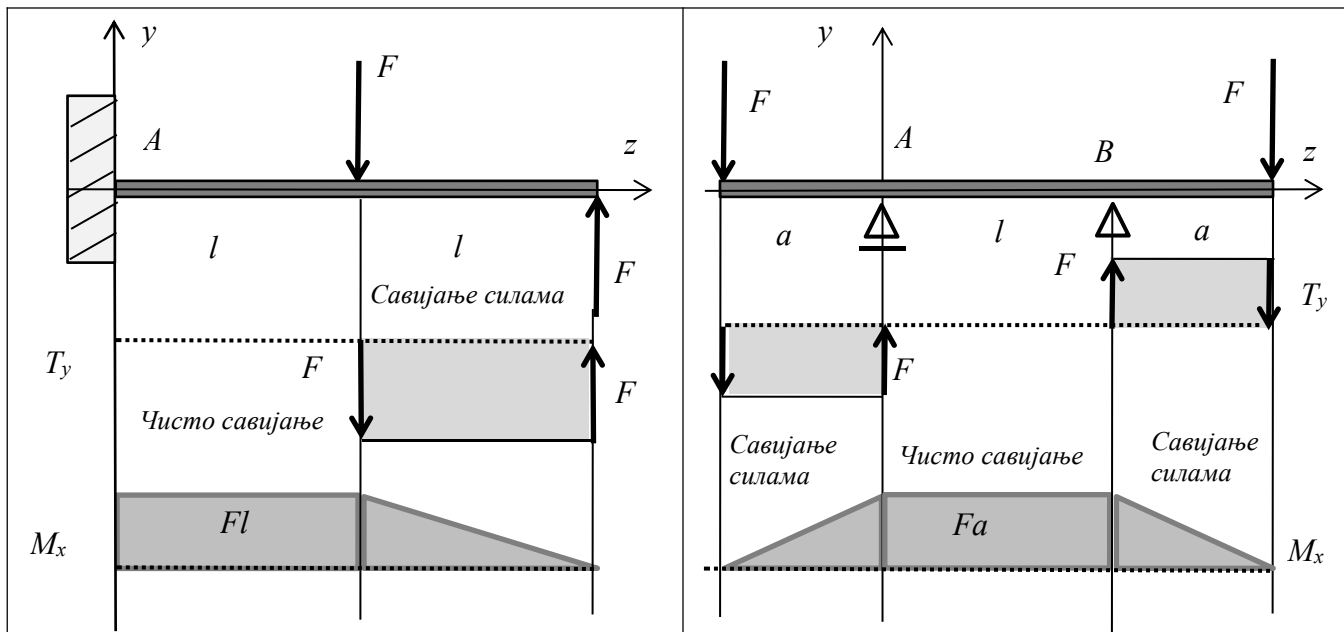


6. САВИЈАЊЕ - ФЛЕКСИЈА



Слика 6.1 Чисто савијање и савијање силама

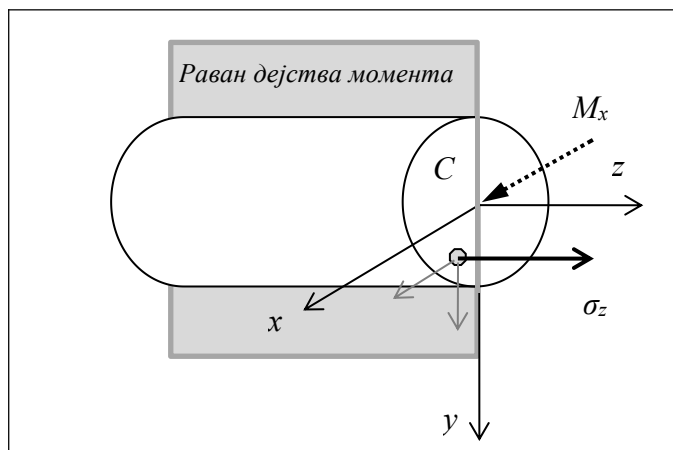
Нека је оса z подужна оса носача и нека силе делују у правцу осе y . Онда је раван момента који делује на носач раван yz . Сваки момент се математички представља вектором управним на његову раван, па зато приказано оптерећење представља момент M_x - момент савијања око осе x .

