

# **Термодинамика Б**

## **“Handout” 8 - предавања**

пролећни семестар шк. 2014/2015. године

# ПРОСТИРАЊЕ ТОПЛОТЕ

Наука о Простирању топлоте се развила из ТД као одговор на потребу да се продуби и систематизује знање о загревању, хлађењу и сличним сложенијим процесима.

Према 2. закону ТД (и 1. постулату ТД) и искуству, топлота може да пређе спонтано искључиво са топлијег тела (тела више  $T$ ) на хладније тело (тело ниже  $T$ ). Принудно може и обрнуто = код левокретних циклуса тј. расхладних уређаја и топлотних пумпи.

Преношење топлоте се проучава да бисмо у пракси могли решити проблеме његовог спречавања или појачања. ПРИМЕР: Код топловода тежимо да што више спречимо одавање топлоте између топлане и потрошача топлоте, а са друге стране да што је више могуће интензивирамо предају топлоте од радијатора околној средини.

Познајемо следећа 3 начина (вида) простирања топлоте :

1. провођење ( *conductio* ),      2. прелажење ( *convectio* )      3. зрачење ( *radiatio* )

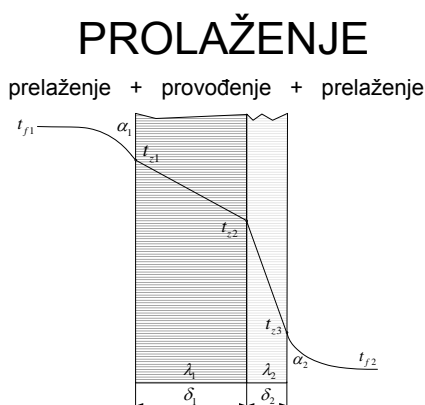
## КРАТАК ОСВРТ НА СВА ТРИ ВИДА ПРОСТИРАЊА ТОПЛОТЕ

### 1 – провођење топлоте – “молекуларно простирање топлоте” – КОНДУКЦИЈА

Кондукција = је простирање топлоте са молекула на молекуле у самом телу, или са једних тела на друга, са њима у додиру. Кондукција, тј. провођење топлоте, доводи, при томе, до промене температуре средине, одн. тела. Овакав, тј. “молекуларни” пренос топлоте остварљив је углавном код чврстих, али и течних и гасовитих тела.



Joseph Fourier  
1768-1830



Jean-Baptiste Biot  
1774-1862

## 2 – прелажење топлоте – “моларно простирање топлоте” – КОНВЕКЦИЈА

Конвекција = је простирање топлоте са тела на флуид (или обрнуто) услед кретања флуида. Њу чине кондукција (са површине тела на први слој флуида као и са сваког слоја на следећи слој флуида) и + адвекција тојест одношење топлоте супстанцијом (флуидом) која струји дуж површине тела. То је очиглед. “моларни” пренос топлоте. Ако не постоји кретање (брзина флуида = 0), нема ни размене топлоте конвекцијом.

## 3 – топлотно зрачење – “простирање топлоте ЕМ таласима” – РАДИЈАЦИЈА

Зрачење (радијација) је простирање топлоте путем електромагнетних (ЕМ) таласа. Овај вид простирања топлоте се веома разликује од прва 2 вида.

### ОСНОВНЕ РАЗЛИКЕ СЕ, У НАЈКРАЋИМ ЦРТАМА, САСТОЈЕ У СЛЕДЕЋЕМ.

1.

Овај вид простирања топлоте није везан за присуство супстанце (неопходан услов код кондукције и конвекције) већ је могуће пренети топлоту зрачењем и кроз вакуум.

**Занимљиво, зрачење је најинтензивније управо кроз вакуум јер није ничим пригушено нити га ишта омета.**

2.

Топлотни проток енергија везаних за супстанцу се преноси – у смеру монотонно опадајуће температуре. **Енергија зрачења се битно разликује од прве 2 јер се топлотни флуks преноси и - кроз средине са вишом, једнаком и нижом температуром него што су температуре двају тела које размењују топлоту.**

**Пример: зрачење Сунца ( $\approx 6000$  K) кроз Свемир ( $\approx 0$  K) на Земљу ( $\approx 300$  K).**

3.

Топлотни проток код провођења и прелажења топлоте се описује законитостима (експерименталног порекла) у којима је пропорционалан разлици температура у тачкама између којих се топлота размењује.

**Међутим, код зрачења, флуks између тела различитих температура је пропорционалан разлици четвртих степена одговарајућих температура.**

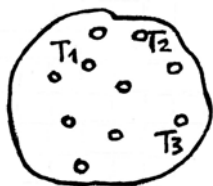
Тела могу бити **хомогена** и нехомогена (**хетерогена**). Код хомогених тела су (скаларна) термофизичка својства супстанције у различитим тачкама тела једнака за једнаке температуре, притиске и саставе. Код хетерогених то није случај.

Са друге стране, векторски, тј према могућности ширења “поремећаја” (силе, напона, флуksа) у разним правцима тела могу бити **изотропна** и **анизотропна**.

Средина у којој се врши размена топлоте може бити једно- и више-фазна.

Изучавање је теоријско и експериментално. Код теоријског приступа - формира се **математички модел** тела и средине у којој се врши процес.

