

DINAMIKA

Dinamika je deo teorijske mehanike koji proučava mehanička kretanja materijalnih objekata uspostavljajući vezu između kretanja i uzroka koji izazivaju to kretanje.

Najjednostavniji model realnog tela jeste materijalna tačka. Materijalno telo čije se dimenzije pri proučavanju kretanja mogu zanemariti, odnosno geometrijska tačka kojoj se pripisuje celokupna masa tela koje zastupa, naziva se materijalna tačka. Međutim, materijalnom tačkom se ne smatraju uvek tela malih dimenzija. Materijalnom tačkom mogu se smatrati i tela proizvoljne veličine, pod sledećim uslovima:

- ako se kreću translatorno,
- ako se kreću translatorno, a istovremeno se i obrću, tako da se obrtno kretanje može zanemariti u odnosu na translatorno,
- ako poseduju dimenzije koje su male u odnosu na rastojanja od drugih tela sa kojima sadejstvuju i
- ako poseduju dimenzije koje su male u odnosu na dimenzije drugih tela sa kojima sadejstvuju.

Materijalna tačka koja može da zauzme bilo koji položaj u prostoru i može da ima bilo koju brzinu naziva se slobodna materijalna tačka. Deo dinamike koji se bavi proučavanjem kretanja materijalne tačke naziva se dinamika materijalne tačke.

Materijalni sistem je skup proizvoljnog broja materijalnih tačaka u kome postoji uzajamna zavisnost između položaja i kretanja bilo koje tačke i svih ostalih tačaka koje čine sistem. Sistem materijalnih tačaka može biti neizmenljiv i izmenljiv. Neizmenljiv sistem materijalnih tačaka je onaj kod koga se pod dejstvom sila ne menjaju rastojanja između bilo koje dve materijalne tačke, koje čine sistem. Izmenljiv sistem materijalnih tačaka je onaj kod koga je moguće međusobno kretanje tačaka sistema jednih u odnosu na druge. Postoji i podela sistema materijalnih tačaka na diskretne i neprekidne. Za materijalni sistem se kaže da je diskretan ako su rastojanja između svih njegovih tačaka konačna.

Materijalno telo je neprekidna sredina konačnih dimenzija. Materijalno telo kod koga se rastojanje između bilo koje dve njegove tačke ne menja u toku vremena (ne deformiše se), pri dejstvu drugih tela, naziva se kruto telo.

Deo dinamike koji se bavi proučavanjem kretanja materijalnog sistema i krutog tela često se izučava kao zaseban deo mehanike i naziva se dinamika materijalnog sistema i krutog tela.

Osnovni zakoni dinamike

Prvi Njutnov zakon (Zakon inercije) glasi:

Izolovana materijalna tačka nalazi se u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja.

Za materijalnu tačku se kaže da je izolovana ako je slobodna i ako na nju ne deluju drugi mehanički objekti ili je dejstvo tih objekata na materijalnu tačku ekvivalentno nuli. Tendencija takve tačke je da zadrži stanje u kome se nalazi. Ova osobina tačke naziva se inertnost, a prvi Njutnov zakon – zakon inercije. Za jednoliko pravolinijsko kretanje tačke kaže se da je to kretanje po inerciji. Treba napomenuti da je u slučaju kretanja tačke po inerciji, njeno ubrzanje jednako nuli.

Koordinatni sistem u kome važi prvi Njutnov zakon (Zakon inercije) naziva se inercijalni koordinatni sistem. Ako je koordinatni sistem asolutno nepokretan ili se kreće translatorno, jednoliko i pravolinijski on je takođe inercijalni. Približno takav je heliocentrični koordinatni sistem čiji je centar u Suncu, a ose u pravcima nepokretnih zvezda. Koordinatni sistemi koji miruju, ili se kreću translatorno, jednoliko i pravolinijski u odnosu na inercijalni koordinatni sistem, takođe su inercijalni. Tako se i koordinatni sistem vezan za Zemlju može smatrati inercijalnim ako se zanemari dnevno obrtanje i godišnje krivolinijsko kretanje središta Zemlje oko Sunca. U neinercijalnim koordinatnim sistemima ne važe Njutnovi zakoni mehanike. Koristeći definiciju inercijalnih koordinatnih sistema, prvi Njutnov zakon može se formulisati i na sledeći način:

Izolovana materijalna tačka kreće se u inercijalnim koordinatnim sistemima jednoliko i pravolinijski.

Takođe, važi i obrnuto tvrđenje:

Materijalna tačka koja se u inercijalnim koordinatnim sistemima kreće jednoliko i pravolinijski je izolovana.