На слици 6.1 приказана су два носача, конзолни носач и греда са препустима. За задата оптерећења нацртани су дијаграми попречних - трансверзалних сила и момената савијања. Са дијаграма се јасно уочавају две врсте напрезања:

1. Када су у неком пољу (у неком делу носача) трансверзалне силе једнаке нули, момент савијања је константан и такво напрезање зове се *чисто савијање*;
2. Ако постоје попречне силе, момент није константан и та врста оптерећења зове се *савијање силама*.

6.1 ЧИСТО САВИЈАЊЕ ОКО ОСЕ x

Нека у посматраном пресеку гредног носача делује само момент $M_x = const.$



Слика 6.2 Равнотежа гредног елемента код чистог савијања

Једначине равнотеже (3.11) добијају облик:

Једначине равнотеже сила

$$\begin{aligned} 1. \quad & \iint_A \tau_{zx} dA = 0, \\ 2. \quad & \iint_A \tau_{zy} dA = 0, \\ 3. \quad & \iint_A \sigma_z dA = 0, \end{aligned}$$

Једначине равнотеже момената

$$\begin{aligned} 4. \quad & \iint_A y \sigma_z dA = M_x, \\ 5. \quad & \iint_A x \sigma_z dA = 0, \\ 6. \quad & \iint_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

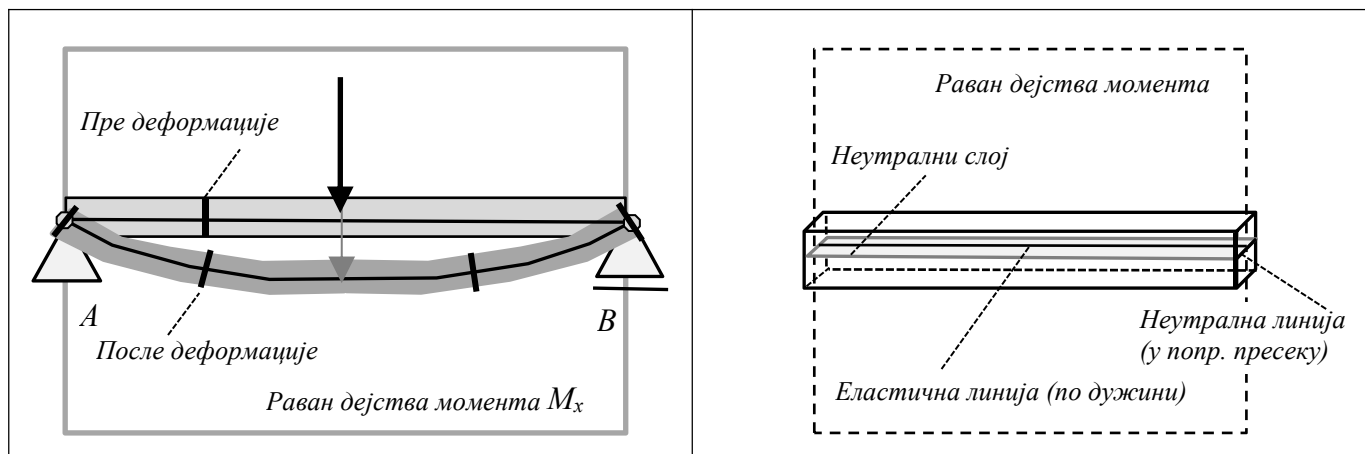
На основу једначине 4 сигурно има нормалног напона, а једначине 1 и 2 показују да је тангенцијални напон занемарљив. Зато је логично да се уведу следеће претпоставке:

Претпоставка о напонима

Тангенцијални напони τ_{zx} и τ_{zy} су једнаки нули, тако да се у пресеку појављује само нормални напон:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \text{ и } \sigma_x \neq 0. \quad (6.2a)$$

