Veze

Materijalni sistem (tačka, telo) može biti slobodan i neslobodan. Slobodan materijalni sistem je onaj koji može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru i da ima proizvoljnu brzinu, nezavisno od sila koje deluju na njega. Neslobodan materijalni sistem je onaj čije je kretanje ograničeno postojanjem uslova koji se nazivaju veze.
Između tačke (tela) i veze koja deluje na nju dolazi do međusobnog dejstva. Mehanička mera tog dejstva je sila, a sila kojom tačka (telo) deluje na vezu naziva se pritisak na vezu. Sila kojom veza deluje na tačku (telo) naziva se reakcija veze. Neslobodna tačka (telo) izložena je pri svom kretanju dejstvu aktivnih sila i reakcija veza. Pridodajući reakcije veza aktivnim silama, osnovni zakon dinamike neslobodne tačke zadržava isti oblik kao i u slučaju slobodne tačke. Iz toga proizilazi da se pri analizi kretanja neslobodne tačke može koristiti princip oslobađanja od veza formulisan u obliku: Kretanje neslobodne tačke može se posmatrati kao kretanje slobodne tačke ako se veze uklone a dejstvo veza na tačku zameni reakcijama veza.
Veze su uslovi koji ograničavaju pomeranje tačaka, odnosno tela materijalnog sistema.
Postoji više podela veza. Po jednoj od njih veze se dele na
- *geometrijske (konačne, holonomne)*,
- *kinematičke (diferencijalne, neholonomne)*.

Veze su geometrijske ako ograničavaju samo koordinate neslobodnog sistema. Veze su kinematičke ako osim koordinata ograničavaju i kinematičke karakteristike sistema. U opštem slučaju, ovakve veze u odnosu na Dekartov koordinatni sisem *Oxyz* mogu se izraziti u obliku $f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$. Prethodna relacija, u opštem slučaju, nije integrabilna zbog čega se ove veze nazivaju i neintegrabilne ili neholonomne.
Veze se mogu podeliti i na:
- *stacionarne (skleronomne),*
- *nestacionarne (reonomne)*.

Veza je stacionarna ako je nepromenljiva u toku vremena, tj. ako analitički oblik te veze ne zavisi eksplicitno od vremena *t*. Ako analitički izrazi za veze zavise eksplicitno od vremena, takve veze nazivaju se nestacionarne. Nestacionarne holonomne veze mogu se izraziti, u odnosu na Dekartov koordinatni sisem *Oxyz*, u obliku $f(x,y,z,t)=0$.
Veze se još mogu podeliti i na:
- *zadržavajuće (dvostrane, bilateralne)*,
- *nezadržavajuće (jednostrane, unilateralne)*.

Zadržavajuće veze su one veze koje primoravaju tačku (telo) da se sve vreme kretanja nalazi na nekoj površi ili liniji. Ovakve veze izražavaju se jednakostima. Nezadržavajuće veze su one veze koje tačka (telo) može da napusti u toku kretanja i da nastavi da se kreće slobodno u ograničenom delu prostora. Ovakve veze izražavaju se nejednakostima.
Veze se mogu podeliti na još jedan način, tj. na
idealne (glatke),
realne (hrapave).
Veza je idealna ako je njena reakcija upravna na pravac beskonačno malog, vezom dopuštenog pomeranja u posmatranom trenutku. Veza je realna ako njena reakcija veze $\vec{R}$ osim komponente $\vec{N}$ u pravcu normale ima i komponentu $\vec{F}_T$ u pravcu jediničnog vektora tangente na putanju, tj. $\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_T$. Pri tome je $\vec{N}=N_n\vec{n}$, gde je

N_n – projekcija normalne komponente reakcije veze na normalnu osu, a $\vec{F}_T$ - sila trenja.

Ako se za sve vreme kretanja tačke (tela) po vezi, rekcija veze jednaka nuli ($\vec{R} = 0$) kaže se da su takve veze neaktivne, trivijalne. Pri kretanju tačke (tela) po vezi podrazumeva se da početni geometrijski i kinematički uslovi kretanja ne mogu biti izabrani proizvoljno, već moraju biti saglasni sa jednačinama veza.

