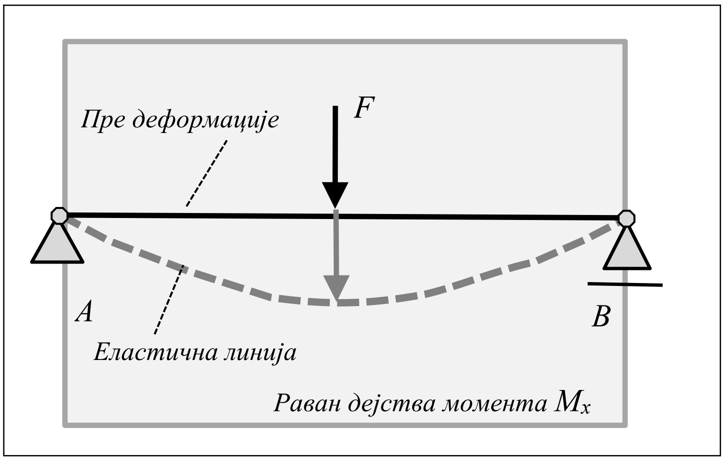
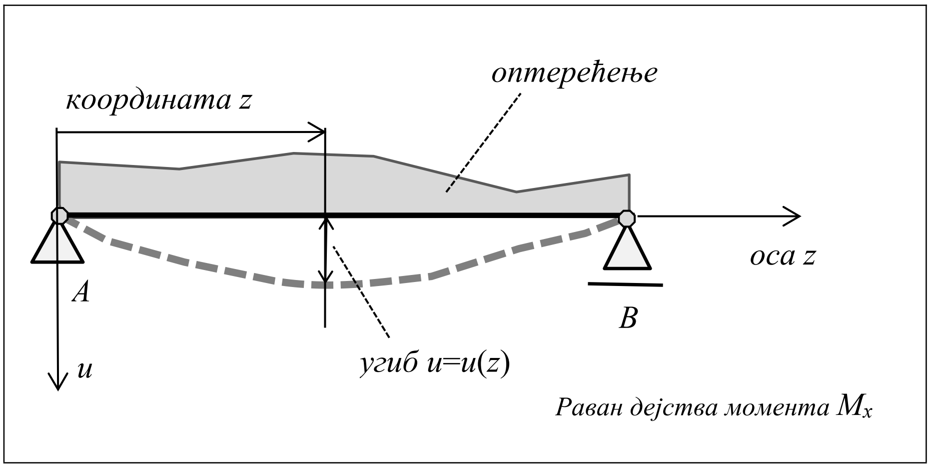
7. ДЕФОРМАЦИЈЕ НОСАЧА ПРИ САВИЈАЊУ



Слика 7.1 *Еластична линија просте греде*

Посматрајмо просту греду *AB* са слике 7.1 оптерећену силом на средини. Под дејством те силе греда се деформисала, али тако да нека влакна нису променила дужину. Таква влакна називају се неутралним влакнима, она чине неутрални слој носача, а пројекција неутралног слоја на раван момента савијања назива се **еластична линија носача.** Да би се одредила величина деформације, због уведених претпоставки, довољно је одредити само померања неутралног слоја, односно потребно је дефинисати еластичну линију носача.



Слика 7.2 *Еластична линија, угиб носача*

Уобичајено је да се еластична линија носача дефинише помоћу координатног система (*uz*) приказаног на слици 7.2. Угиб *u* представља померање тачака еластичне линије у односу на почетни положај. Угиб пресека на произвољном месту носача обележава се као $u=u(z)$.

Да би се израчунао угиб носача полази се од изведеног израза за напон

$$E\,K\,I_x = M_x \Rightarrow \sigma_z = E\,K\,y = \frac{M_x}{I_x}\,y$$

одакле је кривина криве изражена преко момента савијања

$$K(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x}\,. \qquad (7.1)$$

Кривина криве линије u=u(z) из математике се одређује применом следећег израза

$$K(z)=\frac{u''(z)}{\left[1+(u'(z))^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{7.2}$$

што даје тачну диференцијалну једначину еластичне линије

$$\frac{u''(z)}{\left[1+(u'(z))^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_x(z)}{E\,I_x}. \tag{7.3}$$

Пошто су уведене претпоставке из Отпорности материјала да је ред величине деформације око 1-2 промила, може се усвојити да је