Претпоставка о деформацијама - Бернулијева претпоставка

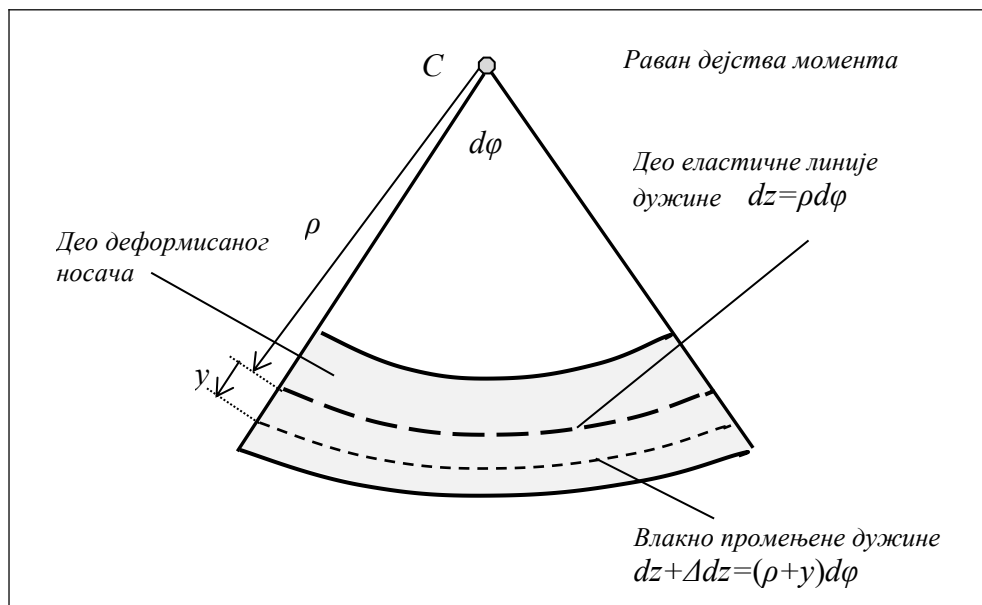


Слика 6.3 Деформација код чистог савијања

Посматрајмо просту греду AB са слике 6.3 оптерећену силом на средини. На слици је нацртан логичан изглед деформисаног носача, односно, код савијања је логично да се влакна са једне стране издужују (овде је то доња страна), а са друге скраћују. Тако се закључује да постоје и влакна која нису променила дужину, већ су се само искривила. Таква влакна називају се неутралним влакнима и она чине неутрални слој носача. Пројекција неутралног слоја на равни момента савијања назива се **еластична линија носача**, а траг неутралног слоја у равни попречног пресека представља **неутралну линију**.

У складу са претпоставком да нема тангенцијалних напона који криве попречни пресек, Бернулијева претпоставка може се исказати на следећи начин: попречни пресек је пре деформације био равни и управан на подужну осу; после деформације он и даље остаје равни и управан на деформисану подужну осу.

Ако је момент савијања константан, еластична линија је део кружнице веома великог полупречника. Нека је на слици 6.4 приказан (увеличано) део носача који одговара елементарном углу $d\varphi$. И нека се неутрална линија налази на растојању ρ од центра замишљене кружнице. Дужина лука еластичне линије за угао $d\varphi$ износи $dz = \rho d\varphi$. Сада посматрајмо влакно на растојању y од еластичне линије. Дужина тог влакна се променила за Δdz и износи $dz + \Delta dz = (\rho + y)d\varphi$.



Слика 6.4 Део савијеног носача

Како је линијска деформација једнака промени елементарне дужине у односу на првобитну елементарну дужину, линијска деформација у правцу подужне осе z може да се напише као

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} = K \cdot y, \quad (6.26)$$

где је ρ полупречник кривине, а $K=1/\rho$ кривина замишљене кружнице.

Веза напона и деформације дата је Хуковим законом

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \frac{y}{\rho} = E \cdot K \cdot y. \quad (6.2в)$$

Уз све уведене претпоставке, једначине равнотеже (6.1) своде се на три једначине:

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_z dA &= 0, \\ \iint_A y \sigma_z dA &= M_x, \\ \iint_A x \sigma_z dA &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Сада је неопходно извршити њихову анализу. Када се релација (6.2в) уврсти у претходне једначине добија се:

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_z dA &= \iint_A E K y dA = E K \iint_A y dA = E K S_x = 0, \\ \iint_A y \sigma_z dA &= \iint_A y (E K y) dA = E K \iint_A y^2 dA = E K I_x = M_x, \\ \iint_A x \sigma_z dA &= \iint_A x E K y dA = E K \iint_A xy dA = E K I_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

E и K су константе: Моду еластичности и кривина криве.

На основу једначина (6.4) могу се извести следећи закључци:

1. Статички момент за осу x једнак је нули, $S_x = 0$;
2. Центрифугални момент инерције за осе x и y једнак је нули, $I_{xy} = 0$.