- ако је задат просторни проблем



$$T = T(x, y, z, \tau) \rightarrow \text{Dekartove koordinate}$$

$$T = T(r, \varphi, z, \tau) \rightarrow \text{cilindrične koordinate}$$

$$T = T(r, \varphi, \psi, \tau) \rightarrow \text{sferične koordinate}$$

- у овом курсу се обрађују само стационарни једно-димензиони проблеми

	- <i>prostorni</i>	$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$	$T = T(x, y, z)$
- стационаран:	- <i>ravanski</i>	$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$	$T = T(x, y)$
	- <i>linijski</i>	$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$	$T = T(x)$

→ потребан услов простирања топлоте (провођења, прелажења) је постојање разлике температуре (градијент  $T$  = вектор управан на изотермне површи)

$$\text{grad } T - \text{je} - \text{vektor} \quad \text{grad } T = \left( \vec{n}_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \nabla T \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{k} \left[ \frac{K}{m} \right] -$$

у смеру простирања топлоте, управан на изотерму

-  $Q [J]$  - **количина топлоте**

Количина топлоте пренета у јединици времена зове се **топлотни проток (флукс)**

$$\frac{\delta Q}{d\tau} = \dot{Q} \left[ \frac{J}{s} = W \right]; \quad \frac{\delta Q}{d\tau} = 0 \rightarrow Q = \text{idem}$$

- **површински топлотни проток (флукс)** ...  $\dot{q}_A$

Топлота пренета у јединици времена по јединици површине назива се површинским топлотним протоком (флуксом). По својој природи он је векторска величина.

$$\dot{q}_A = \frac{\dot{Q}}{A} \left[ \frac{W}{m^2} \right]; \quad A - \text{површина површи преко које се предаје топлота} [m^2]$$

Код цилиндричне геометрије користи се топлота пренета у јединици времена али по јединици дужине (цеви) с обзиром да се површина у радијалном правцу повећава.

- **линијски топлотни проток (флукс)  $\dot{q}_l$**

$$\dot{q}_l = \frac{\dot{Q}}{l} \left[ \frac{W}{m} \right]$$

## ПРОВОЂЕЊЕ ТОПЛОТЕ

На основу закона ТД који су били познати на преласку 18. у 19. век није било могуће одредити интензитет провођења топлоте. Зато је француски научник Жозеф Фурије (а слична разматрања је саопштио и Ж.Б. Био) изнео хипотезу о провођењу топлоте.

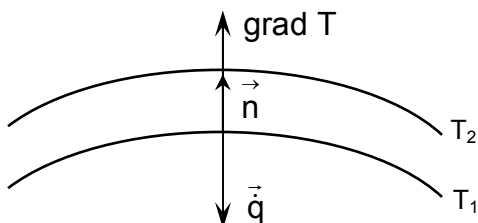
⇒ **ФУРИЈЕОВА ХИПОТЕЗА** → феноменолошки закон (искуствено)

$$\rightarrow \vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T$$

Коефицијент пропорционалности “ $\lambda$ ” – карактеристика материјала (радног тела). Он карактерише способност материјала да проводи топлоту – топлотна проводљивост.

Знак «-» стоји јер је позитиван градијент од ниже ка вишој температури, а топлота се преноси обрнуто градијенту температуре (други принцип термодинамике).

$\lambda$  - топлотна проводљивост – функција физичких особина материјала и температуре  
- одређује се експериментално

