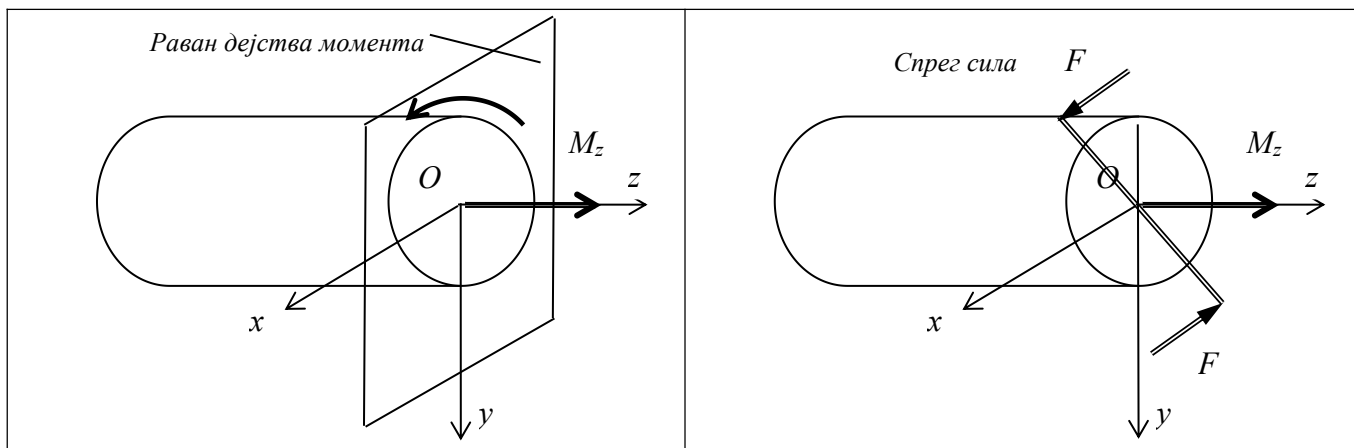


5. УВИЈАЊЕ - ТОРЗИЈА

5.1 Увијање носача кружног и кружно-прстенастог попречног пресека

Нека у посматраном пресеку носача (кружног или кружно-прстенастог попречног пресека) делује само момент M_z , а нека су све остале компоненте вектора оптерећења једнаке нули. Раван дејства овог момента садржи попречни пресек носача (вектор момента је нормалан на равну у којој он делује). Ова врста напрезања зове се увијање или торзија.



