Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Numeričke metode (1. grupa)

1. Ako nema eksplicitne informacije o gornjoj granici apsolutne greške, značajne cifre su sve cifre decimalnog zapisa datog broja počev od prve cifre koja je različita od 0, dakle 5, 4, 0, 6, 2, 7, 0 (dakle, ima ih 7) i tada podrazumevana gornja granica za apsolutnu grešku iznosi $0.5 \cdot 10^{-7-4} = 0.5 \cdot 10^{-11}$. Normirani zapis broja $\overline{x}$ glasi $\overline{x} = 0.5406270 \cdot 10^{-4}$, pa je broj značajnih cifara u širem smislu najveći prirodan broj k takav da je (videti definicije iz hand-out-a)
$$\Delta(\overline{x}) = 0.8 \cdot 10^{-8} < 10^{-4-k},$$
dok je broj značajnih cifara u užem smislu najveći prirodan broj l takav da je
$$\Delta(\overline{x}) = 0.8 \cdot 10^{-8} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4-l}.$$
Lako zaključujemo da je $k = 4$ i $l = 3$, tj. da su značajne cifre i u širem smislu 5, 4, 0, 6, dok su značajne cifre u užem smislu 5, 4, 0.

2. Prvo treba proveriti da li su uskladjene odgovarajuće merne jedinice - jesu. Imamo $\overline{F_0} = 0.6N$, $\Delta(\overline{F_0}) = 0.002N$; $\overline{m} = 0.3kg$, $\Delta(\overline{m}) = 0.001kg$, $\overline{\omega_0} = 9.231s^{-1}$, $\Delta(\overline{\omega_0}) = 0.003s^{-1}$; $\overline{\beta} = 0.467s^{-1}$, $\Delta(\overline{\beta}) = 0.001s^{-1}$ i
$$x_0 = x_0\left(F_0, m, \omega_0, \beta\right) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$
Dakle, $\overline{x_0} = \dfrac{\overline{F_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = 0.2323m$,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial F_0}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= \frac{1}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = 0.3871\frac{m}{N}, \\
\frac{\partial x_0}{\partial m}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}}{2\overline{m}^2\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = -0.7742\frac{m}{kg}, \\
\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}\overline{\omega_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}^3} = -0.0252ms, \\
\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}^2\left(\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2\right)}\left(\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2} - \frac{\overline{\beta}^2}{\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}}\right) = 0.4961ms
\end{aligned}$$

i

$$\Delta(\overline{x_0}) \leq (0.3871 \cdot 0.002 + 0.7742 \cdot 0.001 + 0.0252 \cdot 0.003 + 0.4961 \cdot 0.001)m = 0.0021m,$$

što znači da možemo uzeti $x_0 = (0.2323 \pm 0.0021)m$. Odgovarajuće ograničenje za relativnu grešku iznosi

$$\delta x_0 \leq \frac{0.0021}{0.2323} = 0.9\%.$$

3. a) Lagranžov interpolacioni polinom 4-og stepena glasi

$$\begin{aligned} P_3(x) = {} & \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)(-1-4.5)} \cdot (-3) + \frac{(x-(-1))(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)(0-4.5)} \cdot 1 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)(x-4.5)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)(2-4.5)} \cdot 3 + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-4.5)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)(3-4.5)} \cdot 13 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-3)}{(4.5-(-1))(4.5-0)(4.5-2)(4.5-3)} \cdot 20 \end{aligned}$$

Za $x = 1$ dobija se da je dati izraz jednak -0.5569

b) Čim je u pitanju polinom 3-eg stepena, ima 4 čvora koji dele interval $[0, 1]$ na 3 podintervala jednake dužine. Ocena za grešku interpolacije date funkcije u tački x na intervalu $[0, 1]$ glasi

$$R_3(x) \leq \frac{max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z)}{4!} \cdot \left| (x-0)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) \right|.$$

Pritom je

$$max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z) = max_{z\in[0,1]} 2^4 e^{2z} = 16 \cdot e^2.$$

Kako je $2x = \sqrt{2}$ za $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, imamo

$$R_3(x) \leq \frac{16 \cdot e^2}{4!} \cdot \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \right| = 0.0154.$$

4. Zadatku se može pristupiti na više načina, npr. Prvi Njutnov interpolacioni polinom $4-$og stepena glasi

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi_4(x_0 + ph) = 2.4862 - 0.1890p + 0.3108\frac{p(p-1)}{2} + 0.0696\frac{p(p-1)(p-2)}{6} \\ & +0.0048\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \quad \left(p = \frac{x - x_0}{h},\ h = 0.1\right). \end{aligned}$$

Dalje je

$$\pi'(x_0+ph) = \frac{1}{0.1}\left(-0.1890 + 0.3108\frac{2p-1}{2} + 0.0696\frac{3p^2-6p+2}{6} + 0.0048\frac{2p^3-9p^2+11p-3}{12}\right),$$

odakle dobijamo odgovarajuće vrednosti u čvorovima.