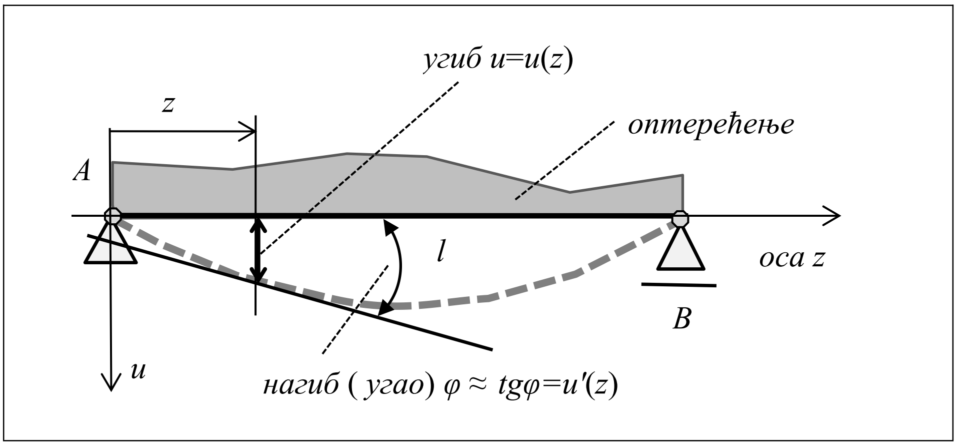
$$1+(u'(z))^2\approx 1.$$

Зато је у техничкој пракси уобичајено да се угиб одређује помоћу приближне диференцијалне једначине еластичне линије која има облик

$$u''(z)=-\frac{M_x(z)}{E\,I_x}. \tag{7.4}$$

Знак минус у (7.4) је додат да би се ускладили усвојени позитивни смерови за писање момената савијања и угиба. Усвојено је да је позитиван угиб у смеру на доле, зато што је то смер дејства силе гравитације.

Први извод сваке функције представља њен нагиб, тако да је за функцију u=u(z) први извод $u'(z)$ нагиб тангенте еластичне линије. У случају малих деформација важи $\varphi \approx tg\varphi = u'(z)$, тако да је нагиб приближно једнак углу који у пресеку z заклапа тангента на еластичну линију у оптерећеном стању, са тангентом у почетном - неоптерећеном стању.



Слика 7.3 У*гиб и нагиб еластичне линије греде*

Да би се полазећи од диференцијалне једначине (7.4), добила једначина еластичне линије, за носаче константног попречног пресека потребно је прво написати израз за момент у произвољном пресеку, а затим извршити интеграцију два пута (неодређени интеграли). При томе се добијајау и две интеграционе константе C_1 и C_2 које се одређују на основу услова ослањања:

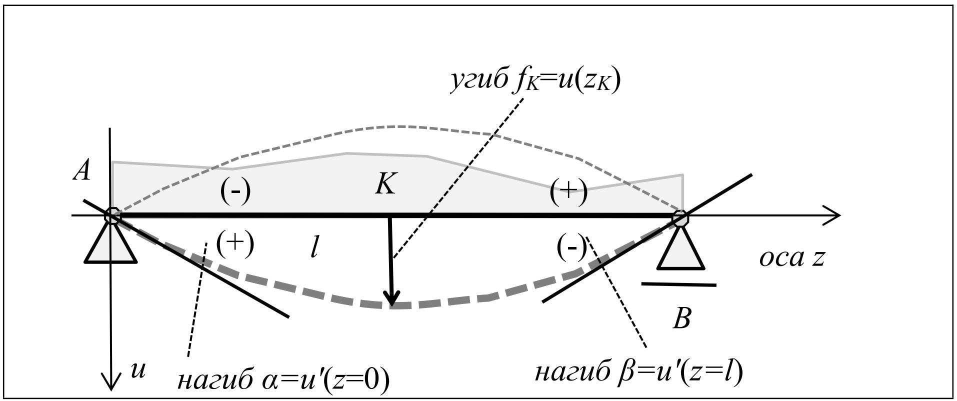
$$u''(z)=-\frac{M_x(z)}{E\,I_x} \quad \Rightarrow$$

$$u'(z)=-\frac{1}{E\,I_x}\int M_x(z)dz+C_1 \quad \Rightarrow \tag{7.5}$$

$$u(z)=\int\left(-\frac{1}{E\,I_x}\int M_x(z)dz+C_1\right)dz+C_2=-\frac{1}{E\,I_x}\int\left(\int M_x(z)dz\right)dz+C_1\,z+C_2$$

Услови ослањања греде виде се са слика 7.3 и 7.4:

- Угиб ослонца A једнак је нули → $u_A = u(z=0) = 0$ и
- Угиб ослонца B једнак је нули → $u_B = u(z=l) = 0$.