Drugi Njutnov zakon (Osnovni zakon dinamike)

Neka se posmatra materijalna tačka M na koju deluje sila \vec{F} i koja se u odnosu na inercijalni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ kreće ubrzanjem \vec{a} . Tada se drugi

Njutnov zakon ili osnovni zakon dinamike može izraziti kao

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

pri čemu pozitivan koeficijent proporcionalnosti m govori o materijalnim svojstvima tačke i naziva se masa materijalne tačke. Dakle, drugi Njutnov zakon može se iskazati u obliku:

Ubrzanje materijalne tačke proporcionalno je sili koja deluje na tačku i ima pravac i smer te sile.

Kada je u pitanju sila kojom Zemlja privlači materijalna tela koja se nalaze na njenoj površi, reč je o težini materijalnih tela. Eksperimentalno je utvrđeno da sva tela padaju na Zemlju, sa visine koja je mala u odnosu na poluprečnik Zemlje, pod dejstvom teže istim ubrzanjem koje se naziva ubrzanje Zemljine teže i obeležava se sa \vec{g} . Ubrzanje Zemljine teže zavisi od nadmorske visine i geografske širine, a u našim uslovima može se uzeti da je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Treći Njutnov zakon (Zakon o dejstvu i protivdejstvu) glasi:

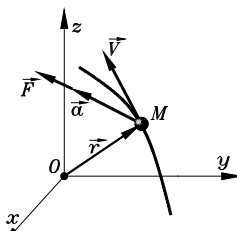
Sile kojima dve tačke deluju jedna na drugu imaju istu napadnu liniju, jednakog su intenziteta, a suprotnih smerova.

Diferencijalne jednačine kretanja i osnovni zadaci dinamike slobodne tačke

Diferencijalne jednačine kretanja slobodne tačke

Posmatra se slobodna tačka M , mase m , čiji je položaj određen vektorom položaja \vec{r} u odnosu na inercijalni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$. Neka je sa \vec{F} označena rezultanta svih sila koje deluju na posmatranu tačku. Diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke, na osnovu osnovnog zakona dinamike, ima oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$



gde je $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ - ubrzanje tačke M . U opštem slučaju kada sila koja deluje na tačku istovremeno zavisi od vremena, njenog položaja u prostoru i njene brzine, diferencijalna jednačina kretanja slobodne tačke ima oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(t, \vec{r}, \vec{V}).$$

Diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama

Ako je za razmatranje problema izabran Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ dobijaju se tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja tačke M u obliku

$$m\ddot{x} = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m\ddot{y} = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m\ddot{z} = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

gde su: x, y, z - koordinate posmatrane tačke; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - projekcije brzina tačke; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ - projekcije ubrzanja tačke, a X, Y i Z su projekcije rezultujuće sile \vec{F} na ose izabranog koordinatnog sistema. Ove jednačine nazivaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama.

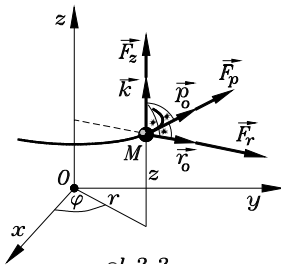
Diferencijalne jednačine kretanja tačke u ravni, u Dekartovim koordinatama su

$$m\ddot{x} = X(t, x, y, 0, \dot{x}, \dot{y}, 0) = X(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}),$$

$$m\ddot{y} = Y(t, x, y, 0, \dot{x}, \dot{y}, 0) = Y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja tačke je

$$m\ddot{x} = X(t, x, 0, 0, \dot{x}, 0, 0) = X(t, x, \dot{x}).$$



Diferencijalne jednačine kretanja tačke u polarno – cilindarskim i polarnim koordinatama

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}),$$

$$ma_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}),$$

$$ma_z = m\ddot{z} = F_z(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}).$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja tačke u polarno – cilindarskim koordinatama. Pri tome su sa F_r, F_φ i F_z označene projekcije rezultante, svih sila koje deluju na tačku, na ose posmatranog koordinatnog sistema.