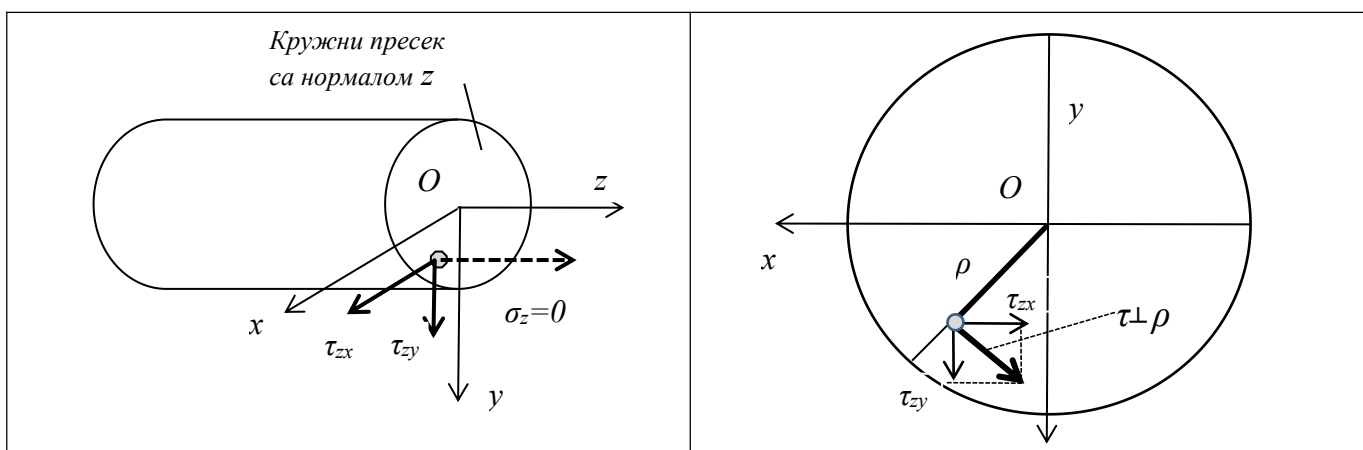
Слика 5.1 Увијање - торзија

Проблем увијања се увек јавља код машинских конструкција које преносе снагу обртањем око подужне осе. Анализа ове врсте оптерећења одвија се применом Полуобратне методе.

Претпоставка о напонима

Како оптерећење делује у равни попречног пресека, напони у равни пресека (тангенцијални напони) сигурно су различити од нуле, а напон у правцу подужне осе – нормални напон једнак је нули

$$\tau_{zy} \neq 0, \quad \tau_{zx} \neq 0 \quad \text{и} \quad \sigma_z = 0.$$



Слика 5.2 Претпоставка о напонима

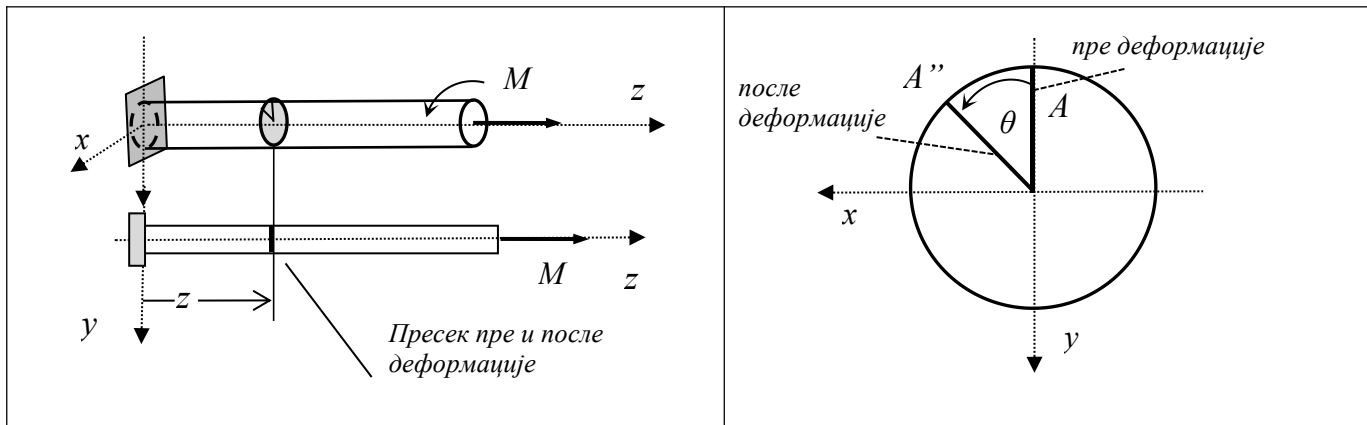
Да би што једноставније спровели математичку анализу, увешћемо као претпоставку и чињеницу да је укупан тангенцијални напон у некој тачки пресека нормалан на полупречник (ово може и да се докаже)