Na kraju inverznom interpolacijom nalazimo vrednost $x_e = 1.4143$ u kojoj bi izvod interpo-

k	0	1	2	3	4
x_k	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$\pi_4'(x_k)$	-3.2240	-0.4480	3.0000	7.1680	12.1040.

lacionog polinoma priblizno trebalo da bude jednak 0.

Za aproksimaciju $f''(1.5)$ možemo uzeti

$$\frac{f(1.4) + f(1.6) - 2f(1.5)}{0.1^2} = 38.04$$

Ko je za ovo koristio drugi izvod interpolacionog polinoma (i pritom dobio korektan rezultat), drugačije su mu, naravno, bodovani odgovarajući delovi zadatka.

5. Kako nam nije eksplicitno rečeno koju kvadraturnu forrmulu da koristimo, odlučujemo se za Simsonovu jer ima veći stepen tačnosti nego Trapezna. Jasno je da izvodi funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ nisu bas pristupačni za traženje maksimuma, pa je preporučljivije da grešku procenjujemo Runge-ovom metodom Da bismo mogli da primenimo formulu sa Runge-ovu ocenu greške, najlakše je da krenemo od koraka 0.5 i da ga prepolovljavamo dok se ne ostvari zadata tačnost.

Za $x = 0$ data funkcija nije definisana, tako da za $f(0)$ treba da uzmemo $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ (na osnovu Lopitalovog pravila).

Za $h = 0.5$ imamo

$$S_2^{(0.5)} = \frac{0.5}{3}\left(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\right) = 0.592252.$$

a za $h = 0.25$

$$S_2^{(0.25)}(f) = \frac{0.25}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.25) + f(0.75)) + 2 \cdot f(0.5) + f(1))\right] = 0.610423.$$

Ograničenje

$$\frac{|0.610423 - 0.592252|}{2^4 - 1} = 0.0012 > 0.0005$$

očito nije dovoljno dobro, pa moramo dalje da polovimo korak. Za $h = 0.125$ je

$$\begin{aligned} S_2^{(0125)}(f) = \; & \frac{0.125}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\right. \\ & \left. + 2(f(0.250) + f(0.500) + f(0.750)) + f(1))\right] = 0.616952. \end{aligned}$$

Sada je

$$R_2(f) \leq \left| \frac{S_2^{(0.125)}(f) - S_2^{(0.25)}(f)}{2^4 - 1} \right| = 0.000435 < 0.0005.$$

odnosno

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.616952 \pm 0.000435.$$

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Numeričke metode (2. grupa)

1. Ako nema eksplicitne informacije o gornjoj granici apsolutne greške, značajne cifre su sve cifre decimalnog zapisa datog broja počev od prve cifre koja je različita od 0, dakle 7, 1, 6, 2, 1, 0, 9, 0, 3, 5, 0, 0 (dakle 12 ih ima) i tada podrazumevana gornja granica za apsolutnu grešku iznosi $0.5 \cdot 10^{-12+5} = 0.5 \cdot 10^{-7}$. Normirani zapis broja $\overline{x}$ glasi $\overline{x} = 0.716210903500 \cdot 10^5$, pa je broj značajnih cifara u širem smislu najveći prirodan broj k takav da je (videti definicije iz hand-out-a)
$$\Delta(\overline{x}) = 0.4 \cdot 10^{-2} < 10^{5-k},$$
dok je broj značajnih cifara u užem smislu najveći prirodan broj l takav da je
$$\Delta(\overline{x}) = 0.4 \cdot 10^{-2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{5-l}.$$
Lako zaključujemo da je $k = 7$, a takodje i $l = 7$, tj. da su značajne cifre i u širem i u užem smislu 7, 1, 6, 2, 1, 0, 9.

2. Prvo treba proveriti da li su uskladjene odgovarajuće merne jedinice - jesu. Imamo $\overline{F_0} = 0.5N$, $\Delta(\overline{F_0}) = 0.001N$; $\overline{m} = 0.2kg$, $\Delta(\overline{m}) = 0.001kg$, $\overline{\omega_0} = 7.231s^{-1}$, $\Delta(\overline{\omega_0}) = 0.004s^{-1}$; $\overline{\beta} = 0.462s^{-1}$, $\Delta(\overline{\beta}) = 0.001s^{-1}$ i
$$x_0 = x_0\left(F_0, m, \omega_0, \beta\right) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$
Dakle, $\overline{x_0} = \dfrac{\overline{F_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = 0.3749m$,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial F_0}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= \frac{1}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = 0.7499\frac{m}{N}, \\
\frac{\partial x_0}{\partial m}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}}{2\overline{m}^2\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}} = -1.8747\frac{m}{kg}, \\
\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}\,\overline{\omega_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}^3} = -0.0521ms, \\
\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\left(\overline{F_0}, \overline{m}, \overline{\omega_0}, \overline{\beta}\right) &= -\frac{\overline{F_0}}{2\overline{m}\overline{\beta}^2\left(\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2\right)}\left(\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2} - \frac{\overline{\beta}^2}{\sqrt{\overline{\omega_0}^2 - \overline{\beta}^2}}\right) = 0.8082ms
\end{aligned}$$
i
$$\Delta(\overline{x_0}) \leq (0.7499 \cdot 0.001 + 1.8747 \cdot 0.001 + 0.0521 \cdot 0.004 + 0.8082 \cdot 0.001)m = 0.0036m,$$

