađe u trenutku t i kada ima brzinu $\vec{V}$ i položaj tačke u kome se ona nađe u trenutku $t_1 = t + \Delta t$, kada ima brzinu $\vec{V}_1 = \vec{V}(t_1) = \vec{V} + \Delta\vec{V}$.



Odnos priraštaja vektora brzine $\Delta\vec{V}$ i njemu odgovarajućeg priraštaja vremena Δt naziva se srednje ubrzanje tačke za interval vremena Δt, odnosno

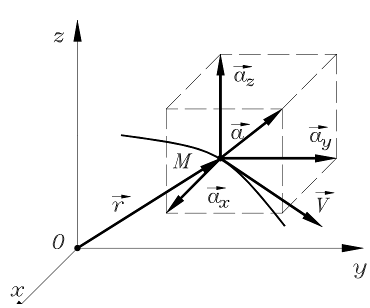
$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}}{t_1 - t}.$$

Graničnim prelazom, kada se Δt smanjuje i teži nuli, vektor srednjeg ubrzanja $\vec{a}_{sr}$ teži nekoj graničnoj vrednosti, koja se naziva ubrzanje tačke u datom trenutku (ubrzanje tačke) i određeno je sa

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Dimenzija kojom se izražava intenzitet ubrzanja je odnos dužine i kvadrata vremena $[a] = [LT^{-2}]$, a jedinice za merenje su: ms^{-2}, cms^{-2}, kmh^{-2}, itd.

Analitički (koordinatni) način određivanja ubrzanja tačke



Određivanje ubrzanja tačke u Dekartovim pravouglim koordinatama

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x, \qquad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y, \qquad a_z = \ddot{z} = \dot{V}_z,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{a}, \qquad cos\beta = \frac{\ddot{y}}{a}, \qquad cos\gamma = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

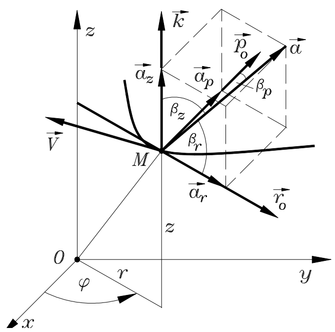
Ako se tačka kreće u ravni, tada je

$$a_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \ddot{y},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \qquad cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad cos\beta = \frac{\ddot{y}}{a},$$

a u slučaju pravolinijskog kretanja tačke je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \ddot{x}\vec{i} = \dot{V}_x\vec{i}, \qquad a = |a_x| = |\ddot{x}|.$$



Određivanje ubrzanja tačke u polarno – cilindarskim koordinatama

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_o + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{p}_o + \ddot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a} = a_r\vec{r}_o + a_p\vec{p}_o + a_z\vec{k},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \; a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \; a_z = \ddot{z},$$

- a_r -radijalno, a_p -poprečno (cirkularno, transverzalno) i a_z -aksijalno ubrzanje tačke.

$$a = \sqrt{a_r^{\,2} + a_p^{\,2} + a_z^{\,2}}, \quad cos\beta_r = \frac{a_r}{a}, \quad cos\beta_p = \frac{a_p}{a}, \quad cos\beta_z = \frac{a_z}{a}.$$

Kada se tačka kreće u ravni , tada je

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \qquad a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}, cos\beta_r = \frac{a_r}{a}, \quad cos\beta_p = \frac{a_p}{a}.$$

Izraz za poprečno ubrzanje može pisati i u obliku

$$a_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \; a_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2S_z),$$

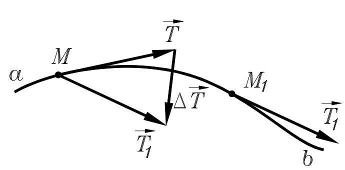
gde je sa S_z označena projekcija sektorske brzine tačke na osu *Oz*, odakle sledi da kada je sektorska brzina konstantna, važi

