Рада Мутавџић Ђукић

Системи линеарних једначина

Посматрајмо систем од m линеарних једначина са n непознатих $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \tag{1}$$

Решење овог система је уређена n-торка бројева $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чијом заменом у полазни систем једначине система постају тачне једнакости. Кажемо да је систем:

(1) *сагласан* (решив), ако има бар једно решење;

  (1а) *одређен*, ако има једниствено решење;

  (1б) *неодређен*, ако има бесконачно много решења;

(2) *несагласан* (нерешив), ако нема решења.

Ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, систем зовемо *хомогеним* и такав систем увек има (тривијално) решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Гаусов метод елиминације

Гаусов метод елиминације се састоји у примени трансформација које не мењају решење система (преводе га у еквивалентан систем) да би елиминисали једну по једну променљиву из система. Трансформације које не мењају решење система су:

(1) замена места две једначине система;

(2) множење једне једначине система ненула бројем;

(3) множење једне једначине система неким бројем и додавање некој другој једначини система.

Кронекер-Капелијев став

У систему једначина (1) уочимо *матрицу система* A и *проширену матрицу система* $[A|B]$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Означимо са $r(A)$ ранг матрице система, са $r([A|B])$ ранг проширене матрице система и нека је n број непознатих. Критеријум за решивост система линеарних једначина нам даје наредно тврђење.

Тврђење (Кронекер-Капелијев став). Систем линеарних једначина је сагласан ако и само ако је $r(A) = r([A|B])$. Даље, ако је $r(A) = r([A|B]) = n$ систем има јединствено решење, а ако је $r(A) = r([A|B]) = k < n$, $k \in \mathbb{N}$, систем има бесконачно много решења ($n - k$ променљивих узима произвољне вредности, а остале променљиве се изражавају преко њих).

Крамерово правило

Квадратне системе (код којих је број једначина једнак броју непознатих) можемо решати помоћу Крамеровог правила. Дакле, нека је дат систем једначина облика (1) при чему је $m = n$. Треба израчунати *детерминанту система*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и *детерминанте промењљивих*

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Разликујемо три случаја.

(1) Ако је $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$.

(2) Ако је $\Delta = 0$ и бар једна од детерминанти $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ није нула, систем нема решења.

(3) Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$, систем или има бесконачно много решења или нема решења (помоћу Крамеровог правила не можемо добити прецизнији одговор). Тада систем решавамо Гаусовим методом елиминације.

Решавање система једначина матричном методом

Квадратни систем линеарних једначина можемо записати у облику матричне једначине $AX = B$, где је A матрица система, $X = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^T$ колона непознатих и $B = [b_1\, b_2\, \ldots\, b_n]^T$ колона слободних чланова. Тада је у случају да је $\det A \neq 0$ решење система једначина $X = A^{-1}B$.

Задаци

1. Решити систем једначина $\begin{aligned} x-y+2z&=8\\ -2x+y+z&=-5\\ 4x-y-3z&=7\end{aligned}$

   (а) Гаусовим методом, (б) матричном методом.

   Решење. (а) Трансформације система ћемо пратити на проширеној матрици система (трансформације су само над врстама да се не би променило решење система). Означимо i-ту врсту матрице са V_i, замену места i-те и j-те врсте са $V_i{\leftrightarrow}V_j$, множење са k i-те врсте са kV_i и операцију додавања j-те врсте помножене са k i-тој врсти са $V_i{+}kV_j$. Рачунамо

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8\\ -2 & 1 & 1 & -5\\ 4 & -1 & -3 & 7\end{array}\right] \overset{\substack{V_2+2V_1\\ V_3-4V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8\\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11\\ 0 & 3 & -11 & -25\end{array}\right] \overset{V_3+3V_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8\\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11\\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8\end{array}\right].$$

   Из треће једначине добијамо да је $z=2$. Ако то уврстимо у другу једначину добијамо $-y+5\cdot 2=-11$, одакле је $y=-1$. Коначно, када добијене вредности за z и y уврстимо у прву једначину добијамо $x-(-1)+2\cdot 2=8$, одакле је $x=3$. Дакле, решење система је $(x,y,z)=(3,-1,2)$.

   (б) Напишимо полазни систем у облику матричне једначине $AX=B$. Тада је

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & -3\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{bmatrix} 8\\ -5\\ 7\end{bmatrix}.$$

   Инверзна матрица матрице A је $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3\\ 2 & 11 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, па је $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$.

2. Решити систем једначина $\begin{aligned} -x+y-az+u&=0\\ x-y+z-au&=0\\ 2x+y+z&=1\end{aligned}$.