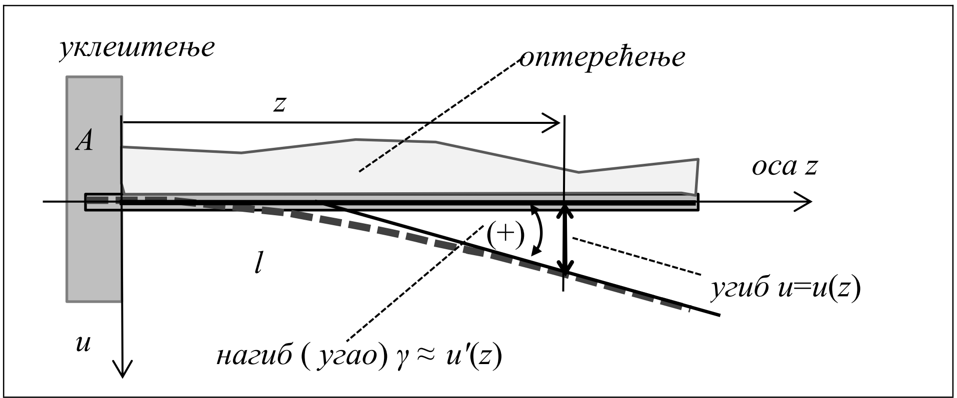
Слика 7.4 У*гиб и карактеристични нагиби просте греде*

Уобичајено је да се угиб неке тачке (пресека) K са координатом z_K обележава као f_K. Код просте греде карактеристична су два нагиба, и то нагиби над ослонцима. Нагиб над левим ослонцем A обележава се ознаком α и усвојено је да позитиван смер нагиба α одговара савијању на доле. Нагиб код десног ослонца B обележава се као β и позитиван је при деформацији на горе (сл. 7.4).

Услови ослањања конзолног носача гласе:

- Угиб ослонца A једнак је нули → $u_A = u(z=0) = 0$ и
- Нагиб ослонца A једнак је нули → $u'_A = u'(z=0) = 0$.

Деформација конзолног носача приказана је на слици 7.5. Договорено је да се нагиб неке тачке (пресека) K конзолног носача обележава ознаком γ_K, а померање те тачке ознаком f_K.

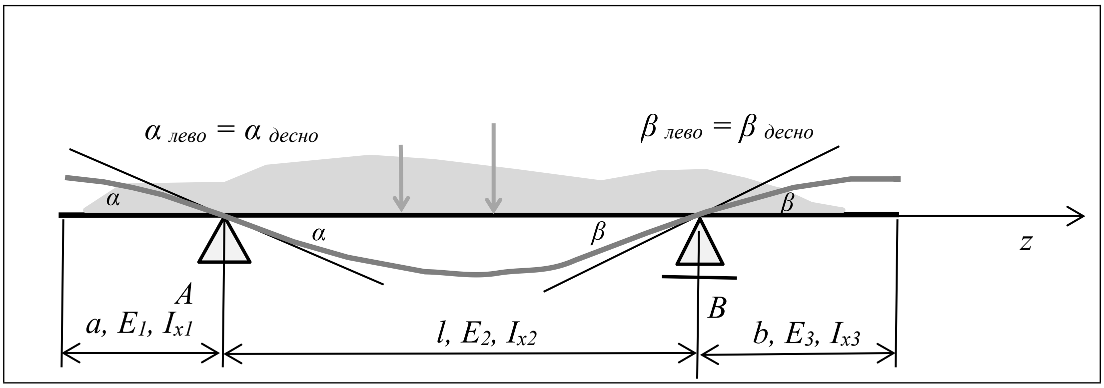


Слика 7.5 У*гиб и нагиб конзоле*

Угиби и нагиби просте греде и конзоле под дејством различитих оптерећења дати су у свим таблицама из отпорности материјала.