$$\vec{\tau}_{zy} + \vec{\tau}_{zx} = \vec{\tau} \perp \rho. \quad (5.1a)$$

Претпоставка о деформацијама

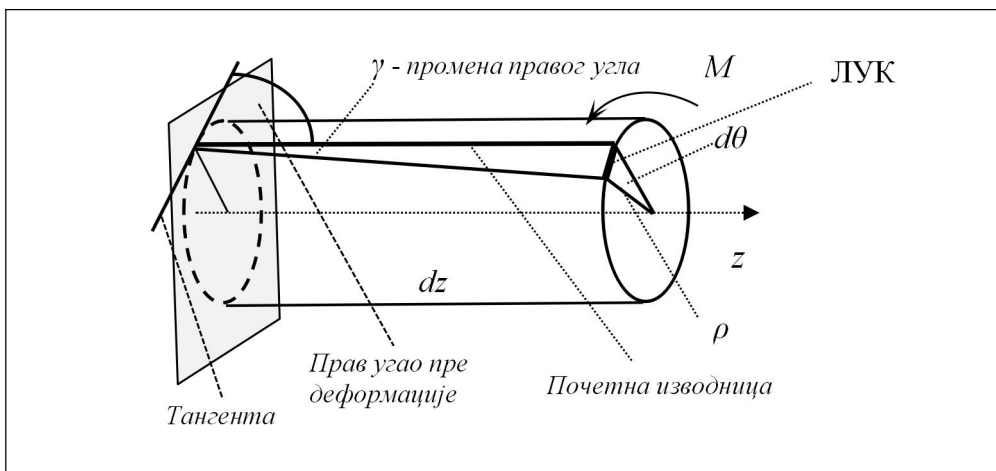
Попречни пресек који је пре деформације био раван и управан на подужну осу, и после деформације остао је раван и управан на подужну осу. Није се померио у правцу подужне осе, већ је дошло само до његовог заокретања за неки угао θ у односу на центар пресека (слика 5.3), тако да је

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{и} \quad \gamma \neq 0 .$$



Слика 5.3 Претпоставка о деформацијама

Угао θ представља заокретање пресека у односу на почетни положај, назива се угао увијања или угао заокретања и изражава се у радијанима или степенима ($1 \text{ rad} = 180/\pi^\circ$ или $1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$).



Слика 5.4 Елементарна запремина изложена увијању

Да би написали везу између угла увијања θ и угаоне деформације - клизања γ , посматрајмо део запремине елементарне дужине dz и полупречника ρ приказане на слици 5.4. Ако замислимо да је леви крај фиксиран, и уз претпоставку да се дужина изводнице не мења приликом ротације, дужина лука може се написати на два начина

$$\text{дужина лука} = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\theta$$

одакле је

$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = \theta' \quad \text{односно} \quad \gamma = \rho\theta'. \quad (5.16)$$

Величина $\theta'(z) = \frac{d\theta}{dz}$ назива се релативни угао увијања и описује промену угла увијања по дужини носача. Уобичајено је да се изражава у rad/cm или $^\circ/\text{m}$ ($1 \text{ rad/cm} \times 18000/\pi = 1^\circ/\text{m}$).

Веза напона и деформације представљена је Хуковим законом за тангенцијалне - смичуће напоне

$$\tau = G\gamma \quad (5.1\text{в})$$

тако да се уз релацију (5.1б) добија израз

$$\tau(\rho, z) = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \theta'(z) \quad (5.2)$$

који приказује да **напон није константан у попречном пресеку већ зависи од растојања посматране тачке од центра пресека.**

Након увођења претпоставки разматрају се једначине равнотеже гредног елемента приказане изразима (3.11), које сада имају облик:

Једначине равнотеже сила	Једначине равнотеже момената
1. $\iint_A \tau_{zx} dA = 0,$	4. $\iint_A y \sigma_z dA = 0,$
2. $\iint_A \tau_{zy} dA = 0,$	5. $\iint_A x \sigma_z dA = 0,$
3. $\iint_A \sigma_z dA = 0,$	6. $\iint_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA = M_z.$

(5.3)

Уз уведене претпоставке, једначине 3, 4 и 5 су унапред задовољене, док једначине 1 и 2 приказују да у пресеку може бити трансверзалних сила, али оне морају да делују у спреговима. Зато је неопходно детаљније анализирати само последњу једначину. Уз претпоставку (5.1а) шеста једначина равнотеже има облик

$$\iint_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA = \iint_A \rho \cdot \tau dA = M_z. \quad (5.4)$$

Заменом (5.2) у (5.4) добија се

$$\iint_A \rho \cdot \tau dA = \iint_A \rho \cdot (G \cdot \rho \cdot \theta') dA = G \cdot \theta' \iint_A \rho^2 dA = G \cdot \theta' \cdot I_0 = M_z. \quad (5.5)$$

G је материјална константа (карактеристика материјала која за челик износи $G \approx 8080 \text{ kN/cm}^2$), а релативни угао увијања је константан у целом пресеку, тако да ове величине иду испред интеграла. На тај начин добија се да је интеграл у изразу (5.5) једнак по дефиницији поларном моменту инерције тог пресека.