   Решење. Ако прву једначину додамо другој, а затим прву једначину помножимо са два и додамо трећој једначини, добијамо (еквивалентан) систем

$$\begin{aligned} \boxed{-x}+y-az+u&=0\\ \boxed{(1-a)z}+(1-a)u&=0\\ \boxed{3y}+(1-2a)z+2u&=1\end{aligned}\ .$$

   (1) Ако је $a\neq 1$, променљиве x, y и z су везане, а променљива u је слободна, па је $u=t, t\in\mathbb{R}$. Из друге једначине изражавамо z, из треће y, а из прве x и добијамо решење $(x,y,z,u)=\left(\frac{1}{3}+\frac{t}{3}(a+2), \frac{1}{3}-\frac{t}{3}(2a+1), -t, t\right),\ t\in\mathbb{R}$.

   (2) Ако је $a=1$, променљиве x и y су везане, а променљиве z и u су слободне. Узимамо да је $z=t, u=s,\ t,s\in\mathbb{R}$ и налазимо решење $(x,y,z,u)=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}s, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}s, t, s\right),\ t,s,\in\mathbb{R}$.

3. У зависности од параметара a и b решити систем једначина $\begin{aligned} 2x-y+3z&=2\\ x+2y+z&=-1\\ 4x+3y+az&=0\\ x-3y+bz&=a-2\end{aligned}$.

Решење. Систем решавамо Гаусовим методом елиминације:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & a & 0 \\ 1 & -3 & b & a-2 \end{array}\right] \overset{V_2 \leftrightarrow V_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & a & 0 \\ 1 & -3 & b & a-2 \end{array}\right] \overset{\substack{V_2-2V_1\\ V_3-3V_1\\ V_4-V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 1 & 4 \\ 0 & -5 & a-4 & 4 \\ 0 & -5 & b-1 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{V_3-V_2\\ V_4-V_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & a-5 \end{array}\right]$$

(1) За $a \neq 5$ настављамо процес елиминације тако што множимо трећу једначину са $\frac{2-b}{a-5}$ и додајемо је четвртој једначини. Тада се систем своди на степенасти систем

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x} + 2y + z & = & -1 \\ \boxed{-5y} + z & = & 4 \\ \boxed{(a-5)z} & = & 0 \\ 0 & = & a-5 \end{array}.$$

Последња једначина система је у контрадикцији са претпоставком $a \neq 5$, па у овом случају систем нема решења.

(2) За $a = 5$ систем је еквивалентан систему

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x} + 2y + z & = & -1 \\ \boxed{-5y} + z & = & 4 \\ \boxed{(b-2)z} & = & 0 \end{array}.$$

Даље разликујемо два подслучаја.

(2а) Ако је $b \neq 2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

(2б) Ако је $b = 2$ променљива z је слободна: $z = t, t \in \mathbb{R}$, а остале променљиве се изражавају преко ње. Решење је $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t, t\right),\ t \in \mathbb{R}$.

4. Решити систем једначина $\begin{array}{rcr} x + ay + z & = & -2 \\ ax + y + z & = & 1 \\ x - 4y - z & = & 8 \end{array}$.

Решење. Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Нађимо потребне детерминанте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2), \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 9(a-2),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 6(a-2), \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -(a-2)(8a+7).$$

(1) Ако је $a \neq 1$ и $a \neq 2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{9}{a-1}, \frac{6}{a-1}, \frac{8a+7}{1-a}\right)$.

(2) Ако је $a = 1$ систем нема решења.

(3) Ако је $a = 2$ систем решавамо Гаусовим методом елиминације:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 8 \end{array}\right] \overset{\substack{V_2-2V_1\\ V_3-V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & -6 & 2 & 10 \end{array}\right] \overset{V_3-2V_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Решење система је $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t),\ t \in \mathbb{R}$.

5. Решити систем једначина $\begin{aligned} x + ay + \ z &= -2 \\ ax + \ \ y + \ z &= \ \ 1 \\ x - 4y - \ z &= \ \ 8 \\ 7x + 8y + 5z &= -2a \end{aligned}$.

Решење. У претходном задатку смо нашли решење система који чине прве три једначине овог система и преостаје да видимо да ли то решење задовољава четврту једначину система.

За $a \neq 1$ и $a \neq 2$ систем коју чине прве три једначине полазног система има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{9}{a-1}, \frac{6}{a-1}, \frac{8a+7}{1-a}\right)$. Када то решње уврстимо у четврту једначину добијамо $7 \cdot \frac{9}{a-1} + 8 \cdot \frac{6}{a-1} + 5 \cdot \frac{8a+7}{1-a} = -2a$, тј. $a^2 - 21a + 38 = 0$, одакле је $a = 19$ (претпоставили смо да је $a \neq 2$).