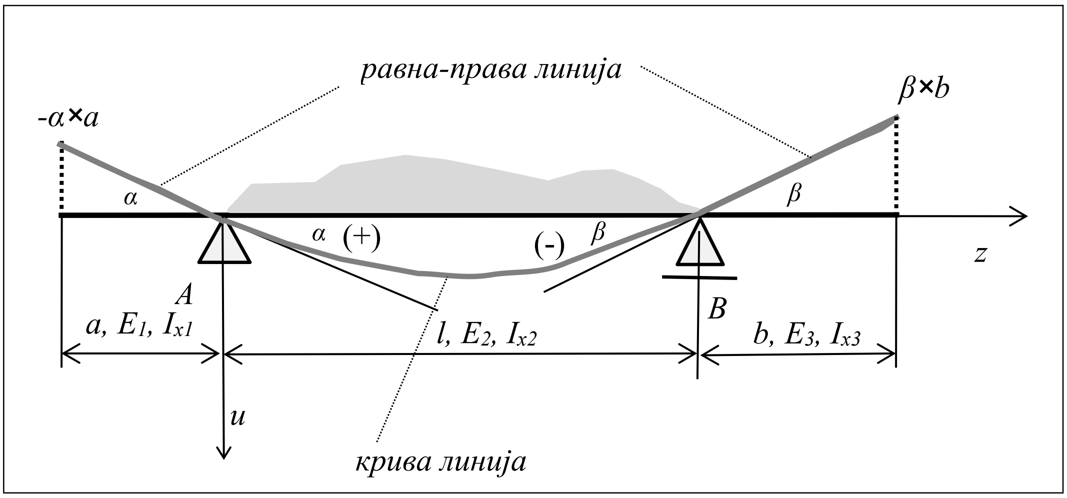
Деформације на греди са препустима

За греду са препустима приказану на слици 7.6 важе следеће ознаке: леви ослонац A, десни ослонац B, растојање између ослонаца l, дужина левог препуста a, дужина десног препуста b. Делови греде су најчешће направљени од истог материјала и тада је Модуо еластичности $E_1=E_2=E_3=E$. Утицај величине и облика попречних пресека узима се преко износа аксијалних момената инерције за главну осу око које се врши савијање.



Слика 7.6 *Греда са препустима*

Важан услов за разумевање деформација на греди са препустима је услов континуалности; деформације су еластичне и не долази до наглих промена геометрије. Зато је нагиб еластичне линије носача са једне и са друге стране ослонаца исти, па важи: $\alpha_{лево} = \alpha_{десно}$ и $\beta_{лево} = \beta_{десно}$.

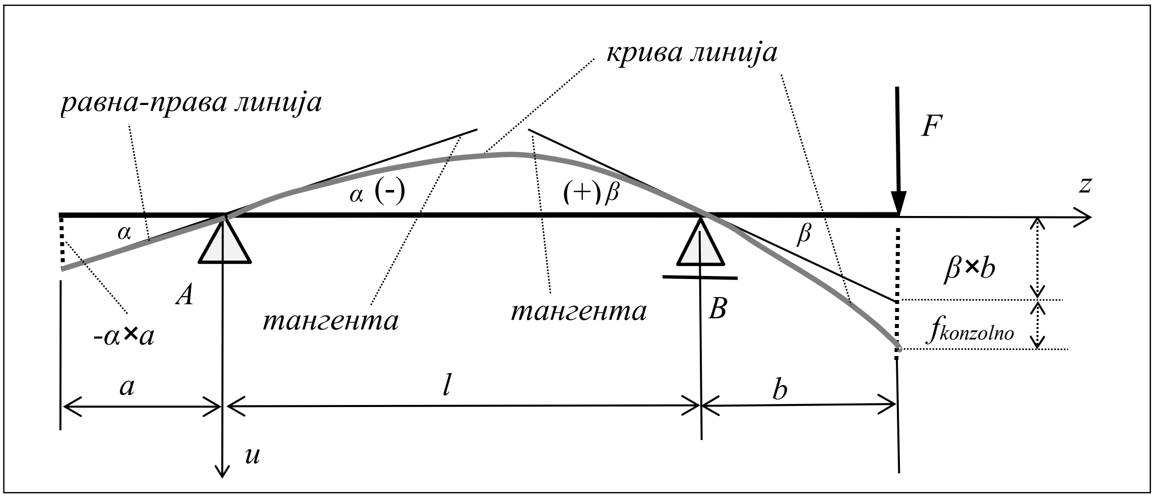


Слика 7.7 *Еластична линија - Оптерећење између ослонаца*

Нека је греда оптерећена само између ослонаца (слика 7.7). Тај део носача ће се деформисати (искривити) и појавиће се нагиби α и β над ослонцима. Спољашњи делови носача-препусти ће остати равни, али ће се заокренути:

- када се леви препуст заокрене за угао α његов крај ће се померити за $\alpha \times a$ и то: *када је угао α на доле (<u>позитиван</u>) померање је на горе (<u>негативно</u>) и обрнуто,*
- када се десни препуст заокрене за угао β његов крај ће се померити за $\beta \times b$ и то: *када је угао β на доле (<u>негативан</u>) померање је на горе (<u>негативно</u>) и обрнуто.*

Са усвојеним знацима за угибе и нагибе, померање левог препуста је увек <u>супротног</u> знака од знака нагиба α, док је померање десног препуста <u>истог</u> знака као знак угла β. Зато су померања крајева препуста: $(-\alpha) \times a$ и $(+\beta) \times b$.



Слика 7.8 *Еластична линија - Оптерећење на једном препусту*

Нека статичка сила F делује на крају десног препуста као што је приказано на слици 7.8. Сила повлачи десни препуст на доле, а пошто је греда континуална и зглобно везана у ослонцу B, део греде између ослонаца се деформише на начин приказан на слици, тако да се стварају нагиби α и β. Пошто се појавио нагиб над ослонцем A леви препуст се заокреће за угао α и остаје раван, тако да је померање његовог краја $-\alpha \times a$. Десни препуст се помера услед нагиба β и то померање износи $\beta \times b$, али се и криви зато што на њему делује оптерећење и то је померање $f^{konzolno}$. Нагиби над ослонцима се одређују тако што се оптерећење са препуста редукује у (најближе) ослонце, а добијени моменти дефинишу нагибе.

Да би се израчунала померања пресека неке произвољно оптерећене греде са препустима, та греда прво мора да се подели на просту греду и две конзоле. Сва оптерећења са препуста морају и да се редукују у најближе ослонце. Са тако добијених слика могу да се одреде све већ објашњене компоненте померања и да се саберу на одговарајући начин. Цео поступак је приказан на слици 7.9.

Поступак одређивања померања у означеним пресецима K_1, K_2 и K_3

1. Носач се подели на просту греду и две конзоле; нацртају се сва три дела посебно

2. Оптерећење се подели на три дела: на левој конзоли - оптерећење 1, између ослонаца - оптерећење 2 и на десној конзоли - оптерећење 3

3. Прво се сва оптерећење прецртају на одговарајућим простим носачима; затим се оптерећење 1 редукује у ослонац A и уцрта момент M_A на простој греди AB, а оптерећење 3 се редукује у ослонац B и момент M_B се уцрта на греди AB

4. Помоћу Таблица се прочитају појединачне компоненте померања:

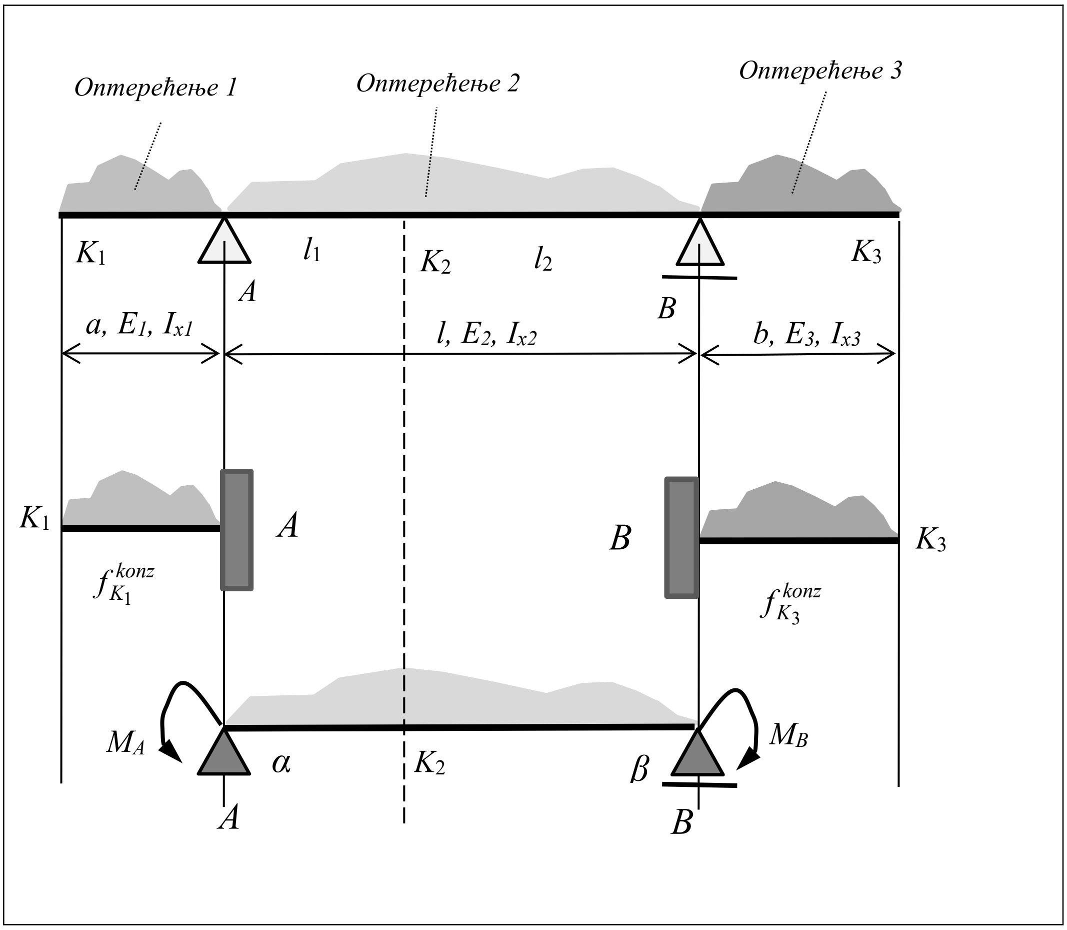
- Са конзоле AK_1 одреди се $f_{K_1}^{konz}$ од оптерећења 1
- Са конзоле BK_3 одреди се $f_{K_3}^{konz}$ од оптерећења 3
- Са просте греде AB одреде се нагиби α и β, као и померање пресека K_2 од оптерећења 2 и момената M_A и M_B: $\alpha = \alpha(opt.2) + \alpha(M_A) + \alpha(M_B)$ и $\beta = \beta(opt.2) + \beta(M_A) + \beta(M_B)$

5. Одреде се померања према изразима (7.6)