što znači da možemo uzeti $x_0 = (0.2323 \pm 0.0021)m$. Odgovarajuće ograničenje za relativnu grešku iznosi

$$\delta x_0 \leq \frac{0.0021}{0.2323} = 0.96\%.$$

3. a) Lagranžov interpolacioni polinom 4-og stepena glasi

$$\begin{aligned}P_3(x) = \ & \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)(-1-4.5)} \cdot 20 + \frac{(x-(-1))(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)(0-4.5)} \cdot 13 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)(x-4.5)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)(2-4.5)} \cdot 3 + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-4.5)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)(3-4.5)} \cdot 1 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-3)}{(4.5-(-1))(4.5-0)(4.5-2)(4.5-3)} \cdot (-3)\end{aligned}$$

Za $x = 1.5$ dobija se da je dati izraz jednak 4.6572.

b) Čim je u pitanju polinom 3-eg stepena, ima 4 čvora koji dele interval $[0, 1]$ na 3 podintervala jednake dužine. Ocena za grešku interpolacije date funkcije u tački x na intervalu $[0, 1]$ glasi

$$R_3(x) \leq \frac{max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z)}{4!} \cdot \left|(x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right|.$$

Pritom je

$$max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z) = max_{z\in[0,1]} 3^4 e^{3z} = 81 \cdot e^3.$$

Kako je $3x = \sqrt{3}$ za $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, imamo

$$R_3(x) \leq \frac{81 \cdot e^3}{4!} \cdot \left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\right| = 0.3605.$$

4. Zadatku se može pristupiti na više načina, npr. Drugi Njutnov interpolacioni polinom 4−og stepena glasi

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \pi_4(x_4 + qh) = 2.4862 + 0.1890q + 0.3108\frac{q(q+1)}{2} - 0.0696\frac{q(q+1)(q+2)}{6} \\ &\quad +0.0048\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{24} \quad \left(q = \frac{x - x_4}{h},\ h = 0.1\right).\end{aligned}$$

Dalje je

$$\pi'(x_4+qh) = \frac{1}{0.1}\left(0.1890 + 0.3108\frac{2q+1}{2} + 0.0696\frac{3q^2+6q+2}{6} + 0.0048\frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\right),$$

odakle dobijamo odgovarajuće vrednosti u čvorovima.

k	0	1	2	3	4
x_k	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$\pi_4'(x_k)$	-6.0720	-4.6160	-2.5360	0.2160	3.6880.

Na kraju inverznom interpolacijom nalazimo vrednost $x_e = 1.5927$ u kojoj bi izvod interpolacionog polinoma priblizno trebalo da bude jednak 0.

Za aproksimaciju $f''(1.5)$ možemo uzeti

$$\frac{f(1.4) + f(1.6) - 2f(1.5)}{0.1^2} = 38.04$$

Ko je za ovo koristio drugi izvod interpolacionog polinoma (i pritom dobio korektan rezultat), drugačije su mu, naravno, bodovani odgovarajući delovi zadatka.

5. Kako nam nije eksplicitno rečeno koju kvadraturnu forrmulu da koristimo, odlučujemo se za Simsonovu jer ima veći stepen tačnosti nego Trapezna. Jasno je da izvodi funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ nisu bas pristupačni za traženje maksimuma, pa je preporučljivije da grešku procenjujemo Runge-ovom metodom Da bismo mogli da primenimo formulu sa Runge-ovu ocenu greške, najlakše je da krenemo od koraka 0.5 i da ga prepolovljavamo dok se ne ostvari zadata tačnost.

   Za $x = 0$ data funkcija nije definisana, tako da za $f(0)$ treba da uzmemo $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ (na osnovu Lopitalovog pravila).

   Za $h = 0.5$ imamo

$$S_2^{(0.5)} = \frac{0.5}{3}\left(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\right) = 0.592252.$$

   a za $h = 0.25$

$$S_2^{(0.25)}(f) = \frac{0.25}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.25) + f(0.75)) + 2 \cdot f(0.5) + f(1))\right] = 0.610423.$$

   Ograničenje

$$\frac{|0.610423 - 0.592252|}{2^4 - 1} = 0.0012 > 0.0005$$

   očito nije dovoljno dobro, pa moramo dalje da polovimo korak. Za $h = 0.125$ je

$$\begin{aligned} S_2^{(0125)}(f) = \; & \frac{0.125}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\right. \\ & \left. +2(f(0.250) + f(0.500) + f(0.750)) + f(1))\right] = 0.616952. \end{aligned}$$

   Sada je

$$R_2(f) \leq \left| \frac{S_2^{(0.125)}(f) - S_2^{(0.25)}(f)}{2^4 - 1} \right| = 0.000435 < 0.0005.$$

   odnosno

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.616952 \pm 0.000435.$$

Aleksandar Pejčev