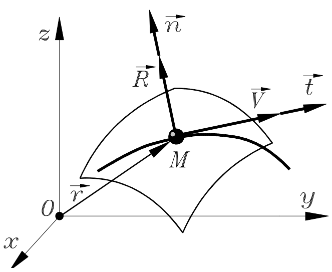
Lagranžove jednačine prve vrste

Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj površi

Posmatra se kretanje tačke *M*, mase *m*, pod dejsvom aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}^a$, po zadatoj idealnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi čija je jednačina u odnosu na Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*

$$f(x,y,z) = 0 .$$

Koristeći princip osobađanja od veza, dejstvo veze može se zameniti silom $\vec{R}$ koja, s obzirom na to da je veza idealna, ima pravac normale na površ, tj. $\vec{R} = \vec{N}$. Imajući na umu da je gradijent funkcije $f(x,y,z)$ vektor koji ima pravac i smer spoljašnje normale $\vec{n}$ na površ, tj.



$$grad\ f = |grad\ f|\ \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} ,$$

reakcija $\vec{R}$ idealne veze može da se izrazi u obliku

$$\vec{R} = \vec{N} = \lambda\ grad\ f .$$

Pri tome je sa λ označen Lagranžov množitelj veze, koji u opštem slučaju nije konstantna veličina.

Osnovna jednačina dinamike posmatrane tačke, koja se kreće po površi, glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^a + \lambda\ grad\ f ,$$

pri čemu je

$$\vec{N} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} .$$

Za izabrani Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke u obliku

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad m\ddot{y} = Y^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\ddot{z} = Z^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

gde su X^a, Y^a i Z^a projekcije rezultante $\vec{F}^a$ svih aktivnih sila na odgovarajuće ose izabranog koordinatnog sistema. Ove diferencijalne jednačine nazivaju se Lagranžove jednačine I vrste. Ovaj sistem od tri jednačine, zajedno sa algebarskom jednačinom veze, obrazuje sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate *x, y, z* i λ.

Pri rešavanju ovog sistema jednačina najpre se može odrediti nepoznati množitelj λ. Da bi se to uradilo, odredi se drugi izvod po vremenu jednačine veze, pa se u tako dobijenoj relaciji iskoriste izvodi $\ddot{x}, \ddot{y}$ i $\ddot{z}$. Iz tako dobijene relacije može se odrediti množitelj λ. Za određivanje konačnih jednačina kretanja potrebno je već određeni množitelj iskoristiti, vodeći računa o tome da je u početnom trenutku tačka na površi i da je njena početna brzina tangenta na površ.

Koristeći određeni množitelj λ, intenzitet nepoznate reakcije veze $\vec{N}$ dobija se kao

$$N = \left|\lambda \; grad \; f\right|,$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \, .$$

Prethodno opisani postupak za određivanje Lagranžovog množitelja veze λ može se prikazati i na sledeći način. U tom cilju koristi se uslov da je brzina tačke upravna na reakciju veze, odnosno

$$\vec{V} \cdot grad \; f = 0 \, .$$

Diferenciranjem po vremenu ovog uslova dobija se uslov za ubrzanje tačke, tj.

$$\vec{a} \cdot grad \; f + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt}(grad \; f \,) = 0 \, .$$

Skalarnim množenjem leve i desne strane osnovne jednačine dinamike neslobodne tačke sa $grad \; f$ i koristeći tako dobijenu relaciju, sledi da je množitelj veze

$$\lambda = - \frac{1}{grad^2 f} \left[\vec{F}^a \cdot grad \; f + m\vec{V} \cdot \frac{d}{dt}(grad \; f \,) \right].$$

Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj površi

Neka se posmatra kretanje tačke *M*, mase *m*, po zadatoj realnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi. Tačka se kreće pod dejsvom aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}^a$. Na tačku deluje i reakcija veze $\vec{R}$ koja, s obzirom da je veza realna, ima dve komponente $\vec{N}$ i $\vec{F}_T$. Normalna komponenta $\vec{N}$ ima pravac normale na površ i određena je sa

$$\vec{N} = \lambda \; grad \; f \, .$$

Ako otpor kretanju tačke po površi potiče od suvog trenja, na osnovu Kulonovog zakona, sledi da se intenzitet sile $\vec{F}_T$ može pisati u obliku

$$F_T = \mu \, N \, ,$$

gde je μ - koeficijent trenja klizanja pri kretanju. Vodeći računa o tome da je sila trenja $\vec{F}_T$ kolinearna sa vektorom brzine $\vec{V}$ tačke, pri čemu su im smerovi suprotni, važi

$$\vec{F}_T = -F_T \frac{\vec{V}}{V} = -\mu \, N \frac{\vec{V}}{V} \, .$$

Tada, na osnovu jednačine kretanja neslobodne tačke, vektorska diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^a + \lambda \; grad \; f - \mu \, N \frac{\vec{V}}{V} \, .$$