$$f_{K_1} = f_{K_1}^{konz}(opt.1) - a \cdot \alpha(opt.2, M_A, M_B) \tag{7.6а}$$

$$f_{K_3} = f_{K_3}^{konz}(opt.3) + b \cdot \beta(opt.2, M_A, M_B) \tag{7.6б}$$

$$f_{K_2} = f_{K_2}(opt.2, M_A, M_B) \tag{7.6в}$$

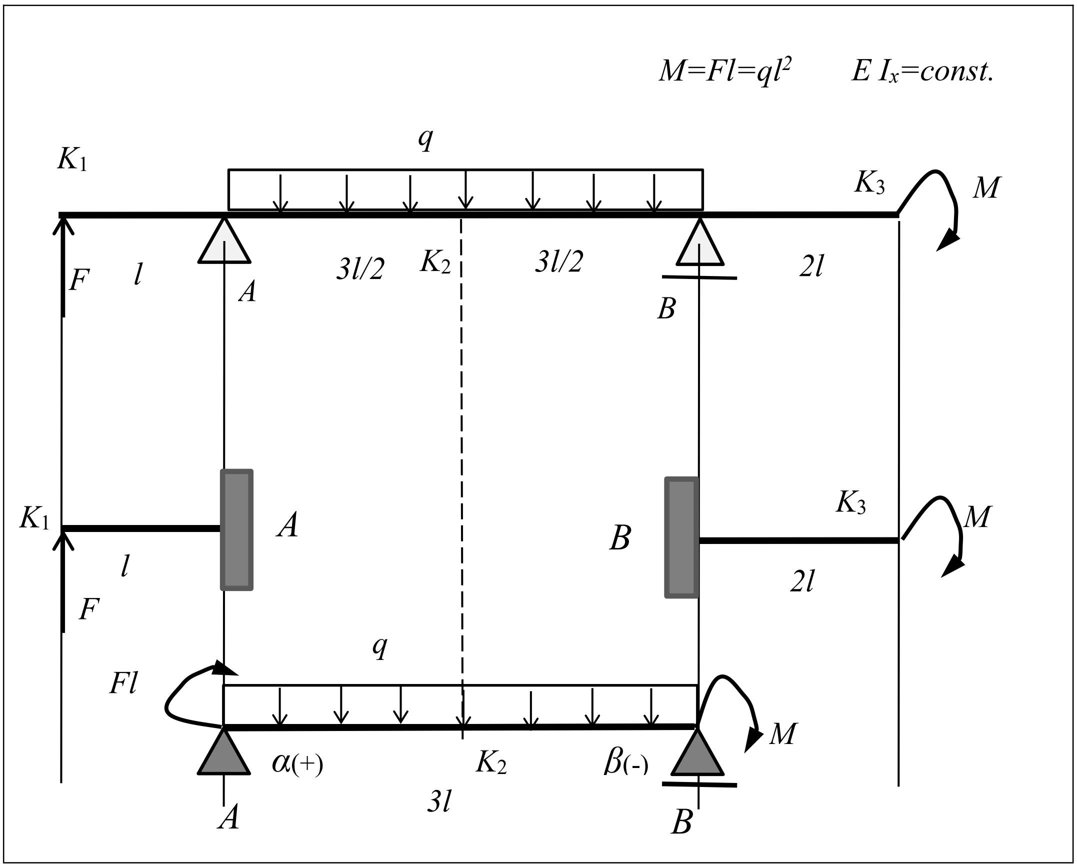


Слика 7.9 *Поступак одређивања померања*

Задатак

- На писменом колоквијуму → Задата је греда са препустима и оптерећења на њој (континуално оптерећење и/или концентрисана сила и/или концентрисани момент). Потребно је одредити померања крајева препуста, као и померање пресека на средини распона између ослонаца. За задати пресек носача одређују се и максимални напони (претходно поглавље).

***Пример* 1**



Слика 7.10 *Пример 1*

$$f_{K_1} = f_{K_1}^{konz}(F) - l \cdot \alpha(M_A, q, M_B) = \left[-\frac{F\,l^3}{3E\,I_x}\right] - l\left[\frac{(Fl)(3l)}{3E\,I_x} + \frac{q(3l)^3}{24E\,I_x} - \frac{M\,(3l)}{6E\,I_x}\right]$$

$$f_{K_1} = \frac{F\,l^3}{E\,I_x}\left[-\frac{1}{3} - 1 - \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\right] = \frac{F\,l^3}{E\,I_x}\left[\frac{-8-24-27+12}{24}\right] = -\frac{47F\,l^3}{24E\,I_x}$$

