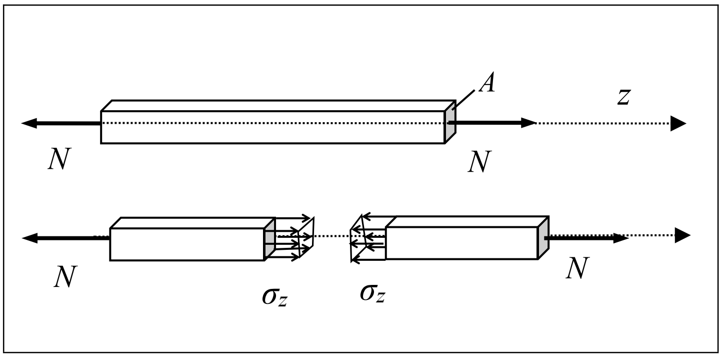
4. НАПРЕЗАЊЕ У ПОДУЖНОМ ПРАВЦУ (АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ)



Слика 4.1 *Подужно - аксијално напрезање*

Подужно или аксијално напрезање је најпростија врста напрезања где у попречном пресеку конструктивног елемента делују само оптерећења у правцу подужне осе - подужне силе $N(z)$. Зато се ова врста напрезања назива и **једноосно** напрезање.

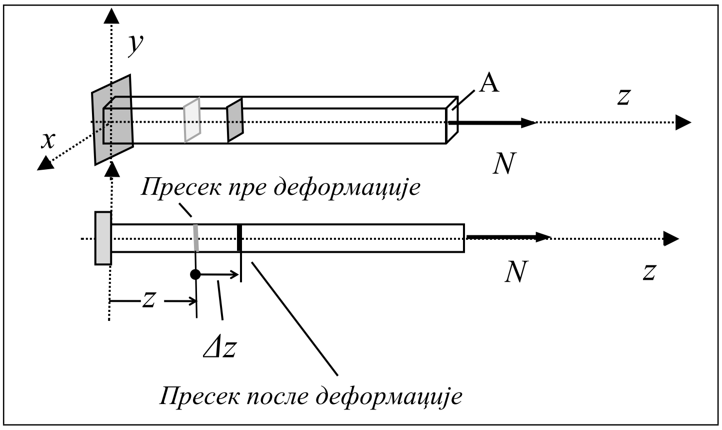
За анализу напона и деформација код релативно једноставних случајева напрезања користи се Полуобратна метода теоријске анализе. Ова метода подразумева увођење одговарајућих реалних претпоставки о напонима и деформацијама и разматрање услова равнотеже.

Претпоставка о напонима
Напони у равни пресека (тангенцијални напони) једнаки су нули, а постоји само напон у правцу дејства оптерећења – нормални напон

$$\tau_{zy} = \tau_{zx} = 0\,,\ \sigma_z \neq 0\,. \tag{4.1а}$$

Претпоставка о деформацијама
Попречни пресек који је пре деформације био раван и управан на подужну осу, и после деформације остао је раван и управан на подужну осу. Дошло је само до његовог транслаторног померања (слика 4.2), тако да је

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(z) \quad \text{и} \quad \varepsilon_z = const. \ \text{ у једном попречном пресеку.} \tag{4.1б}$$



Слика 4.2 *Претпоставка о деформацијама*

Веза напона и деформације представљена је Хуковим законом, па је

$$\sigma_z = E\varepsilon_z(z) \Rightarrow \sigma_z = \sigma_z(z). \tag{4.1в}$$

Напон је константан у попречном пресеку и зависи само од подужне координате. Овај закључак важи само за попречне пресеке довољно удаљене од места деловања оптерећења или од места промене геометрије штапа. Нека је дужина штапа l, а највећа димензија у попречном пресеку b (за сваки штап $l \geqq 10b$). Експериментима је показано да се равномерна расподела напона појављује већ у пресецима на растојању $2b$ од места постављања оптерећења. Ово се назива **Сен-Венанов принцип**. Такође, на местима промене геометрије (промене димензија или облика попречног пресека) долази до појаве концентрације напона.