Projektovanjem leve i desne strane ove diferencijalne jednačine kretanja, na ose izabranog Dekartovog koordinatnog sistema *Oxyz*, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane neslobodne tačke u obliku

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \left|\lambda \, grad \; f\right| \frac{\dot{x}}{V}, \quad m\ddot{y} = Y^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \left|\lambda \, grad \; f\right| \frac{\dot{y}}{V},$$

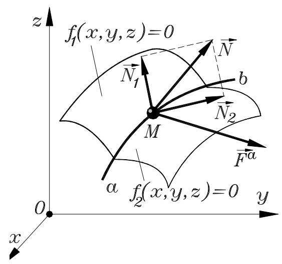
$$m\ddot{z} = Z^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \mu \left|\lambda \, grad \; f\right| \frac{\dot{z}}{V}.$$

Kako je koeficijent trenja klizanja μ poznat, tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke, zajedno sa jednačinom veze, predstavljaju sistem jednačina sa četiri nepoznate veličine x, y, z i λ.

Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj

Neka se tačka *M*, mase *m*, kreće po zadatoj, idealnoj, nepokretnoj krivoj *ab*, koja je određena presekom površi

$$f_1(x,y,z)=0\,,\qquad f_2(x,y,z)=0\,.$$



Na tačku deluju aktivne sile čija je rezultanta $\vec{F}^a$ i reakcija veze $\vec{R}$, čije su komponente $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_2$ pravca normala na odgovarajuće površi, i stoga pripada ravni normalnoj na putanju *ab*, tj.

$$\vec{R}=\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2\,.$$

Kako važi

$$\vec{N}_1=\lambda_1\,grad\,f_1\,,\qquad \vec{N}_2=\lambda_2\,grad\,f_2\,,$$

gde su λ_1 i λ_2 Lagranžovi množitelji veza, tada je

$$\vec{R}=\lambda_1\,grad\,f_1+\lambda_2\,grad\,f_2\,,$$

Polazeći od osnovne jednačine kretanja neslobodne tačke, vektorska diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke dobija oblik

$$m\vec{a}=\vec{F}^a+\lambda_1\,grad\,f_1+\lambda_2\,grad\,f_2\,.$$

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine, na ose nepokretnog, Dekartovog koordinatnog sistema *Oxyz*, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke u obliku

$$m\ddot{x}=X^a+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\quad m\ddot{y}=Y^a+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad m\ddot{z}=Z^a+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

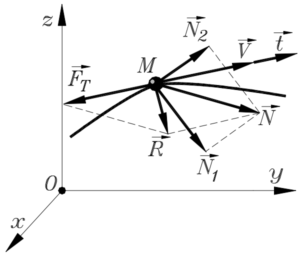
Ove tri Lagranžove jednačine prve vrste, zajedno sa jednačinama veza, predstavljaju sistem od pet jednačina sa pet nepoznatih x, y, z, λ_1 i λ_2.

Analogno određivanju množitelja veze u slučaju kretanja tačke po idealnoj stacionarnoj površi, mogu se i u ovom slučaju odrediti množitelji λ_1 i λ_2. Sa određenim Lagranžovim množiteljima veza λ_1 i λ_2, moguće je odrediti intenzitete komponenti reakcije veze, N_1 i N_2, u obliku

$$N_i=\left|\lambda_i\,grad\,f_i\right|,\quad i=(1{,}2),\quad N_i=\left|\lambda_i\right|\sqrt{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)^2}\,.\quad i=(1{,}2)$$

Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj

Neka se posmatra kretanje tačke *M*, mase *m*, koja se kreće pod dejstvom aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}^a$ po zadatoj, realnoj, nepokretnoj krivoj definisanoj presekom površi $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$.



Na tačku deluje i reakcija veze $\vec{R}$ koja ima dve komponente: normalnu komponentu $\vec{N}$, koja pripada ravni normalnoj na putanju i komponentu $\vec{F}_T$ koja predstavlja silu trenja klizanja. Tada važi

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_T .$$

Za normalnu komponentu $\vec{N}$ važi

$$\vec{N} = \lambda_1 grad\, f_1 + \lambda_2 grad\, f_2 ,$$

a intenzitet sile trenja klizanja $\vec{F}_T$, saglasno Kulonovim zakonima trenja, određen je kao

$$F_T = \mu N .$$

Vodeći računa da je vektor $\vec{F}_T$ usmeren suprotno od vektora brzine $\vec{V}$ tačke, važi

$$\vec{F}_T = -\mu N \frac{\vec{V}}{V} .$$

Tada, polazeći od osnovne jednačine kretanja neslobodne tačke, dobija se diferencijalna jednačina kretanja tačke po zadatoj nepokretnoj hrapavoj krivoj u obliku

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \lambda_1\ grad\, f_1 + \lambda_2\ grad\, f_2 - \mu\, N \frac{\vec{V}}{V} .$$

Iz ove jednačine mogu se dobiti skalarne diferencijalne jednačine kretanja tačke u odnosu na Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, tj.