Дакле, за $a = 19$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{53}{6}\right)$.

Нека је $a = 2$. Када решење прве три једначине $(x, y, z) = (3+t, t, -5-3t)$, $t \in \mathbb{R}$ уврстимо у четврту једначину добијамо $7(3+t) + 8t + 5(-5-3t) = -4$, тј. $0 = 0$, па систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

За $a = 1$ систем који чине прве три једначине датог система нема решења, па и цео систем нема решења. Дакле, за $a \neq 2$ и $a \neq 19$ систем нема решења.

6. Испитати сагласност система једначина $\begin{aligned} x - \qquad 2y - \ z &= \ \ 3 \\ 2x - \qquad \ y + \ z &= -a \\ 3x + (a-1)y + 3z &= \ \ 1 \\ ax + \qquad \ y + 2z &= \ \ 2 \end{aligned}$.

Решење. Можемо користити Кронекер-Капелијев став, па нађимо ранг матрице система A и проширене матрице система $[A|B]$. Како рачунамо само ранг, можемо вршити и трансформације над колонама. Означимо i-ту колону матрице са K_i, а i-ту врсту и трансформације матрице као у претходним примерима. Рачунамо

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -a \\ 3 & a-1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{K_3 \leftrightarrow K_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -a \\ 3 & a-1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & a & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{V_2+V_1 \\ V_3+3V_1 \\ V_4+2V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 3-a \\ 0 & a-7 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & a+2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{V_3+\frac{a-7}{3}V_2 \\ V_4-V_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a-1 & \frac{1}{3}(-a^2+10a+9) \\ 0 & 0 & a-1 & a+5 \end{array}\right] \underset{V_4 \leftrightarrow V_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a+5 \\ 0 & 0 & a-1 & \frac{1}{3}(-a^2+10a+9) \end{array}\right].$$

За $a = 1$ је $r(A) = 2$ и $r([A|B]) = 3$, па систем нема решења.

За $a \neq 1$ настављамо поступак свођења матрице на квази-троугаону одузимањем треће врсте од четврте и добијамо матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}(a-1)(a-6) \end{array}\right].$$

Овде је $r(A) = 3$, а $r([A|B])$ је 3 за $a = 6$ и систем тада има јединствено решење, односно 4 за $a \neq 6$ и систем тада нема решења.

7. Решити систем једначина $\begin{aligned} 2x-(a-1)y+2z&=1\\ x-\qquad\quad y-az&=2\\ x+\qquad 3y+\ z&=a.\end{aligned}$

Решење. Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Рачунамо детерминанте

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-a+1&2\\1&-1&-a\\1&3&1\end{vmatrix}=a^2+6a+5=(a+1)(a+5),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-a+1&2\\2&-1&-a\\a&3&1\end{vmatrix}=a^3-a^2+7a+9=(a+1)(a^2-2a+9),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&2&-a\\1&a&1\end{vmatrix}=2a^2+a+1=(a+1)(2a-1),$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&-a+1&1\\1&-1&2\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2-5a-6=(a+1)(a-6).$$

(1) Ако је $\Delta\neq 0$, тј. ако је $a\neq -1$ и $a\neq -5$ систем има јединствено решење $(x,y,z)=\left(\frac{a^2-2a+9}{a+5},\frac{2a-1}{a+5},\frac{a-6}{a+5}\right)$.

(2) Ако је $a=-5$ систем нема решења.

(3) Ако је $a=-1$ систем решавамо Гаусовим методом елиминације

$$\left[\begin{array}{rrr|r}2&2&2&1\\1&-1&1&2\\1&3&1&1\end{array}\right]\overset{V_2\leftrightarrow V_1}{\sim}\left[\begin{array}{rrr|r}\boxed{1}&-1&1&2\\2&2&2&1\\1&3&1&1\end{array}\right]\overset{\substack{V_2-2V_1\\V_3-V_1}}{\sim}\left[\begin{array}{rrr|r}\boxed{1}&-1&1&2\\0&\boxed{4}&0&-3\\0&4&0&-3\end{array}\right]\overset{V_3-V_2}{\sim}\left[\begin{array}{rrr|r}\boxed{1}&-1&1&2\\0&\boxed{4}&0&-3\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Можемо узети да је променљива z слободна: $z=t, t\in\mathbb{R}$. Из друге једначине је $y=-\frac{3}{4}$, а из прве $x=\frac{5}{4}-t$. Дакле, систем је (једноструко) неодређен и његово решење је $(x,y,z)=\left(\frac{5}{4}-t,-\frac{3}{4},t\right), t\in\mathbb{R}$.