Како је статички момент једнак нули само за тежишне осе, следи да је оса x тежишна оса. Пошто је центрифугални момент увек једнак нули за главне тежишне осе, онда је $I_{xy} = I_{12} = 0$, па осе x и y морају да буду главне тежишне осе. Тек када су испуњени ови услови, нормални напон у пресеку може да се израчуна на следећи начин

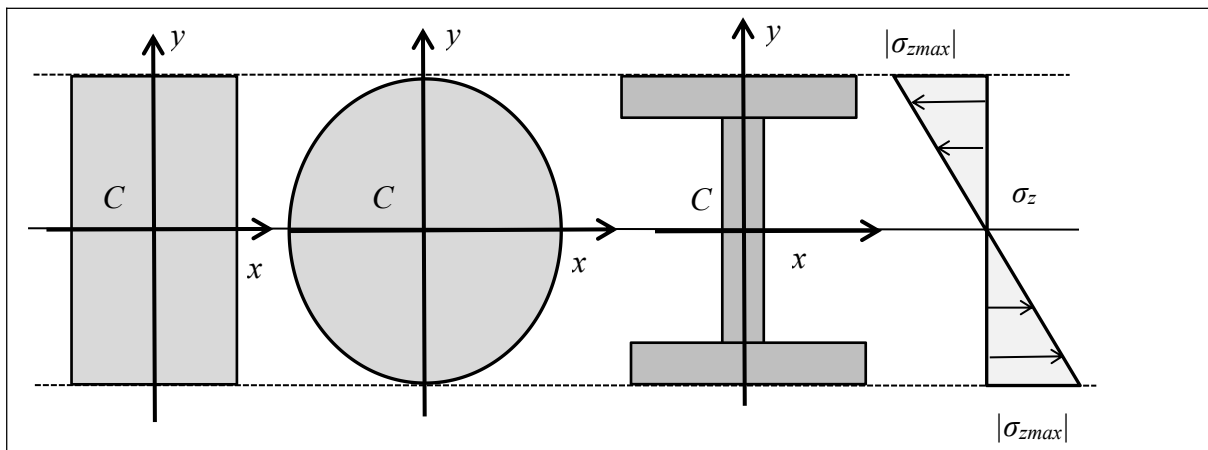
$$E K I_x = M_x \Rightarrow \sigma_z = E K y = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (6.5)$$

Последњи израз показује да је напон у пресеку функција координате y и да је његова промена линеарна. Највећи напон се појављује у најудаљенијим влакнима, за $y = y_{\max}$. За инжењерску примену, максимални напон се одређује као количник оптерећења и отпорног момента, па је зато

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \Rightarrow \sigma_{z(\max)} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (6.6)$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (6.7)$$

W_x је веома важна геометријска карактеристика пресека која се зове отпорни момент за осу x , а њена димензија је дужина на трећи степен. За сложене пресеке рачуна се по дефиницији приказаној изразом (6.7). Расподела нормалног напона код чистог савијања приказана је на слици 6.5.



Слика 6.5 Расподела нормалног напона код чистог савијања

На слици 6.5 приказана су три попречна пресека, правоугаони, кружни и пресек облика I профила. Циљ сваког инжењера је да са што мање материјала обезбеди носивост конструкције. Зато је неопходно правилно одабрати облик пресека и затим га правилно и поставити. Да би се то постигло мора да се познаје расподела напона код свих оптерећења. У нашем случају, код савијања око једне осе, расподела напона је као на слици. Тамо где су напони велики требало би поставити што више материјала, а тамо где су напони мали материјал није потребан. При савијању око једне главне осе види се да је кружни пресек погрешан избор - највише материјала има на средини где је напон мали, па ту материјал није потребан. Нешто бољи избор је правоугаони пресек, али нема потребе за великом количином материјала на осе око које се носач савија. Тако се у инжењерској пракси стигло до облика профила (које смо већ разматрали са тачке израчунавања геометријских карактеристика пресека). Профили су замишљени тако да

имају велике стопе (појасеве) и нешто тањи врат, и одлични су за конструкције које носе савијање у једној равни (савијање око једне осе).

6.2 САВИЈАЊЕ СИЛАМА КОЈЕ ДЕЛУЈУ У ПРАВЦУ ОСЕ y - савијање силама око x осе

Савијање силама је знатно компликованији случај напрезања од чистог савијања. Код савијања силама момент није константан, тако да деформисани носач не може бити део кружнице. Пошто делују и попречне силе, односно силе у равни пресека, логично је да постоје тангенцијални напони у смеру тих сила. Тангенцијални напони изазивају кривљење пресека, тако да се мењају углови γ и не важи Бернулијева претпоставка.