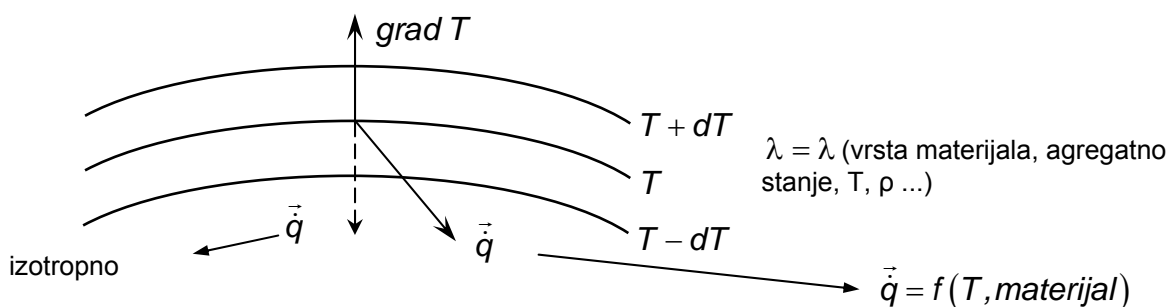


$T_2 > T_1 \rightarrow$  важи за хомогена изотропна тела

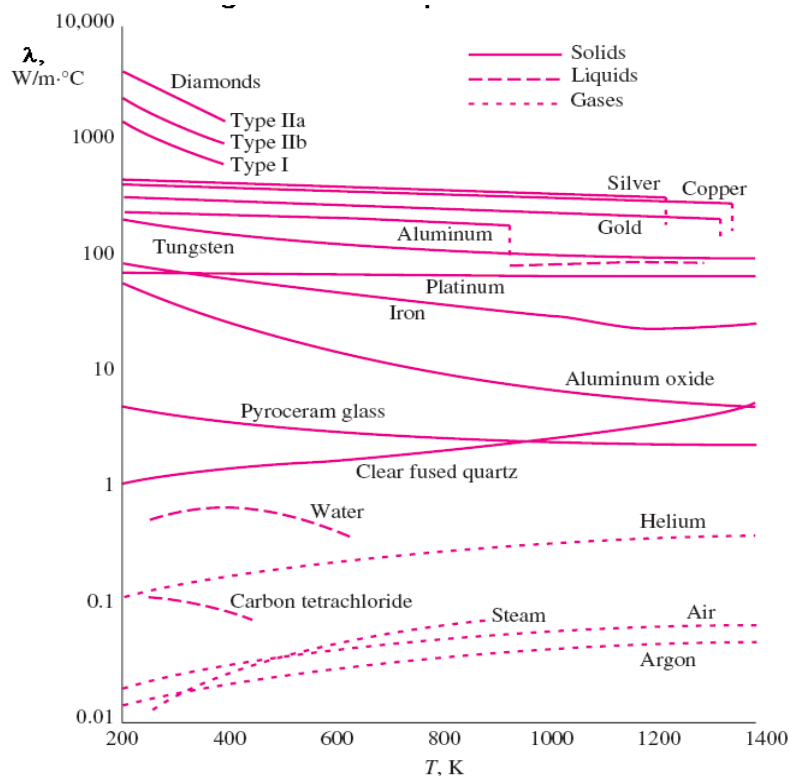
- за материјале попут дрвета (анизотропне) → одређивање  $\lambda \Rightarrow$  сложено

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T \text{ али } \lambda \equiv \text{тензор}$$

- ако је тело анизотропно



Максимална вредност топлотне проводљивости, до сада измерена, је  $\lambda = 12200 \text{ W/mK}$  за кристал бакра на  $T = 20,8 \text{ K}$ , а минимална је за паре хлороформа,  $\lambda = 0,0066 \text{ W/mK}$ .



## ТОПЛОТНА ПРОВОДЉИВОСТ ЧВРСТИХ ТЕЛА

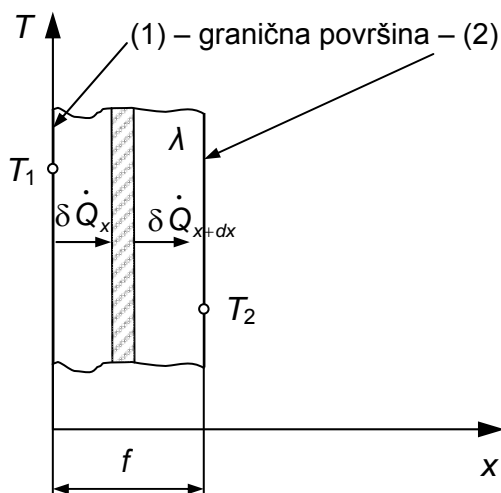
Провођење топлоте врши се истовремено померањем у облику еластичних таласа (**фононима**) и **слободним електронима**. Провођење топлоте код метала изводи се преко слободних електрона, па се стога често метали називају електронским гасом. Предаја топлоте услед кретања атома такође постоји али је она незнатна. Слободни електрони крећу из топлијих средина у хладније и обрнуто. При кретању из топлије у хладнију средину предају енергију атомима, а кад је обрнуто, одузимају је од атома. Како су код метала основни носиоци топлоте - електрони, постоји пропорционалност између топлотне проводљивости и електропроводности. Код легура број слободних електрона и фонона је ограничен па је стога  $\lambda$  знатно мања него код чистих метала од којих је сачињена легура. Такође,  $\lambda$  код легура, расте са порастом температуре.

Код диелектричних материјала  $\lambda$  по правилу расте са температуром. Шупљикави као и растресити материјали (песак, вуна, влакнасти материјали и други) између чврстих делова имају у шупљинама гасове (ваздух, полиуретан и др.). Овакви материјали нису хомогени. Због велике разлике између топлотне проводљивости за чврста тела и гасове топлотна проводљивост  $\lambda$  ће бити утолико мања колико има више шупљина и што су шупљине ситније и равномерније распоређене. Топлотна проводљивост код шупљикавих и растреситих материјала зависи од густине материјала, са смањењем густине она опада. Влажност повећава вредност топлотне проводљивости порозних материјала. То се објашњава капиларним кретањем воде унутар пора у материјалу.

## Раван зид без унутрашњих извора (понора) топлоте

- дебљина зида → коначна димензија (само 1)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \dot{q}_i = 0$$



površina projekcije зида u ravni

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A_x \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \underbrace{\frac{d\dot{Q}_x}{dx}}_0 \cdot dx$$

$$\dot{Q}_x = \text{const} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot A_x \cdot \frac{dT}{dx} \right) = 0 \rightarrow -\lambda \cdot A_x \cdot \frac{dT}{dx} = C = \dot{Q}_x = \dot{Q}$$

$$-\lambda \cdot A_x \cdot \int_{T_1}^T dT = \int_0^x C \cdot dx + C_1 \rightarrow \lambda \cdot A_x \cdot (T_1 - T) = C \cdot x + C_1$$

$$x=0 \quad ; \quad T=T_1 \rightarrow C_1=0 \quad A_x=A \quad ; \quad x=\delta \quad ; \quad T=T_2 \rightarrow C = \frac{T_1 - T_2}{\delta / (\lambda A)} = \dot{Q}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda \cdot A}}$$

$$\text{по јединици површи} \rightarrow \dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda}}$$