Након увођења претпоставки разматрају се једначине равнотеже гредног елемента приказане изразима (3.11).

Анализом треће једначине равнотеже добија се

$$\iint_A \sigma_z(z)dA = \sigma_z(z)A(z) = N(z) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A(z)}. \tag{4.2}$$

Нормални напон једнак је количнику силе у пресеку и његове површине. Одговарајућа подужна деформација од механичке силе ε_z^F, као и укупно померање пресека са координатом z добијају се на основу Хуковог закона

$$A(z) \neq const. \;\Rightarrow\; \varepsilon_z^F(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{N(z)}{EA(z)} \;\Rightarrow\; \Delta z = \int_0^z \frac{N(z)}{EA(z)}dz. \tag{4.3}$$

Прва, друга и шеста једначина равнотеже су идентички задовољене зато што су и тангенцијални напони, и трансверзалне силе, и момент увијања једнаки нули. Остало је да се размотре једначине 4 и 5 у којима фигуришу нормални напони. Како су моменти савијања нула, а нормални напон је константан у попречном пресеку (па је за посматране интеграле константа и иде испред интеграла), те једначине постају

$$\iint_A x\sigma_z(z)dA = \sigma_z(z)\iint_A xdA = \sigma_z(z)S_y(z) = 0, \tag{4.4а}$$

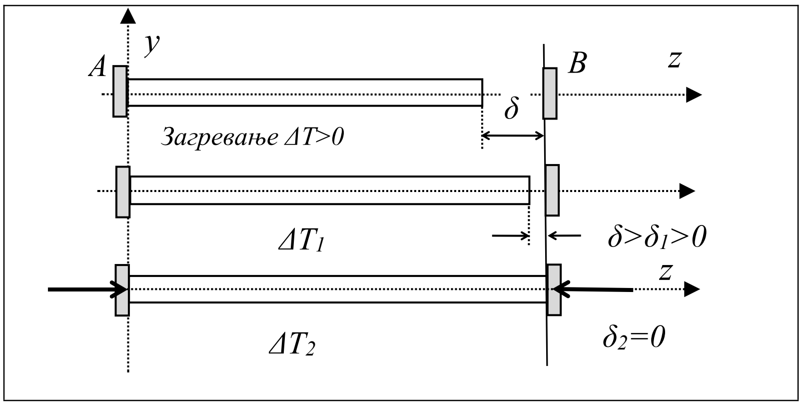
$$\iint_A y\sigma_z(z)dA = \sigma_z(z)\iint_A ydA = \sigma_z(z)S_x(z) = 0. \tag{4.4б}$$

Да би ове једначине биле задовољене неопходно је да статички моменти S_x и S_y буду једнаки нули. Како су статички моменти једнаки нули само за тежишне осе, закључује се да осе x и y морају да буду тежишне осе, односно правац подужне силе пролази кроз тежишта попречних пресека.

У случају да на посматрани штап делује и температурска промена ΔT, линијска деформација рачуна се помоћу коефицијента линеарног термичког ширења α и гласи

$$\varepsilon_z^{\circ} = \alpha\Delta T, \tag{4.5}$$

при чему **при оптерећењима овог типа не важи класичан Хуков закон**. Нека је растојање између десног краја штапа приказаног на слици 4.3 и ослонца B зазор δ. Када почне загревање штапа повећава се његова дужина и смањује се зазор, тако да за температурску промену ΔT_1 зазор постаје δ_1 ($\delta > \delta_1 > 0$). При томе се у штапу не појављују напони зато што је његов десни крај слободан и ширење штапа се несметано одвија. Када се температура довољно повећа, слободан крај штапа удара у ослонац *B* који спречава његово даље ширење, тако да се у ослонцима појављују механичке силе. Тек тада се јавља нормални напон услед њиховог дејства и израчунава се применом израза (4.2).