Нормални напони

У инжењерским прорачунима довољно је тачно да се за нормални напон користи исти израз као код чистог савијања, само што овде напон зависи и од координате z по којој се мења момент. Пошто ћемо посматрати само део носача константног попречног пресека нормални напон се рачуна као

$$\sigma_z(z, y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y \Rightarrow \sigma_{z(\max)} = \frac{M_{x\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x}, \quad (6.6)$$

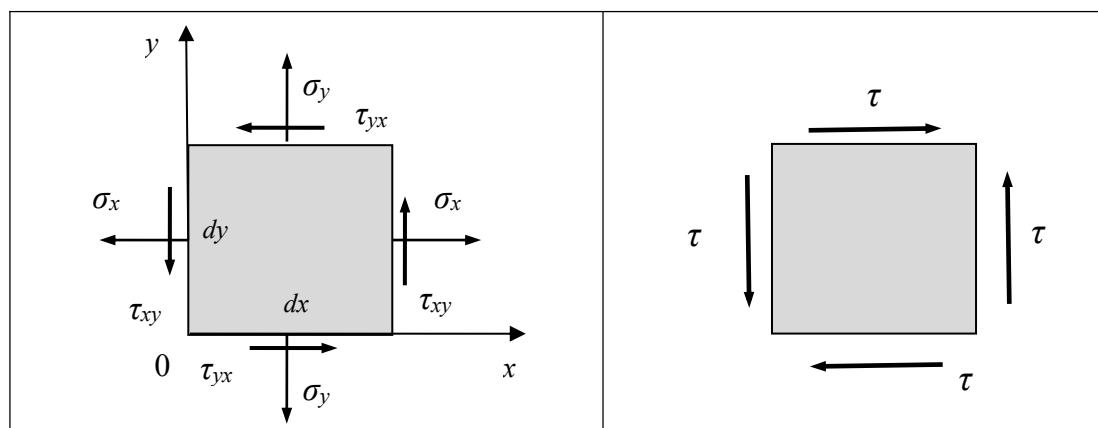
$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (6.7)$$

Да би могли да одредимо израз за напоне смицања, неопходно је да прво прикажемо најважнији став о томе како су рапорешени напони смицања у некој конструкцији. Тај став се назива

Став о коњугованости напона смицања

И експерименти и математичка анализа, показују да тангенцијални напони у два међусобно управним равнима увек имају исти интензитет, а усмерени су или оба ка пресеку, или оба од пресека те две равни.

Став о коњугованости напона смицања може да се изведе на више начина, а овде ће бити приказан најједноставнији (на примеру равног стања напона). На слици 6.6 приказан је, у пројекцији, елемент димензија $dx \cdot dy \cdot dz$. Нормални напони σ_x и σ_y претпостављени су као затежући напони који задовољавају услове равнотеже, док су тангенцијални напони τ_{xy} и τ_{yx} претпостављени тако да, сви „окрећу“ посматрани елемент у позитивном математичком смеру.



Слика 6.6 Коњугованост напона смицања

Да би се извео израз за коњугованост напона смицања, потребно је само формирати једначину равнотеже момената за доњи леви угао O посматраног елемента (координатни почетак) која гласи

$$\left[(\sigma_x dydz) \frac{dy}{2} - (\sigma_x dydz) \frac{dy}{2} \right] + \left[(\sigma_y dx dz) \frac{dx}{2} - (\sigma_y dx dz) \frac{dx}{2} \right] + (\tau_{xy} dydz) dx + (\tau_{yx} dx dz) dy = 0. \quad (6.8)$$