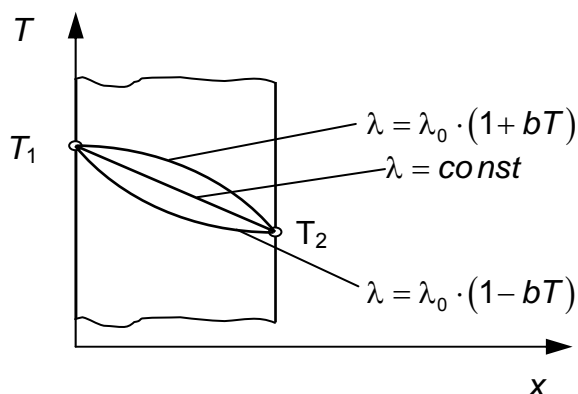
$$R_{\lambda, A} = \frac{\delta}{\lambda \cdot A} - \text{отпор провођењу топлоте}$$

за проводнике → мали отпор  
за изолаторе → велики

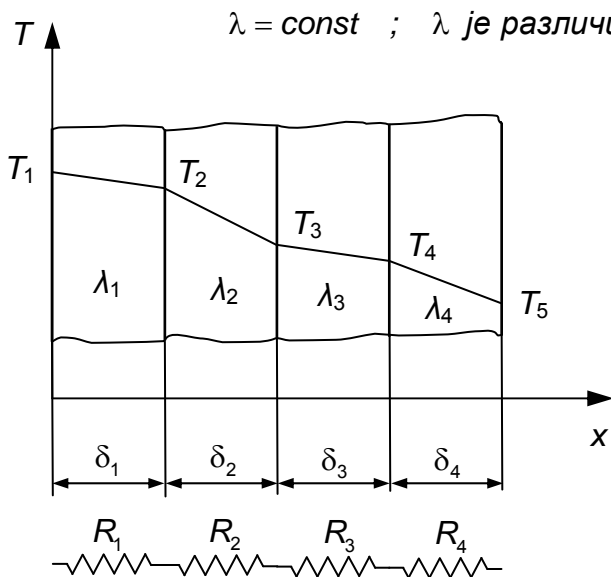
$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\delta} \cdot x$$

$$\lambda = \lambda(T) \rightarrow \text{таб.}$$

$$\text{- за } \lambda = \lambda_0 (1 \pm b \cdot T)$$



## Стационарно провођење топлоте кроз вишеслојан раван зид



$$R_u = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot A} + \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot A} + \frac{\delta_3}{\lambda_3 \cdot A} + \dots$$

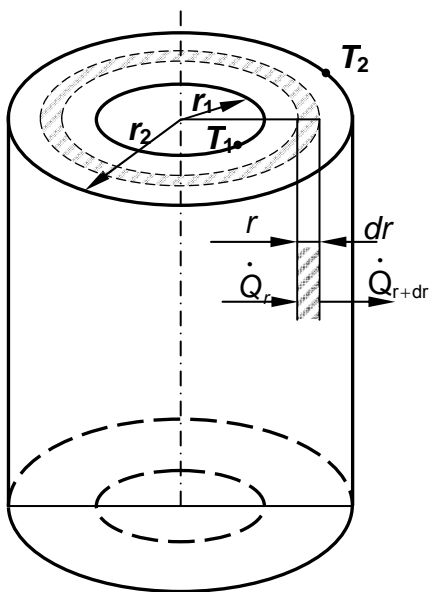
$$\dot{Q} = const = \frac{T_1 - T_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} =$$

$$= \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2} = \frac{T_2 - T_5}{R_2 + R_3 + R_4}$$

- пад температуре зависи од  $\lambda$

## Стационарно провођење топлоте кроз бесконачан шупаљ цилиндрични зид (цев)

$$\lambda = const.; \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \Theta} = 0; \quad \dot{q}_i = 0 \Rightarrow T = T(r)$$



$$\frac{dE}{d\tau} = \delta \dot{Q}_r - \delta \dot{Q}_{r+dr} + \underbrace{\delta \dot{Q}_i}_{=0}$$

$$\dot{Q}_{r+dr} = \dot{Q}_r + \frac{d\dot{Q}_r}{dr} \cdot dr$$

$$\frac{d\dot{Q}_r}{dr} = 0 \rightarrow \dot{Q}_r = const. = \dot{Q}$$

$$\dot{Q}_r = -\lambda \cdot \underbrace{A(r)}_{\downarrow} \cdot \frac{dT}{dr} = c$$

$$\dot{Q}_r = -\lambda \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}_{\downarrow} \cdot \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \left[ -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dT}{dr} \right] = 0$$



a)  $\lambda = \text{const}$

$$-2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l \cdot \int_{T_1}^T dT = c \cdot \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} + c_1 \quad 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l \cdot (T_1 - T) = c \cdot \ln \frac{r}{r_1} + c_1$$

$$r = r_1 \quad T = T_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$r = r_2 \quad T = T_2 \Rightarrow c = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l \cdot (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \dot{Q}_r \quad T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1} = T(r)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad R_{\lambda, l} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \quad \text{- отпор провођењу топлоте кроз цилиндричан зид}$$

$$\dot{Q} = \dot{q}_l \cdot l; \quad \dot{q}_l \text{ - линијски топлотни проток } \} R_i = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i \cdot l}$$

$$\dot{q}_l = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad 2 \text{ слоја} \Rightarrow \dot{Q} = \frac{T_1 - T_3}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_1 \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_2 \cdot l} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}}$$

# ПРЕЛАЖЕЊЕ ТОПЛОТЕ

## ( ТОПЛОТНА КОНВЕКЦИЈА )

Прелажење топлоте (**конвекција**) је процес преношења топлоте са чврстог тела на флуид (или обрнуто) при струјању тог истог флуида дуж површи тог чврстог тела.