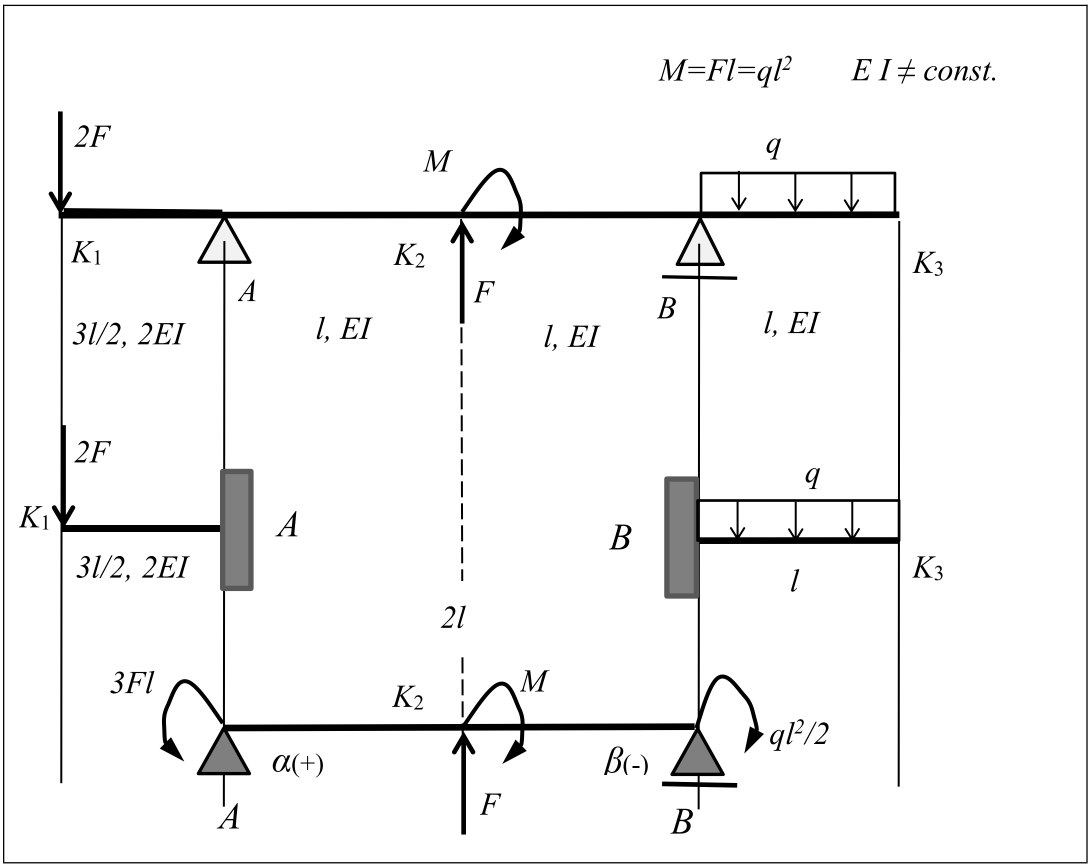
$$f_{K_3} = f_{K_3}^{konz}(M) + 2l \cdot \beta(M_A, q, M_B) = \left[\frac{M\,(2l)^2}{2E\,I_x}\right] + 2l\left[-\frac{(Fl)(3l)}{6E\,I_x} - \frac{q(3l)^3}{24E\,I_x} + \frac{M\,(3l)}{3E\,I_x}\right]$$

$$f_{K_3} = \frac{Fl^3}{E\,I_x}\left[2 - 1 - \frac{9}{4} + 2\right] = \frac{3Fl^3}{4E\,I_x}$$

$$f_{K_2} = f_{K_2}(M_A, q, M_B) = \frac{(Fl)(3l)^2}{16E\,I_x} + \frac{5q(3l)^4}{384E\,I_x} - \frac{M(3l)^2}{16E\,I_x}$$

$$f_{K_2} = \frac{Fl^3}{E\,I_x}\left[\frac{9}{16} + \frac{5\cdot 81}{384} - \frac{9}{16}\right] = \frac{135Fl^3}{128E\,I_x}$$

Пример 2



Слика 7.11 *Пример 2*

$$f_{K_1} = f_{K_1}^{konz} - \frac{3}{2} l \cdot \alpha = \left[\frac{(2F)\left(\frac{3}{2} l\right)^3}{3 \cdot 2EI} \right] - \frac{3}{2} l \left[-\frac{(3Fl)(2l)}{3EI} - \frac{M(2l)}{24EI} - \frac{F(2l)^2}{16EI} - \frac{\left(\frac{1}{2} ql^2\right)(2l)}{6EI} \right]$$

$$f_{K_1} = \frac{39 Fl^3}{8EI}$$

$$f_{K_3} = f_{K_3}^{konz} + l \cdot \beta = \left[\frac{q(l)^4}{8EI} \right] + l \left[\frac{(3Fl)(2l)}{6EI} + \frac{F(2l)^2}{16EI} - \frac{M(2l)}{24EI} + \frac{\left(\frac{1}{2} ql^2\right)(2l)}{3EI} \right]$$

$$f_{K_3} = \frac{13 Fl^3}{8EI}$$

$$f_{K_2} = -\frac{(3Fl)(2l)^2}{16EI} - \frac{F(2l)^3}{48EI} - \frac{\left(\frac{1}{2} ql^2\right)(2l)^2}{16EI}$$

$$f_{K_2} = -\frac{25 Fl^3}{24EI}$$