Слика 4.3 *Загревање правог штапа*

Померање пресека одређује се применом израза

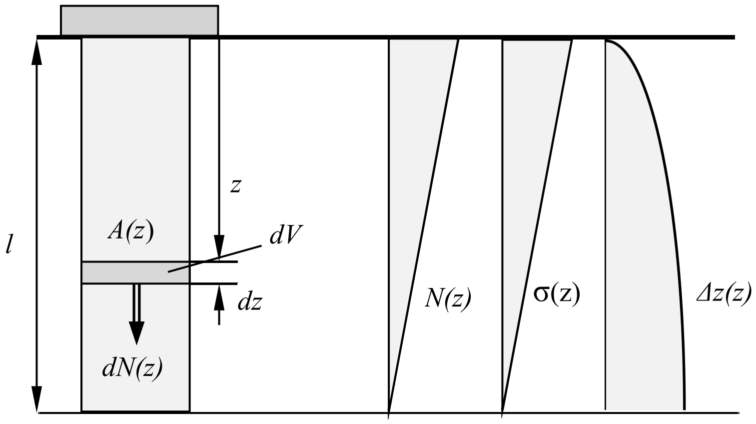
$$\Delta z = \int_0^z \varepsilon_z \, dz = \int_0^z \left(\varepsilon_z^F + \varepsilon_z^\circ\right) dz = \int_0^z \left(\frac{N(z)}{EA(z)} + \alpha \Delta T\right) dz \ ,$$

односно за штап првобитне дужине *l* и константног пресека, када је сила у свим пресецима константна, померање једног краја одређује се као

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{N}{E\,A} + \alpha\,\Delta T\right) dz = \frac{N\,l}{E\,A} + \alpha\,\Delta T\,l \ . \tag{4.6}$$

Последњи израз показује да при дејству механичке силе померање зависи од површине попречног пресека и врсте материјала, док померања од термичких оптерећења не зависе од површине пресека. Коефицијент линеарног термичког ширења α за челик износи $1{,}2\times10^{-5}$ K^{-1} (или $°C^{-1}$).

Код аксијалног напрезања је интересантно урадити анализу утицаја сопствене тежине конструкције, јер је то веома значајно за све грађевинске објекте.



Слика 4.4 *Утицај сопствене тежине*

Нека је ρ густина материјала, а g убрзање земљине теже. Сила која делује на елементарну запремину $dV = A(z)dz$ износи

$$dN(z) = g\rho dV = g\rho A(z)dz\,,$$

тако да је износ укупне силе у пресеку z

$$N(z) = \int_z^l dN(z) = \int_z^l g\rho A(z)dz = g\rho\int_z^l A(z)dz\,, \tag{4.7}$$

што у случају константног пресека износи

$$A(z) = const. \Rightarrow N(z) = g\cdot\rho\cdot A\cdot(l-z)\,. \tag{4.8}$$

Одговарајућу линијску деформацију даје Хуков закон

$$\varepsilon_z(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{N(z)}{A\,E} = \frac{g\,\rho(l-z)}{E}\,, \tag{4.9}$$

док је издужење штапа у посматраном пресеку

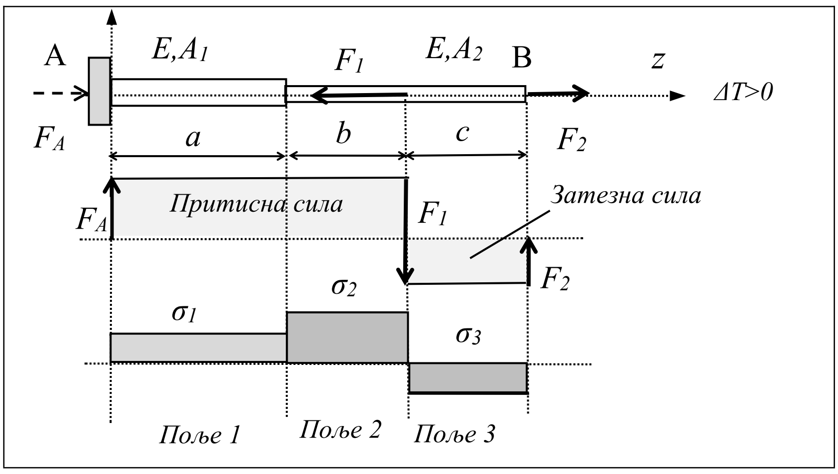
$$\Delta z = \int_0^z \frac{g\rho}{E}(l-z)dz = \frac{g\rho}{E}\left[lz - \frac{z^2}{2}\right]_0^z.$$

Ако је са $Q = g\,\rho\,l\,A$ означена тежина целог штапа, укупно издужење штапа рачуна се као

$$\Delta l = \int_0^l \frac{g\rho}{E}(l-z)dz = \frac{Q\,l}{2EA}\,. \tag{4.10}$$

Пример 1.