Први израз који је неопходан за прорачун напона и деформација при увијању гласи

$$\theta'(z) = \frac{M_z(z)}{G \cdot I_0(z)}, \quad (5.6)$$

релативни угао увијања неког пресека пропорционалан је моменту торзије у пресеку, а обрнуто пропорционалан поларном моменту инерције тог пресека.

Ако посматрамо носач дужине l и константног пресека, на коме делује константан момент увијања $M_z=M_t=M_u$, угао увијања тог дела конструкције износи

$$I_0(z) = \text{const.} \text{ и } M_z(z) = \text{const.} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \int_0^l \theta'(z) dz = \theta_0 + \int_0^l \frac{M_z}{G \cdot I_0} dz = \theta_0 + \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_0}. \quad (5.7)$$

Израз за тангенцијални напон добија се заменом релације (5.6) у (5.2)

$$\tau(\rho, z) = G \cdot \gamma(\rho, z) = G \cdot \rho \cdot \theta'(z) = G \cdot \rho \cdot \frac{M_z(z)}{G \cdot I_0(z)} = \frac{M_z(z)}{I_0(z)} \cdot \rho. \quad (5.8)$$

Највећи напон у једном попречном пресеку појављује се на ободу пресека, односно у тачкама са највећим растојањем од центра ρ_{\max} и износи

$$\tau_{\max}(z) = \frac{M_z(z)}{I_0(z)} \cdot \rho_{\max}(z) = \frac{M_z(z)}{\left(\frac{I_0(z)}{\rho_{\max}(z)} \right)} = \frac{M_z(z)}{W_0(z)}. \quad (5.9)$$

Карактеристика пресека

$$W_0(z) = \frac{I_0(z)}{\rho_{\max}(z)} \quad (5.10)$$

назива се поларни отпорни момент, има димензију дужине на трећи степен и за компликованије пресеке рачуна се на основу дефиниције дате изразом (5.10). Ако аксијални момент инерције

кружног пресека пречника D износи $I_x = \frac{D^4 \pi}{64}$, онда је поларни отпорни момент

$$W_0 = \frac{I_0}{D/2} = \frac{2I_x}{D/2} = \frac{D^3 \pi}{16}.$$

За кружно прстенасти пресек спољашњег пречника D и унутрашњег пречника d , при чему је $\psi = d/D$ и $0 \leq \psi < 1$, поларни момент инерције износи

$$I_0 = 2I_x = 2 \left(\frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^4 \pi}{64} \right) = \frac{D^4 \pi}{32} (1 - \psi^4),$$

а поларни отпорни момент је

$$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{D^4 \pi}{32} (1 - \psi^4)}{D/2} = \frac{D^3 \pi}{16} (1 - \psi^4) \neq 2W_x. \quad (5.11)$$

ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ШТАПОВА ИЗЛОЖЕНИХ УВИЈАЊУ

Уобичајено је да се користе два критеријума за димензионисање штапова кружног и кружно прстенастог пресека:

1. Критеријум дозвољеног напона и
2. Критеријум дозвољеног релативног угла увијања.

Димензионисање на основу дозвољеног напона τ_{doz}

Из (5.9) следи

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_0} \leq \tau_{doz} \Rightarrow W_0 \geq \frac{M_z}{\tau_{doz}}$$

$$W_0 = \frac{D^3 \pi}{16} (1 - \psi^4) \geq \frac{M_t}{\tau_{doz}} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi (1 - \psi^4) \tau_{doz}}}. \quad (5.12)$$

Димензионисање на основу дозвољеног релативног угла увијања θ'_{doz}

Из (5.6) следи

$$\theta' = \frac{M_z}{G \cdot I_0} \leq \theta'_{doz} \Rightarrow I_0 \geq \frac{M_z}{G \cdot \theta'_{doz}},$$

$$I_0 = \frac{D^4 \pi}{32} (1 - \psi^4) \geq \frac{M_t}{G \theta'_{doz}} \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{\pi G (1 - \psi^4) \theta'_{doz}}}. \quad (5.13)$$