**конвекција = кондукција + адвекција**

ТО ЈЕ СЛОЖЕН ПРОЦЕС КОЈИ ЧИНЕ ДВА РЕДНО ВЕЗАНА ПРОЦЕСА:

**кондукција** (провођење топлоте с тела на први слој и даље са слоја на слој флуида)

**и**

**адвекција** (одношење – управо те проведене топлоте – у виду протока енталпије покретне масе - то јест количине супстанције - тј извесног броја молова флуида).

Дакле, јасно је да се конвекција с правом назива “**моларно преношење топлоте**”.

Конвективни пренос топлоте је могућ искључиво приликом кретања флуида. Да би се флуид кретао, потребно је да на њега делује једна или више сила које могу бити како запреминске (тежина, сила електр. поља) тако и површинске (силе притиска, трења).

Кретање флуида преко површине чврстог тела може бити принудно и слободно. Дакле, и адвекција тј. **конвекција** може бити **принудна** и слободна (**природна**).

Слободно кретање флуида се одвија услед дејства запреминских Архимедових сила. Ако се флуид са неравномерном расподелом густине налази - у пољу Земљине теже одвија се “Архимедово” кретање. Тако условљена, одвија се **природна конвекција**.

Принудно кретање флуида (и **принудна конвекција**) се јавља услед дејства површинских сила на граничним површинама (нпр. под утицајем пумпе или вентилатора).

Али, често флуид струји под дејством – истовремено и запреминских и површинских сила. Тада се одвија комбинована – слободна (тј. природна) и принудна конвекција. Код великих брзина ( $\gg Re$  бројева) утицај слободне конвекције се јасно занемарује.

Конвекција (њена адвекција) је везана са кретањем флуида па је значајно одредити - какво је струјање. По **механици флуида**, науци о струјању, флуид струји **ламинарно** (када не долази до мешања струјница) или **турбулентно** (када се струјнице мешају).

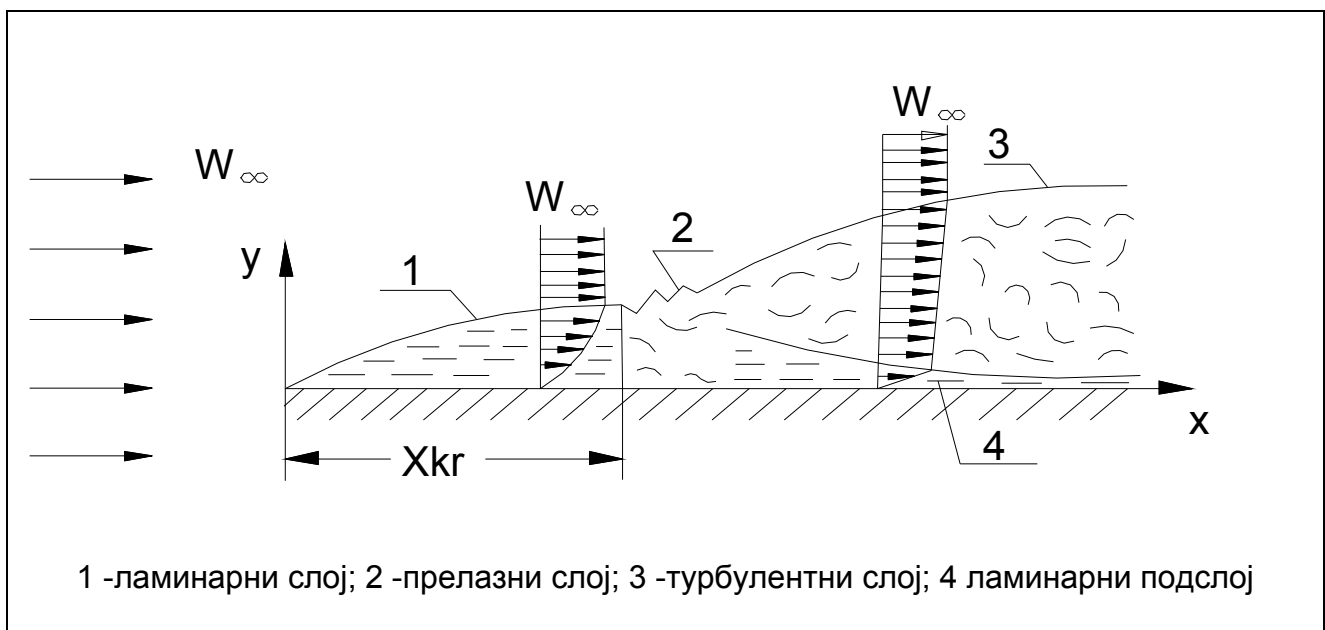
# ГРАНИЧНИ СЛОЈ И КОНВЕКЦИЈА (ИНФОРМАТИВНО)

Сви стварни флуиди су, мање или више, вискозни. Приликом струјања ових флуида, у близини чврстих зидова, услед вискозности, брзина почиње нагло да се мења. Слој у којем се брзина нагло мења назива се гранични слој.