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \mu \left|\lambda_1\ grad\, f_1 + \lambda_2\ grad\, f_2\right| \frac{\dot{x}}{V},$$

$$m\ddot{y} = Y^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \mu \left|\lambda_1\ grad\, f_1 + \lambda_2\ grad\, f_2\right| \frac{\dot{y}}{V},$$

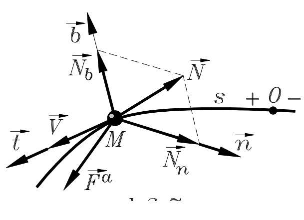
$$m\ddot{z} = Z^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \mu \left|\lambda_1\ grad\, f_1 + \lambda_2\ grad\, f_2\right| \frac{\dot{z}}{V}.$$

Ako je poznat koeficijenat trenja klizanja μ, tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke, zajedno sa jednačinama veza, predstavljaju sistem od pet jednačina sa pet nepoznatih veličina x, y, z, λ_1 i λ_2.

Ojlerove jednačine kretanja neslobodne tačke

Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj

Pri kretanju tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj, reakcija veze $\vec{R}$ nalazi se u normalnoj ravni, pa se u opštem slučaju može razložiti na komponentu $\vec{N}_n$ u pravcu normale i komponentu $\vec{N}_b$ u pravcu binormale, tj.



$$\vec{R} = \vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_b .$$

Osnovna diferencijalna jednačina kretanja neslobodne tačke je

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N}_n + \vec{N}_b .$$

Projektovanjem leve i desne strane prethodne jednačine, na ose prirodnog trijedra, u tački krive koja predstavlja trajektoriju tačke, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke

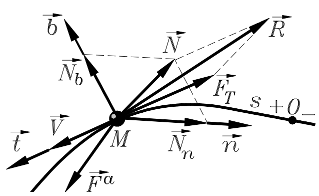
$$m\ddot{s} = F_t^a(s,\dot{s},t), \qquad m\frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_n^a(s,\dot{s},t) + N_n, \qquad 0 = F_b^a(s,\dot{s},t) + N_b,$$

gde su F_t^a, F_n^a i F_b^a - projekcije rezultante aktivnih sila koje deluju na tačku na ose tangente, glavne normale i binormale, s – lučna koordinata, a R_K - poluprečnik krivine krive u datoj tački.
Ove jednačine nazivaju se Ojlerove jednačine kretanja neslobodne tačke ili diferencijalne jednačine kretanja tačke po zadatoj krivoj u prirodnom obliku. Iz ove tri jednačine mogu se odrediti tri nepoznate veličine s, N_n i N_b. Intenzitet reakcije takve idealne veze određen je sa

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}\,.$$

Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj

Kada se tačka M kreće po realnoj krivoj, reakcija veze $\vec{R}$ može se razložiti na tri komponente: dve komponente u normalnoj ravni - $\vec{N}_n$ u pravcu glavne normale i $\vec{N}_b$ u pravcu binormale, i komponentu $\vec{F}_T$ u pravcu tangente, tj.



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_T = \vec{N}_n + \vec{N}_b + \vec{F}_T\,,$$

odnosno

$$\vec{R} = N_n\,\vec{n} + N_b\,\vec{b} - F_T\frac{\vec{V}}{V}\,.$$

Pri tome je intenzitet sile trenja klizanja $\vec{F}_T$ određen kao

$$F_T = \mu\,N = \mu\sqrt{N_n^2 + N_b^2}\,.$$

Sada je

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N}_n + \vec{N}_b + \vec{F}_T\,.$$

Projektovanjem leve i desne strane prethodne jednačine, na ose prirodnog trijedra, koristeći činjenicu da je $\vec{V} = \dot{s}\,\vec{t}$, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke

$$m\ddot{s} = F_t^a - \mu\sqrt{N_n^2 + N_b^2}\,\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}, \quad m\frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_n^a + N_n, \qquad 0 = F_b^a + N_b.$$

Ove tri jednačine predstavljaju sistem jednačina odakle je moguće odrediti tri nepoznate: $s = s(t)$ - zakon kretanja tačke po zadatoj putanji i projekcije reakcije veze N_n i N_b.