Увијање штапа (греде) кружног попречног пресека - кратак резиме

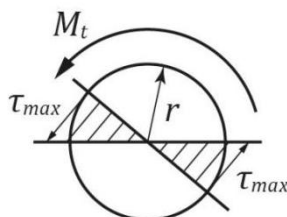
Основни обрасци који дефинишу величину и положај највећих напона смицања, као и величину релативних и апсолутних углова увијања кружног попречног пресека при увијању штапа (греде) моментом $M_t(z)$ су:

- Напон $\tau(\rho, z)$ има правац тангенте на кружницу полуречника ρ , $0 \leq \rho \leq R$,

- Максимални напон у пресеку износи $\tau_{\max}(z) = \frac{M_t(z)}{I_0(z)} \rho_{\max} = \frac{M_t(z)}{W_0(z)}$, (5.14)

- Релативни и апсолутни угао увијања су: $\theta'(z) = \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M_t(z)}{G I_0(z)}$, $\theta(z) = \theta_0 + \int_0^z \theta'(z) dz$.

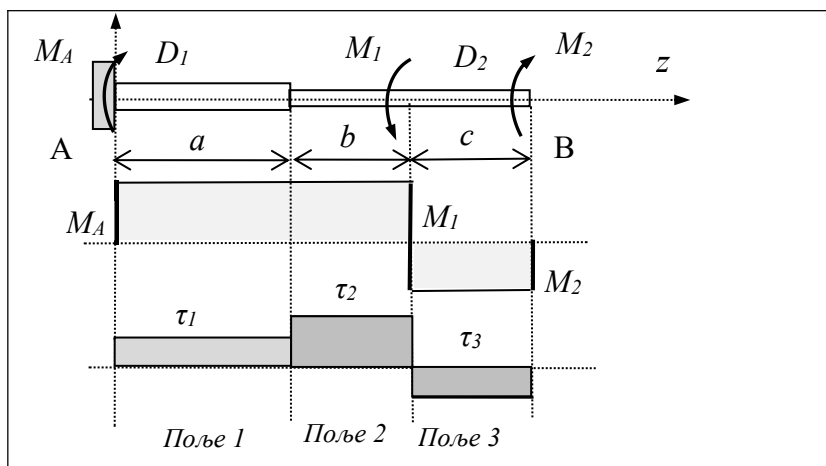
На слици 5.5 приказана је расподела напона смицања за кружни и кружно прстенасти пресек. Напони су највећи на ободу, док су у централном делу пресека мали. Зато је (кад је то могуће) добро користити прстенасте пресеке, односно избацити (непотребни) материјал из области малих напона и тако сачувати носивост, а смањити масу носача.



Слика 5.5 Расподела напона при увијању штапа кружног попречног пресека

Пример 1.

Одредити угао увијања пресека В степенастог вратила приказаног на скици. Нацртати дијаграм максималних смичућих напона у пресецима. Задате вредности : $M_1, M_2, \phi D_1, \phi D_2, G, a, b, c$



Слика 5.6 Пример 1

1. Вратило приказано на слици има само један ослонац А тако да се реакција ослонца M_A може одредити на основу статичке једначине. Зато је овакав проблем статички одређен и статичка једначина гласи

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow M_A - M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow M_A = M_1 - M_2.$$

На основу ове једначине нацрта се дијаграм момената увијања.