Одредити померање пресека B степенастог штапа приказаног на скици.
Задате вредности : F_1, F_2, A_1, A_2, E, a, b, c, α, ΔT



Слика 4.5 *Пример 1*

1. Штап приказан на слици има само један ослонац A тако да се реакција ослонца F_A може одредити на основу статичке једначине. Зато је овакав проблем статички одређен и статичка једначина гласи

$$\sum F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A - F_1 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F_1 - F_2 \,.$$

На основу ове једначине нацрта се дијаграм аксијалних сила где се силе надовезују једна на другу.

2. Штап се подели на поља тако да је у сваком пољу константан пресек и константна сила. Штап на слици се дели на три поља:

	Поље 1	Поље 2	Поље 3
Сила	$\lvert F_A = F_1 - F_2 \rvert$	$\lvert F_A = F_1 - F_2 \rvert$	$\lvert F_2 \rvert$
Површина пресека	A_1	A_2	A_2
Дужина	a	b	c
E материјала	E	E	E
Напон σ	$\lvert\sigma_1\rvert = \left\lvert \dfrac{F_1 - F_2}{A_1} \right\rvert$	$\lvert\sigma_2\rvert = \left\lvert \dfrac{F_1 - F_2}{A_2} \right\rvert$	$\lvert\sigma_3\rvert = \left\lvert \dfrac{F_2}{A_2} \right\rvert$

Напон σ се на дијаграм наноси за свако поље независно. Може да се нацрта дијаграм апсолутних вредности (све вредности се наносе на исту страну), или да се напон нацрта са оне стране са које је у том пољу нацртана сила на дијаграму аксијалних сила.

3. Померање се одређује на основу израза

$$\Delta l_i = \frac{N_i\, l_i}{E\, A_i} + \alpha\, \Delta T\, l_i \quad \longrightarrow \qquad \Delta l = \sum_{i=1}^{3} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{N_i\, l_i}{E\, A_i} + \alpha\, \Delta T\, l_i \right).$$

Тако је

$$\delta B = \sum_{i=1}^{3} \Delta l_i = \left[\frac{-(F_1 - F_2)a}{E\, A_1} + \alpha\, \Delta T\, a \right] + \left[\frac{-(F_1 - F_2)b}{E\, A_2} + \alpha\, \Delta T\, b \right] + \left[\frac{F_2\, c}{E\, A_2} + \alpha\, \Delta T\, c \right].$$

Када се пише израз за померање пази се на знак силе, да ли је притисна или затезна, притисној се ставља знак минус, а затезној знак плус.

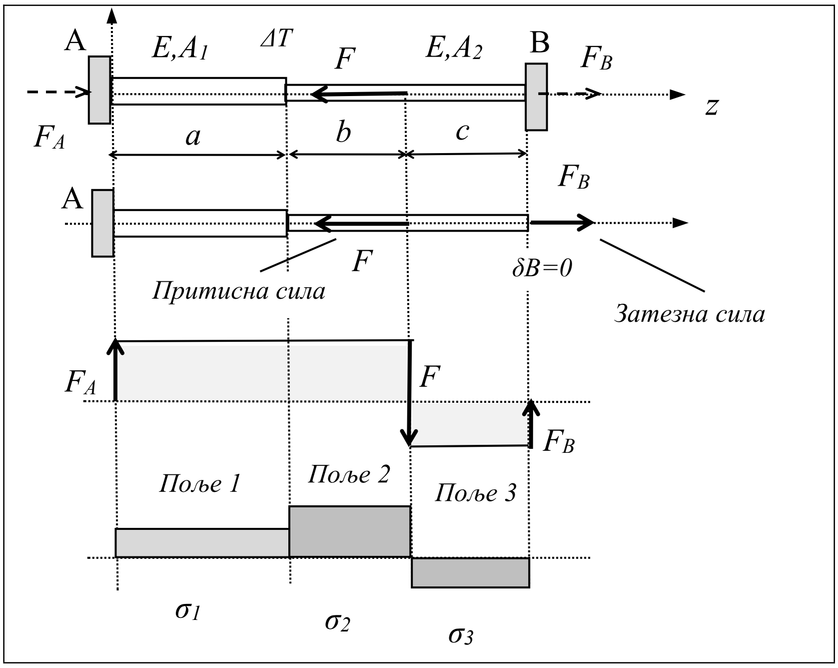
Последњи израз може да се напише и на следећи начин