Ова промена брзине последица је вискозних сила смицања између суседних слојева флуида. Услед адхезије (молекула флуида за зид), брзина флуида на површини чврстог тела једнака је брзини чврстог тела, па ако је тело у миру она је нула.

Уза зид се формира гранични слој дебљине  $\delta$ . Профил брзине у том слоју нагло се мења а силе смицања постају - велике. У делу флуида где се брзина највише мења, тик уза зид, струјање је ламинарно, без обзира какво је далеко од зида. У граничном слоју брзина флуида се мења од 0 до  $w_\infty$  у непоремећеном току, далеко од зида.

При струјању флуида дуж равне плоче долази до промене профила брзине. Почев од нападне ивице па до дужине  $x_{кр}$  формира се ламинарни гранични слој. Даље, од  $x_{кр}$  развија се турбулентни део граничног слоја. Овај део бива све дебљи дуж плоче. Што је већа вредност брзине у непоремећеном току  $w_\infty$ , тим је краће растојање  $x_{кр}$ . Између ламинарног и развијеног турбулентног струјања постоји и – прелазна област.



Енглески научник из 19. века сер Озборн Рејнолдс је утврдио да се тај прелаз из ламинарног у турбулентно струјање изводи при некој критичној вредности скупине параметара  $Re_{кр} = w_\infty x_{кр} / \nu$  без обзира на вредност појединих параметара  $w_\infty$ ,  $x_{кр}$  и  $\nu$ .

Израз  $Re = w_{\infty} x / \nu$  назива се Рејнолдсов број, бездимензијска величина. На вредност  $Re_{кр}$  утиче поред горњих параметара и храпавост зида, вид улазне ивице (заобљена или заоштрена) и да ли је струјање испред плоче ометано или не. Зато вредност  $Re_{кр}$  није строго одређена. За равне плоче она је у границама  $10^5 < Re_{кр} < 4 \cdot 10^6$ .

Струјање у цевима слично је као код равне плоче. Гранични слој од улаза постаје све дебљи и после одређене дужине - испуњава цео пресек цеви. А иза критичне дужине  $x_{кр}$  профил брзине је устаљен. Рејнолдсов број се овде дефинише изразом  $Re = w_m d / \nu$  где је:  $w_m$  -средња брзина струјања по пресеку цеви а  $d$  -пречник цеви.

Критичан Рејнолдсов број за струјање кроз цев износи приближно 2300. За  $Re > 2300$  струјање је турбулентно а за  $Re < 2300$  струјање кроз цев је ламинарно.

### Њутнова хипотеза о конвекцији

Знатно пре него што је се сазнало које све величине утичу на размену топлоте конвекцијом, Њутн је дао хипотезу о простирању топлоте конвекцијом. Она гласи:

$$Q = \pm \alpha \cdot (T_z - T_f) \cdot A \cdot \tau \quad (1)$$

где је:

$\alpha$  -коэффициент прелажења топлоте;

$T_z, T_f$  -температуре зида и флуида;

$A$  -површина преко које се преноси топлота;

Топлотни флуks према Фуријеовом закону на површини чврстог тела (зида) износи

$$\delta \dot{Q} = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_A \cdot dA \quad (2)$$

Из израза (1) (2) се може извести следећи израз за коефицијент прелажења топлоте:

$$\alpha = \pm \frac{\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_A}{T_z - T_f} \quad (3)$$

Из израза (3) види се да коефицијент прелажења топлоте зависи и од градијента температуре, коефициј. провођења топлоте и температуре зида и флуида. Израз (1) Њутн је дао знатно раније но што су били познати закони термодинамике и он је тад претпоставио да је његова вредност константна. Касније истраживањима показано је да коефицијент прелажења топлоте не зависи само од температуре зида и флуида.

## Теорија сличности при конвективном простирању топлоте

Решавање математичког модела конвективног преноса топлоте при струјању флуида преко дате површи чврстог тела се остварује решавањем система диференцијалних једначина састављен од: једначине континуитета (ЈК), Навије – Стокс једначина (НС) и (ЈЕ) једначине енергије. Ово је компликован проблем – за примењену математику.

Све до “ рачунарске револуције ” и није било адекватних метода за тачно (егзактно) решавање таквих система једначина. Позната решења су били специјални случајеви простије геометрије. И таквих решења је био ограничен број. Због тога се покушало да се експериментално реши овај проблем. И поставило се сасвим логично питање: **како** – добијене експериментом вредности, најчешће на умањеном објекту - моделу, пренети на стварни објекат а при томе да се задовоље основни закони физике?

Истраживачи су прво утврдили емпиријски да се резултати измерени на моделу могу применити и на објектима или новим инсталацијама са извесним апроксимацијама. Касније је утврђено да код свих физичких појава постоје одређени односи (фактори сличности) између резултата добијених у лабораторији (на моделу) и на објекту.