2. Вратило се подели на поља тако да је у сваком пољу константан пресек и константан момент. Носач на слици се дели на три поља:

	Поље 1	Поље 2	Поље 3
Момент	$M_A = M_1 - M_2$	$M_A = M_1 - M_2$	M_2
Момент инерције	I_{01}	I_{02}	I_{02}
Отпорни момент	W_{01}	W_{02}	W_{02}
Дужина	a	b	c
G материјала	G	G	G
Напон τ_{\max}	$ \tau_{1\max} = \left \frac{M_1 - M_2}{W_{01}} \right $	$ \tau_{2\max} = \left \frac{M_1 - M_2}{W_{02}} \right $	$ \tau_{3\max} = \left \frac{M_2}{W_{02}} \right $
Релативни угао увијања	$ \theta'_1 = \left \frac{M_1 - M_2}{GI_{01}} \right $	$ \theta'_2 = \left \frac{M_1 - M_2}{GI_{02}} \right $	$ \theta'_3 = \left \frac{M_2}{GI_{02}} \right $

Напон $\tau_{i\max}$ се на дијаграм наноси за свако поље независно.

3. Угао заокретања (увијања) се одређује на основу израза

$$\Delta \theta_i = \frac{M_i l_i}{GI_{0i}} \rightarrow \Delta \theta = \sum_{i=1}^3 \Delta \theta_i = \sum_{i=1}^3 \frac{M_i l_i}{GI_{0i}}.$$

Тако је

$$\theta_B = \theta_A + \sum_{i=1}^3 \Delta\theta_i = \left[\frac{(M_1 - M_2)a}{GI_{01}} \right] + \left[\frac{(M_1 - M_2)b}{GI_{02}} \right] + \left[-\frac{M_2 c}{GI_{02}} \right].$$

Када се пише израз за угао увијања пазе се на знак момената у пресецима.

Последњи израз може да се напише и на следећи начин

$$\theta_B = \frac{M_1}{G} \left[\frac{a}{I_{01}} + \frac{b}{I_{02}} \right] - \frac{M_2}{G} \left[\frac{a}{I_{01}} + \frac{b+c}{I_{02}} \right] = \Delta\theta(od M_1) + \Delta\theta(od M_2).$$

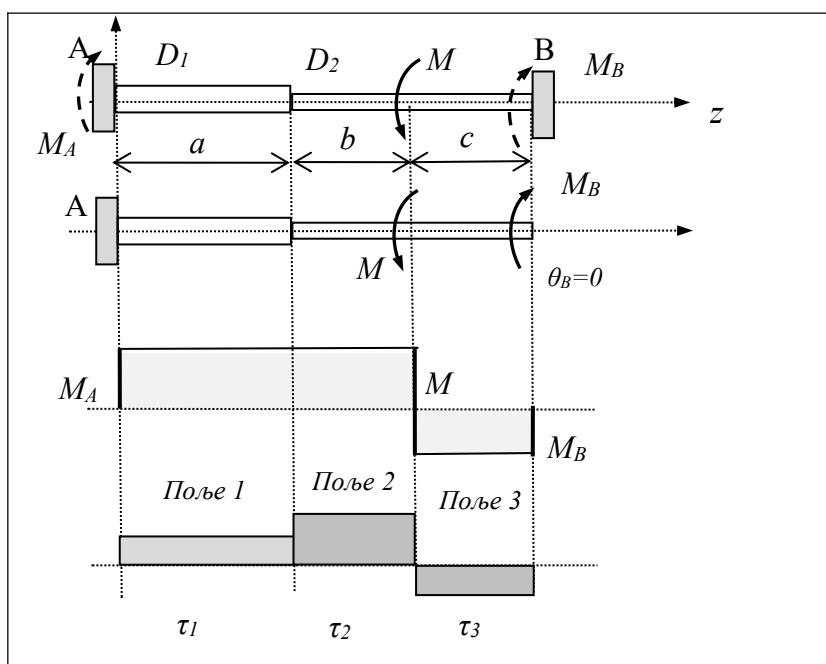
Пример 2.

Одредити отпоре ослонаца степенастог вратила ослоњеног на оба краја, приказаног на скици.

Димензионисати носач на основу задатог критеријума (τ_{doz} и/или θ'_{doz}).

Одредити напоне у пресецима и нацртати дијаграм напона.