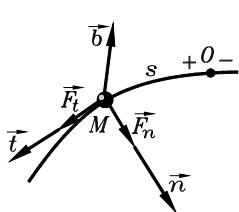
Diferencijalne jednačine kretanja tačke u polarnim koordinatama glase

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}),$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}).$$

Ojlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke

Ako se za razmatranje problema kretanja tačke izabere prirodni trijedar, projektovanjem leve i desne strane jednačine osnovne jednačine dinamike na tangentnu, normalnu i binormalnu osu, koje su određene jediničnim vektorima \vec{t}, \vec{n} i



\vec{b} , respektivno, dobijaju se Ojlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke

$$\begin{aligned}
ma_t &= m\ddot{s} = F_t, & ma_t &= m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t), \\
ma_n &= m \frac{\dot{s}^2}{R_k} = F_n, & ma_n &= m \frac{\dot{s}^2}{R_k} = F_n(s, \dot{s}, t), \\
ma_b &= 0 = F_b, & ma_b &\equiv 0 = F_b(s, \dot{s}, t).
\end{aligned}$$

Pri tome je sa s označena lučna koordinata, F_t , F_n i F_b su projekcije rezultante svih sila koje deluju na tačku na ose prirodnog trijedra, a R_k je poluprečnik krivine trajektorije tačke, u datoj tački.

Osnovni zadaci dinamike tačke

Dinamički problemi kretanja tačke mogu se globalno podeliti u dva osnovna zadatka.

a) *Prvi (direktni) zadatak dinamike tačke* glasi:

Odrediti silu koja deluje na tačku ako je poznato njeno kretanje i njena masa.

Neka je kretanje tačke zadato u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{f}(t)$. Prvi zadatak dinamike tačke svodi se na određivanje drugog izvoda po vremenu poznate vektorske funkcije vremena, tj. $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}(t) = \vec{a}$. Tada, s obzirom da je masa tačke poznata, sledi da je sila koja deluje na tačku određena sa

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}},$$

čime je rešen prvi zadatak dinamike tačke.

b) *Drugi (indirektni) zadatak dinamike tačke* glasi:

Odrediti kretanje tačke ako je poznata masa tačke, njen početni položaj i početna brzina kao i sila koja deluje na tu tačku.

Drugi zadatak dinamike tačke svodi se na integraciju diferencijalnih jednačina kretanja tačke. Polazi se od vektorske diferencijalne jednačine kretanja tačke. Integracijom ove jednačine dobija se njeno opšte rešenje kojim se vektor položaja tačke izražava kao funkcija vremena i dve integracione konstante, \vec{C}_1 i \vec{C}_2 , tj.

$$\vec{r} = \vec{f}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2).$$

Konstante \vec{C}_1 i \vec{C}_2 ukazuju na to da je pod dejstvom datih sila putanja tačke jedna od krivih iz familije krivih. Za određivanje integracionih konstanti \vec{C}_1 i \vec{C}_2 koriste se podaci o položaju tačke i njenoj brzini u trenutku kada počinje da se posmatra njeno kretanje. Ovi podaci nazivaju se početni uslovi kretanja tačke, tj. ovi uslovi određeni su početnim trenutkom t_0 , početnim položajem tačke $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ i njenom početnom brzinom $\vec{V}_0 = \vec{V}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0)$. U cilju određivanja integracionih konstanti, pored početnih uslova kretanja tačke $t = t_0$, $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{V}(t_0) = \vec{V}_0$, i opšteg rešenja, potreban je i prvi izvod po vremenu tog opšteg rešenja, tj. $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{f}}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2)$. Na taj način, mogu odrediti dve vektorske integracione konstante, tj. $\vec{C}_i = \vec{g}_i(t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0)$, ($i=1,2$), gde je $\vec{f}(t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0) \equiv \vec{r}_0$ i $\dot{\vec{f}}(t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0) \equiv \vec{V}_0$. Koristeći ovako određene integracione konstante, u opštem rešenju, dobija se vektorska jednačina kretanja tačke u obliku

$$\vec{r} = \vec{f}_1(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0).$$

Na ovaj način rešen je drugi zadatak dinamike tačke u vektorskom obliku.

Pravolinijsko kretanje tačke

Tačka će se kretati pravolinijski ako su ispunjeni određeni uslovi. Potrebni i dovoljni uslovi da bi se tačka kretala pravolinijski jesu da sila koja deluje na tačku ima konstantan pravac i da je početna brzina tačke jednaka nuli ili ima pravac te sile.

Krivolinijsko kretanje tačke

Kretanje tačke u prostoru, u opštem slučaju, je krivolinijsko. Krivolinijsko kretanje tačke odvijaće se u ravni samo ako su ispunjeni posebni uslovi. Potrebni i dovoljni uslovi da bi tačka kretala krivolinijski u ravni jesu da napadna linija rezultante svih sila koje deluju na tačku sve vreme pripada ravni kretanja tačke i da početna brzina tačke bude jednaka nuli, ili da pripada ravni kretanja tačke.