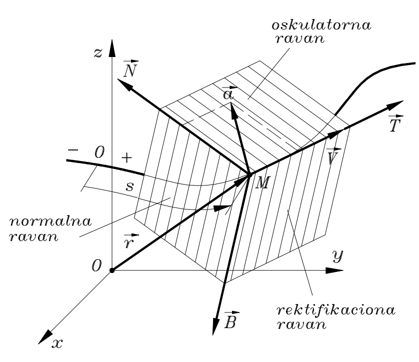
$$a_p = 0.$$

Prirodni način određivanja ubrzanja tačke

Prirodni trijedar u tački prostorne krive

Neka se posmatra kretanje tačke *M* po poznatoj putanji *ab*. Uočavaju se dva bliska položaja tačke *M* na putanji: položaj u kome je jedinični vektor tangente na putanju $\vec{T}$ i položaj u kome je jedinični vektor tangente na putanju $\vec{T}_1 = \vec{T} + \Delta\vec{T}$. Granični položaj ravni koju formiraju ova dva vektora, kada tačka M_1 teži tački *M*, naziva se oskulatorna ravan prirodnog trijedra u tački *M* prostorne krive koja predstavlja trajektoriju posmatrane tačke.

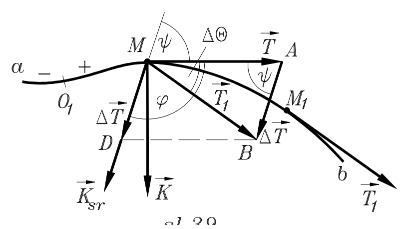




Upravno na jedinični vektor tangente $\vec{T}$ nalazi se normalna ravan prirodnog trijedra u tački *M*. Presek oskulatorne i normalne ravni određuje pravac glavne normale čiji je jedinični vektor $\vec{N}$ i koji je usmeren na konkavnu stranu krive. Upravno na ove dve ravni nalazi se tangencijalna (rektifikaciona) ravan prirodnog trijedra u tački M krive. Presek normalne i tangencijalne ravni određuje pravac binormale čiji je jedinični vektor $\vec{B}$ upravan na ostala dva jedinična vektora prirodnog trijedra, a orijentisan je tako da vektori $\vec{T}$, $\vec{N}$ i $\vec{B}$ obrazuju desni trijedar.

Vektor krivine krive

Pri kretanju tačke M po poznatoj putanji ab mogu se uočiti dva bliska položaja tačke M: položaj u kome se tačka nađe u trenutku t, koji je određen lučnom koordinatom $s = s(t) = \overset{\frown}{O_1 M}$, kada je jedinični vektor tangente na putanju $\vec{T}$ i položaj u kome se tačka nađe u trenutku t_1, koji je određen lučnom koordinatom $s_1 = s(t) = \overset{\frown}{O_1 M_1} = s + \Delta s$, i kada je jedinični vektor tangente na putanju $\vec{T}_1 = \vec{T} + \Delta\vec{T}$.



Promenom lučne koordinate $\Delta s = s_1 - s$ menja se i jedinični vektor tangente $\vec{T}$ zbog čega se može pisati da je

$$\vec{T} = \vec{T}(s)$$

Vektor

$$\vec{K}_{sr} = \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s},$$

naziva se srednja krivina krive na delu $\overset{\frown}{MM_1}$. Graničnim prelazom, kada tačka M teži tački M_1, dobija se vektor krivine krive u tački M

$$\vec{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} = \frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Za određivanje intenziteta vektora krivine $\vec{K}$ koristi se jednakokraki trougao MAB iz koga sledi da je

$$\left|\Delta\vec{T}\right| = \overline{AB} = 2 sin\frac{\Delta\theta}{2},$$

jer je $\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{T}_1\right| = 1$. Ugao $\Delta\theta$ koji zaklapaju jedinični vektori tangente $\vec{T}$ i $\vec{T}_1$ u tački M naziva se ugao zakrivljenja (kontigencije) krive na delu $\overset{\frown}{MM_1}$.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{T}\right|}{\left|\Delta s\right|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2 sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}, \qquad K = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}, \qquad \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1,$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Iz diferencijalne geometrije je poznato da važi