Задате вредности : $M, D_1/D_2, G, a, b, c, \tau_{doz}$ и/или θ'_{doz}



Слика 5.7 Пример 2

1. Штап приказан на слици има два ослоњаца А и В тако да се јављају две непознате реакције ослоњаца, моменти увијања M_A и M_B . Пошто може да се напише само једна статичка једначина, овај проблем је једанпут статички неодређен

$$2(\text{број непознатих}) - 1(\text{број статичких једначина}) = 1(\text{број статичке неодређености}).$$

Прво се пише **статичка једначина** у складу са претпостављеним смером момената

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow M_A - M + M_B = 0 \Rightarrow M_A = M - M_B.$$

За решавање проблема потребна је још једна једначина која се зове допунска једначина и пише се применом Методе сила.

2. **Метода сила** подразумева да се проблем право претвори у статички одређени проблем уклањањем сувишних веза (ослонаца). На овом примеру уклоњен је ослонац В. Утицај ослонца се замени његовом реакцијом и напише се одговарајући услов по померањима. У нашем задатку тај услов гласи

Угао увијања ослонца В једнак је нули,

односно допунска једначина је

$$\theta_B = 0.$$

Начин писања ове једначине приказан је у претходном примеру, па је

$$\theta_B = \frac{M_B}{G} \left[\frac{a}{I_{01}} + \frac{b+c}{I_{02}} \right] - \frac{M}{G} \left[\frac{a}{I_{01}} + \frac{b}{I_{02}} \right] = 0,$$

тако да се добија решење за момент у ослонцу В

$$M_B = \frac{M \left(a + b \frac{I_{01}}{I_{02}} \right)}{a + (b+c) \frac{I_{01}}{I_{02}}}.$$

Момент увијања у ослонцу А је на основу статичке једначине

$$M_A = M - M_B = \frac{M \left(c \frac{I_{01}}{I_{02}} \right)}{a + (b+c) \frac{I_{01}}{I_{02}}}.$$

Однос поларних момената инерције одређује се на основу задатог односа пречника, тако да је

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{D_1^4 \frac{\pi}{32}}{D_2^4 \frac{\pi}{32}} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4.$$

3. Да би се извршило димензионисање на основу било ког критеријума неопходно је одредити критично место за димензионисање, односно критични пресек. На пример, напон је пропорционалан интензитету момента, а обрнуто пропорционалан отпорном моменту (односно величини пресека). То значи да се димензионисање врши у пољу великог момента и малог пресека (у пољу навећег напона). Исто важи и за релативни угао увијања.

За одређивање напона штап (вратило) се подели на поља (у сваком пољу је константан пресек и константна сила) и штап на слици има три поља.

	Поље 1	Поље 2	Поље 3
Момент увијања (интензитет)	$ M_A $	$ M_A $	$ M_B $
Отпорни момент	W_{01}	W_{02}	W_{02}
Момент инерције	I_{01}	I_{02}	I_{02}
Дужина	a	b	c
G материјала	G	G	G
Напон τ_{\max}	$ \tau_{1\max} = \left \frac{M_A}{W_{01}} \right $	$ \tau_{2\max} = \left \frac{M_A}{W_{02}} \right $	$ \tau_{3\max} = \left \frac{M_B}{W_{02}} \right $
Релативни угао увијања	$ \theta'_1 = \left \frac{M_1 - M_2}{GI_{01}} \right $	$ \theta'_2 = \left \frac{M_1 - M_2}{GI_{02}} \right $	$ \theta'_3 = \left \frac{M_2}{GI_{02}} \right $

Када се одреди критично поље, димензионисање се обави једноставном применом одговарајућих образаца који за пун пресек гласе:

$$\theta'_{doz} \Rightarrow D_{kr.p.} \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{kr.p.}}{\pi G \theta'_{doz}}},$$

$$\tau_{doz} \Rightarrow D_{kr.p.} \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kr.p.}}{\pi \tau_{doz}}}.$$

На основу пречника у критичном пољу и задатог односа D_1/D_2 одреди се и други пречник и израчунају потребне геометријске карактеристике. Затим се нацрта дијаграм напона.

Напомене:

Задати однос пречника не сме да се мења да се не поремете реакције ослонаца.

Ако не може унапред са сигурношћу да се одреди критично поље, димензионисање може да се изврши и преко више поља, а да се на крају усвоје највеће вредности пречника.