$$\delta B = -\frac{F_1}{E} \left[\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_2} \right] + \frac{F_2}{E} \left[\frac{a}{A_1} + \frac{b + c}{A_2} \right] + \alpha\, \Delta T \left(a + b + c \right) = \Delta l (od\, F_1) + \Delta l (od\, F_2) + \Delta l (od\, \Delta T)\,,$$

односно укупно померање се добија као збир померања од сваког оптерећења појединачно.

Пример 2.

Одредити напоне у пресецима степенастог штапа ослоњеног на оба краја, приказаног на скици. Задате вредности : F, A_1, A_2, E, a, b, c, α, ΔT



Слика 4.6 *Пример 2*

1. Штап приказан на слици има два ослонца A и B тако да се јављају две непознате реакције ослонаца: F_A и F_B. Пошто може да се напише само једна статичка једначина, овај проблем је једанпут статички неодређен

2(број непознатих) - 1(број статичких једначина) = 1(број статичке неодређености).

Прво се пише **статичка једначина** у складу са претпостављеним смером сила

$$\sum F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A - F + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F - F_B \,.$$

За решавање проблема потребна је још једна једначина која се зове допунска једначина и пише се применом Методе сила.

2. **Метода сила** подразумева да се проблем право претвори у статички одређени проблем уклањањем сувишних веза (ослонаца). На овом примеру уклоњен је ослонац B. Утицај ослонца се замени његовом реакцијом и напише се одговарајући услов по померањима. У нашем задатку тај услов гласи

Померање ослонца B једнако је нули,

односно **допунска једначина** је

$$\delta B = 0 \,.$$

Начин писања ове једначине приказан је у претходном примеру, па је

$$\delta B = \frac{F_B}{E}\left[\frac{a}{A_1} + \frac{b+c}{A_2}\right] - \frac{F}{E}\left[\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_2}\right] + \alpha\,\Delta T\left(a+b+c\right) = 0 \,,$$

тако да се добија решење за силу у ослонцу B

$$F_B = \frac{F\left(a + b\dfrac{A_1}{A_2}\right) - \alpha\,\Delta T\,E\left(a+b+c\right)}{a + \left(b+c\right)\dfrac{A_1}{A_2}}.$$

Сила у ослонцу A је на основу статичке једначине

$$F_A = F - F_B = \frac{F\left(c\dfrac{A_1}{A_2}\right) + \alpha\,\Delta T\,E\left(a+b+c\right)}{a + \left(b+c\right)\dfrac{A_1}{A_2}}.$$

За одређивање напона штап се подели на поља (у сваком пољу је константан пресек и константна сила) тако да штап на слици има три поља приказана у следећој табели.

	Поље 1	Поље 2	Поље 3
Сила	$\lvert F_A \rvert$	$\lvert F_A \rvert$	$\lvert F_B \rvert$
Површина пресека	A_1	A_2	A_2
Дужина	a	b	c
E материјала	E	E	E
Напон σ	$\lvert\sigma_1\rvert = \left\lvert \dfrac{F_A}{A_1} \right\rvert$	$\lvert\sigma_2\rvert = \left\lvert \dfrac{F_A}{A_2} \right\rvert$	$\lvert\sigma_3\rvert = \left\lvert \dfrac{F_B}{A_2} \right\rvert$