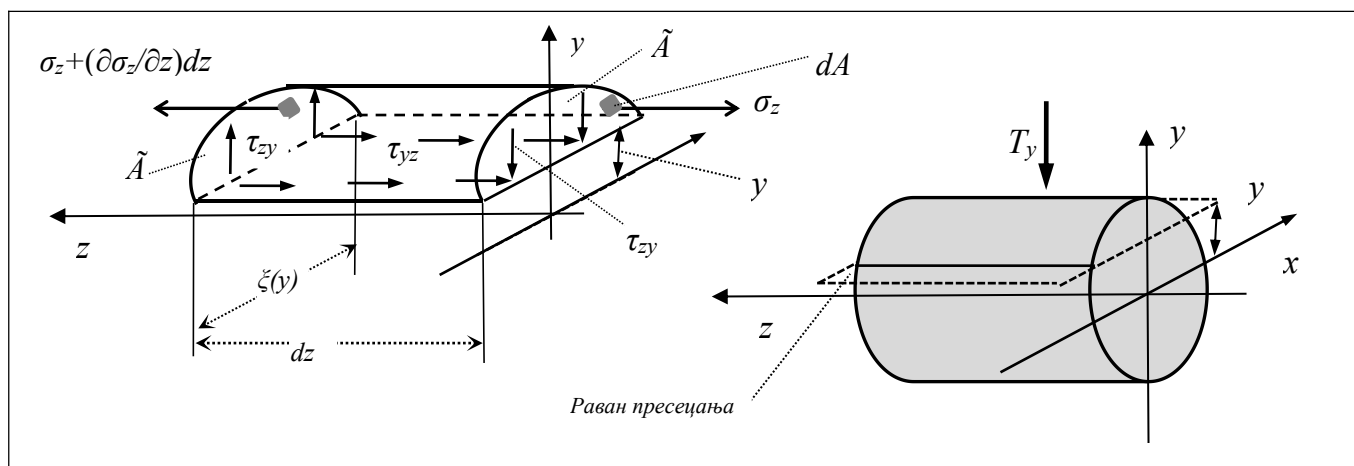
Скраћивањем чланова добија се

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}, \quad (6.9)$$

што представља Став о коњугованости напона смицања који гласи: напони смицања у два међусобно управним равнима су истог интензитета, а усмерени су или ка пресечној ивици те две равни или од ње. Наравно, овај став важи и за тангенцијалне напоне у другим два равнима, тако да је

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}.$$

Уобичајено је да се користи следећа конвенција о знаку напона: нормални напони се сматрају позитивним ако изазивају затезање посматраног дела, а позитивни напони смицања приказани су на слици 6.6 са леве стране.



Слика 6.7 Напони смицања при савијању силама

Да би извели израз за напон смицања погледајмо слику 6.7. Ако на посматрани део носача делује вертикална сила T_y логично је претпоставити да поред нормалних напона σ_z морају у равни пресека да се појаве и смичући напони у правцу те силе, $\tau_{zy} \neq 0$. Ако део носача елементарне дужине dz пресечемо замишљеном равни која је паралелна главној равни xz , у пресеку се појављује напон τ_{yz} који је истог интензитета као и напон τ_{zy} , а смер му се одређује на основу става о коњугованости напона смицања.

Нека је посматрани део носача константног попречног пресека тако да је $I_x = const.$ и $A = const.$ Ако је пресечна равна на удаљењу y од координатне равни xz онда је ширина пресека на том месту $\zeta(y)$. Када се одвоји један део носача, на пример горњи, потребно је прво уцртати све напоне на њему, а затим написати једначину равнотеже сила у правцу подужне осе z . Поред тангенцијалних напона појављују се и нормални напони. Нормални напон σ_z се претпостави као позитиван (затезући) и као функција две координате y и z ; $\sigma_z(y, z)$ На посматраној дужини dz напон $\sigma_z(y, z)$ се промени за малу вредност по координати z па је његова промена $(\partial \sigma_z / \partial z) dz$. Нормални напон делује на одвојеном делу попречног пресека површине \tilde{A} .

Једначина равнотеже сила у правцу осе z гласи

$$-\int_{\tilde{A}} \sigma_z dA + \int_{\tilde{A}} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \tau_{yz} \xi(y) dz = 0,$$

односно после скраћивања

$$\int_{\tilde{A}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA - \tau_{yz} \xi(y) = 0. \quad (6.10)$$

Парцијални извод нормалног напона само по координати z је на основу (6.6) и познате релације из статике за везу момента савијања и трансверзалних сила