Однос између величина на моделу и објекту означимо са  $\Omega$ . Тако се може написати

$$\begin{aligned}\frac{x'}{x} &= \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'}{l} = \Omega_l \\ \frac{w'_x}{w_x} &= \frac{w'_y}{w_y} = \frac{w'_z}{w_z} = \frac{w'}{w} = \Omega_w \\ \frac{\lambda'}{\lambda} &= \Omega_\lambda; \frac{\eta'}{\eta} = \Omega_\eta; \frac{c'_p}{c_p} = \Omega_c; \\ \frac{\beta'}{\beta} &= \Omega_\beta; \frac{\rho'}{\rho} = \Omega_\rho; \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \Omega_p; \\ \frac{\Delta T'}{\Delta T} &= \Omega_t; \frac{g'}{g} = \Omega_g\end{aligned}\tag{4}$$

Заменом бездимензионих фактора сличности (4) у изразе (JK), (HC) и (JE) добија се

$$\frac{\Omega_w \Omega_p}{\Omega_l} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) \right] = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_w^2 \Omega_p}{\Omega_l} \rho \left[ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \dots \right] &= -\frac{\Omega_p}{\Omega_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \Omega_p \Omega_\beta \Omega_t \Omega_g \rho g \beta \theta + \\ &+ \frac{\Omega_\eta \Omega_w}{\Omega_l^2} \eta \left[ \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \dots \right] + \frac{\Omega_\eta \Omega_w}{\Omega_l^2} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \dots \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_p \Omega_c \Omega_w \Omega_t}{\Omega_l} \rho c_p \left[ w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \dots \right] &= \frac{\Omega_\lambda \Omega_t}{\Omega_l^2} \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dots \right] + \\ &+ \frac{\Omega_p \Omega_w}{\Omega_l} \left[ w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \dots \right] + \frac{\Omega_\eta \Omega_w}{\Omega_l} \eta \phi \end{aligned} \quad (7)$$

Да би резултати који су добијени на моделу могли да се примене на објекту, морају диференцијалне једначине модела бити потпуно исте (идентичне) диференцијалним једначинама објекта. Тај услов је задовољен ако су коефицијенти у једначинама (5), (6) и (7) међу собом сви једнаки тако да могу да се скрате.

Из изрази (5) види се да једначина континуитета не захтева допунски услов. Она је задовољена на моделу и објекту. Једн (6) и (7) биће идентичне ако је испуњен услов

$$\frac{\Omega_w^2 \Omega_p}{\Omega_l} = \frac{\Omega_p}{\Omega_l} = \Omega_\beta \Omega_t \Omega_p \Omega_g = \frac{\Omega_\eta \Omega_w}{\Omega_l^2} \quad (8)$$

$$\frac{\Omega_p \Omega_c \Omega_w \Omega_t}{\Omega_l} = \frac{\Omega_\lambda \Omega_t}{\Omega_l^2} = \frac{\Omega_w \Omega_p}{\Omega_l} = \frac{\Omega_\eta \Omega_w^2}{\Omega_l^2} \quad (9)$$

Сменом величина за  $\Omega$  у једначинама (8) и (9) добија се

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = \frac{\Delta p'}{\rho' w'^2} = E_u = E_u' \quad (10)$$

$$\frac{w' l'}{\frac{\eta'}{\rho'}} = \frac{w l}{\frac{\eta}{\rho}} = \frac{w l}{\nu} = R_e = R_e' \quad (11)$$

$$\frac{g' \beta' \theta' l'}{w'^2} = \frac{g \beta \theta l}{w^2} = \frac{g \beta \theta l^3}{\nu^2 \frac{w^2 l^2}{\nu^2}} = \frac{G_r}{R_e^2} = \frac{G_r'}{R_e'^2} \quad (12)$$

$$\frac{\rho' c_p' w' l'}{\lambda'} = \frac{\rho c_p w l}{\lambda} = \frac{w l}{a} = P_e = P_e' \quad (13)$$

Где је:  $R_e$  -Рејнолдсов број,  $E_u$  -Ојлеров број,  $G_r$  –Грасхофов број,  $P_e$  -Пеклеов број.

Занимљиво је да се Израз за Пеклеов број може написати и у следећем облику

$$P_e = \frac{w \cdot l}{a} = \frac{w \cdot l}{v} \cdot \frac{v}{a} = R_e \cdot P_r \quad (P_r = v / a) \quad (16)$$

Да би температуре зида модела и објекта биле сличне, мора задовољена једн. (3) тј.

$$\alpha = \pm \frac{\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_A}{T_z - T_f} \quad (17)$$

Заменом  $\alpha'_x / \alpha_x = \Omega_\alpha$  у (17) добија се израз којим се дефинише локални Нуселтов број

$$\frac{\alpha'_x \cdot \ell'}{\lambda'} = \frac{\alpha_x \cdot \ell}{\lambda} = Nu'_x = Nu_x \quad (18)$$

Ако је промена физичких параметара мала, погодно је физичке величине срачунати за неку средњу температуру. Средња температура, строго узевши, била би она када би се флуид који струји измешао иза посматраног пресека.

Иако је теорија сличности била и пре тога позната, Вилхелм Нуселт (1910) ју је први применио у термодинамици. Као што смо већ видели -- применом теорије сличности добијају се једнакости ових бездимензионих бројева / критеријума, од којих је сваки производ (количник) величина од значаја за поједини тип проблема (физички случај) :

$Re = Re'$		– (Reynolds)
$Eu = Eu'$	$Eu = \frac{\Delta l}{\rho \cdot w^2}$	– (Euler)
$Gr = Gr'$	$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot l^3}{\nu^2}$	– (Grasshof)
$Pr = Pr'$	$Pr = \frac{\nu}{a}$	– (Prandtl)
$Nu = \underbrace{Nu'}_{\substack{\text{model (')}}}$	$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\underbrace{\lambda_f}_{\substack{\text{za fluid}}}}$	– (Nusselt)