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{R_K},$$

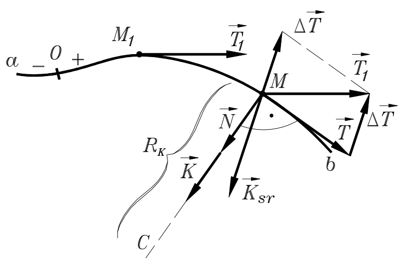
gde je R_K - poluprečnik krivine krive o datoj tački, $ds = R_K d\theta$, tako da je

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_K}, \quad K = \frac{1}{R_K}.$$

Graničnim postupkom kada tačka M_1 teži tački *M*, dolazi do obrtanja ravni *MABD* oko vektora $\vec{T}$ i kao granični položaj dobija se oskulatorna ravan. Pri tome , vektor srednje krivine $\vec{K}_{sr}$ sve vreme ostaje u ravni *MABD* i graničnim postupkom prelazi u vektor krivine $\vec{K}$. Dakle, vektor krivine krive $\vec{K}$ pripada oskulatornoj ravni. Ugao koji vektor $\vec{K}_{sr}$ zaklapa sa jediničnim vektorom tangente $\vec{T}$ određen sa

$$\varphi = \pi - \psi, \quad \psi = \frac{\pi - \Delta\theta}{2}, \ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta}{2},$$

$(\Delta s \to 0, \Delta\theta \to 0)$ $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \varphi = \frac{\pi}{2}$, što znači da je vektor krivine $\vec{K}$ upravan na jedinični vektor tangente $\vec{T}$ u tački *M*.



U slučaju kada je $\Delta s > 0$, priraštaj jediničnog vektora $\Delta\vec{T}$ usmeren je na "unutrašnju" stranu krive, a u slučaju kada je $\Delta s < 0$, vektor $\Delta\vec{T}$ orijentisan je na "spoljašnju" stranu krive. Međutim, vektor $\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}$ koji je jednak $\vec{K}_{sr}$ usmeren je na "unutrašnju" stranu krive zbog znaka skalara Δs. Iz svega prethodnog proizilazi da vektor krivine krive ima pravac i smer jediničnog vektora normale $\vec{N}$ u tački *M* krive, zbog čega se može pisati da je

$$\vec{K} = K\vec{N} = \frac{1}{R_K}\vec{N}.$$

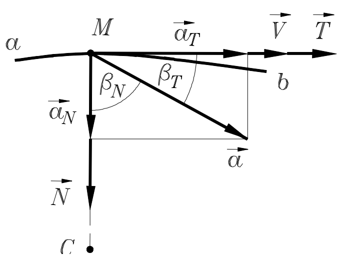
Tangencijalno i normalno ubrzanje tačke

U slučaju kada se tačka kreće po poznatoj putanji, i kada je njeno kretanje zadato zakonom kretanja tačke po putanji $s = s(t)$, tada na osnovu definicije ubrzanja sledi

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(V_T\vec{T}) = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{T}),$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}\dot{\vec{T}},$$

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{ds}\dot{s}, \quad \dot{\vec{T}} = \dot{s}\vec{K} = \frac{\dot{s}}{R_K}\vec{N}, \quad \vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_K}\vec{N}.$$



Kako je

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} + a_B\vec{B},$$

sledi da je

$$a_T = \ddot{s} = \dot{V}_T, \quad a_N = \frac{\dot{s}^2}{R_K} = \frac{V^2}{R_K}, \quad a_B = 0,$$

gde je a_T-tangencijalno, a_N-normalno i a_B-binormalno ubrzanje tačke.

$$a = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}}, \ \cos\beta_T = \frac{a_T}{a}, \quad \cos\beta_N = \frac{a_N}{a}.$$

Određivanje poluprečnika krivine putanje tačke

$$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T}\,,\quad a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{V_T}\,,\quad a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}\,,\quad R_K = \frac{V^2}{a_N}\,.$$

Konkretno, kada je kretanje tačke zadato u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem, diferenciranjem izraza za intenzitet brzine tačke, dolazi se do relacije $|2Va_T| = |2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}|$, iz koje sledi izraz za intenzitet tangencijalnog i normalnog ubrzanja tačke

$$|a_T| = \frac{|\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,,\quad a_N = \frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,,$$

pa je

$$R_K = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - {a_T}^2}}\,.$$