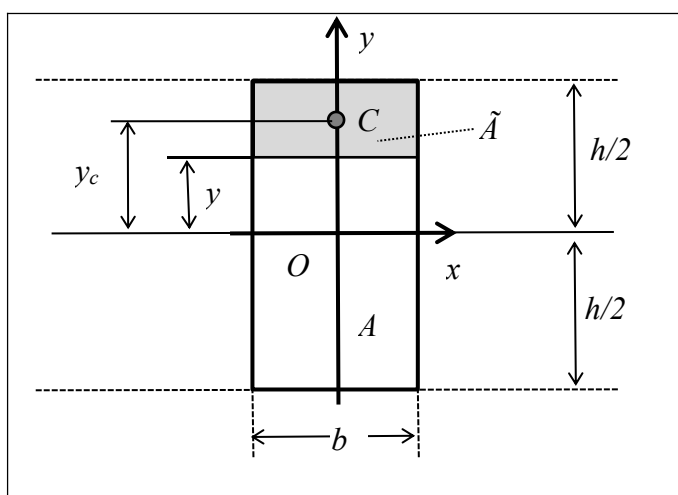
$$\sigma_z(z, y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z(z, y)}{\partial z} = \frac{\partial M_x(z)}{\partial z} \frac{y}{I_x} = T_y(z) \frac{y}{I_x}. \quad (6.11)$$

Тако се добија израз за напон смицања који је погодан за употребу у техници

$$\int_{\tilde{A}} \frac{T_y(z)}{I_x} y dA - \tau_{yz} \xi(y) = 0 \Rightarrow \frac{T_y(z)}{I_x} \int_{\tilde{A}} y dA = \tau_{yz} \xi(y),$$

$$\tau_{yz}(y, z) = \frac{T_y(z)}{I_x} \frac{\tilde{S}_x(y)}{\xi(y)}. \quad (6.12)$$

Тангенцијални напон који изазива сила у правцу осе y пропорционалан је интензитету те силе у посматраном пресеку $T_y(z)$, а обрнуто пропорционалан моменту инерције пресека за осу око које се врши савијање I_x . Ове две величине су у посматраном пресеку константне. Даље, напон је пропорционалан статичком моменту дела површине од места пресецања (места одређивања напона) до краја пресека $\tilde{S}_x(y)$, а обрнуто пропорционалан ширини пресека на том месту $\xi(y)$.



Слика 6.8 Правоугаони попречни пресек

- Расподела тангенцијалних напона за правоугаони попречни пресек

Површина правоугаоника је $A = bh$, а момент инерције за осу x $I_x = \frac{bh^3}{12}$.

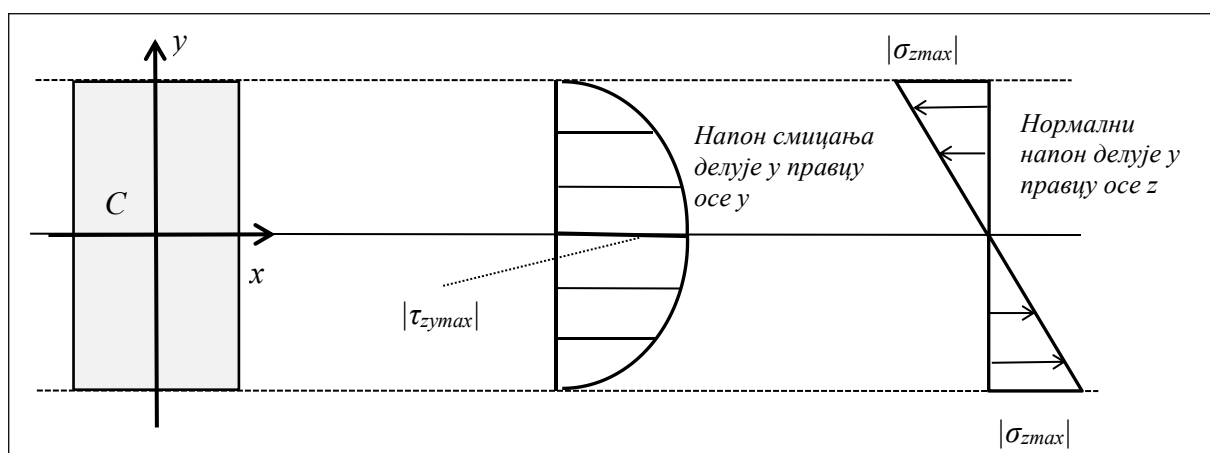
Површина пресека од места на удаљености y (од осе x) до краја попречног пресека је $\tilde{A}_x = b\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{b}{2}(h - 2y)$.

Координата тежишта овог дела површине пресека је $y_C = \frac{1}{4}(h + 2y)$.