Бездимензиони критеријуми су повезани у функционалне зависности које се изводе помоћу метода теорије граничног слоја за брзински и температурски гранични слој

За принудну конвекцију :

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \cdot Gr^p \cdot \varepsilon_T^p$$

$$\varepsilon_T = \left( \frac{P_{rf}}{P_{rA}} \right)^n \quad \swarrow \quad \text{za fluid neposredno uz graničnu površ} \rightarrow (T_f \approx T_A)$$

$$\rightarrow Nu = \frac{\alpha \cdot \ell_k}{\lambda_f} \Rightarrow \alpha$$

За природну конвекцију :

$$Nu = f(Gr, Pr) \rightarrow Nu = C' \cdot (Gr \cdot Pr)^k \cdot \varepsilon_T$$

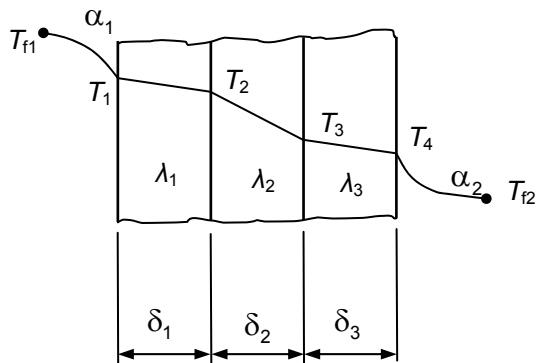
$$\rightarrow Nu = \frac{\alpha \cdot \ell_k}{\lambda_f} \Rightarrow \alpha$$



# ПРОЛАЖЕЊЕ ТОПЛОТЕ

(комбиновани механизам од  $n$ (овде 3) провођења и 2 прелажења)

## Пролажење топлоте кроз бесконачан вишеслојан раван зид



$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot A \cdot (T_{f_1} - T_1)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot A \cdot (T_1 - T_2) = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot A \cdot (T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \cdot A \cdot (T_3 - T_4)$$

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot A \cdot (T_4 - T_{f_2})$$

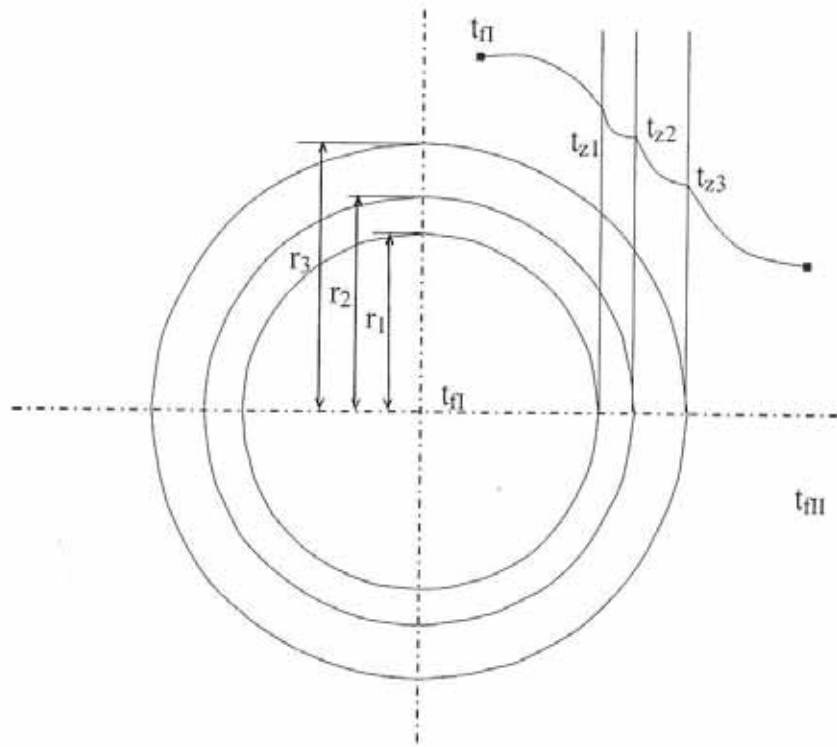
$$\dot{Q} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot A} + \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot A} + \frac{\delta_3}{\lambda_3 \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} \right] = T_{f_1} - T_{f_2}$$

$$\dot{q}_A = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (T_{f_1} - T_{f_2})$$

$$\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{— укупни отпор пролажењу топлоте кроз раван зид}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[ \frac{W}{m^2 K} \right] \quad \text{— коефицијент пролажења топлоте за раван зид}$$

## Пролажење топлоте кроз вишеслојан бесконачан цилиндричан зид (цев)



$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot 2r_1\pi \cdot \ell \cdot (T_{f1} - T_1)$$

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot 2r_2\pi \cdot \ell \cdot (T_2 - T_{f2})$$

$$\dot{q}_\ell = \frac{\dot{Q}}{\ell} = \alpha_1 \cdot 2r_1\pi \cdot (T_{f1} - T_1)$$

$$\dot{q}_\ell = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{1}{2\pi\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{1}{2\pi\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} =$$

$$\dot{q}_\ell = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi \lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_{n+1} \alpha_2}} = k_\ell (T_{f1} - T_{f2})$$

$$\left[ \frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi \lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_{i+1} \alpha_2} \right] = R_a \quad k_\ell = \frac{1}{R_{\ell a}}$$