Тако се добија да је статички момент овог дела површине пресека $\tilde{S}_x = \tilde{A}_x y_C = \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)$.

Када се све наведено унесе у израз (6.12) добија се

$$\tau_{yz}(y, z) = \frac{T_y(z)}{I_x} \frac{\tilde{S}_x(y)}{\xi(y)} \Rightarrow \tau_{yz}(y, z) = \frac{T_y(z)}{bh^3} \frac{\frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)}{b} = \frac{T_y(z)}{\frac{2}{3}A} \left[1 - 4\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]. \quad (6.13)$$



Слика 6.9 Расподела напона код савијања силама

Расподела напона одговара параболи другог реда, а максимални напон појављује се у средини пресека и износи

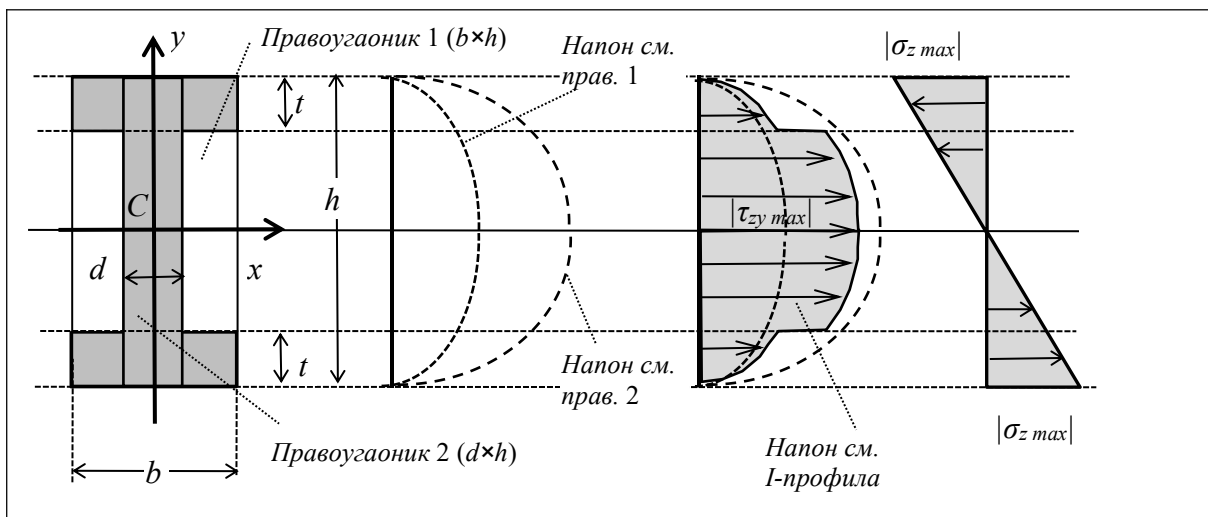
$$\tau_{yz \max}(z) = \tau_{yz}(y = 0, z) = \frac{T_y(z)}{\frac{2}{3}A}. \quad (6.14)$$

У техничкој пракси, а и приликом примене рачунарских програма из ове области, користи се једноставан израз

$$\tau_{yz \max}(z) = \frac{T_y(z)}{A_{yred}}. \quad (6.15)$$

За пресеке који се користе у машинству унапред је размотрена расподела напона и израчунате су редуковане површине пресека A_{red} , тако да се читају из одговарајућих таблица.

Сложенији пресеци као што су I-профил, U-профил или Z-профил апроксимирају се правоугаоницима и одговарајућа расподела смичућих напона приказана је на слици 6.10.



Слика 6.10 Расподела нормалних и смичућих напона код I-профила

Примери

За задата оптерећења (сила и момент) и задате попречне пресеке, одредити σ_{\max} и τ_{\max} користећи Таблице из ОМ и основне обрасце.

Профил	I - 10	I - 24	U - 16
Сила [kN]	10	100	100
Момент [kNcm]	100	3000	1000
Момент инерције [cm ⁴]	171	4250	925
Отпорни момент [cm ³]	34,2	354	116
Статички момент половине пресека [cm ³]	19,9	206	68,8
Ширина пресека на оси	0,45	0,87	0,75
Нормални напон [kN/cm ²] $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$	2,92	8,47	8,62
Смичући напон [kN/cm ²] $\tau = \frac{T_y}{I_x} \frac{\tilde{S}_x^{1/2}}{\xi}$	2,59	5,57	9,92