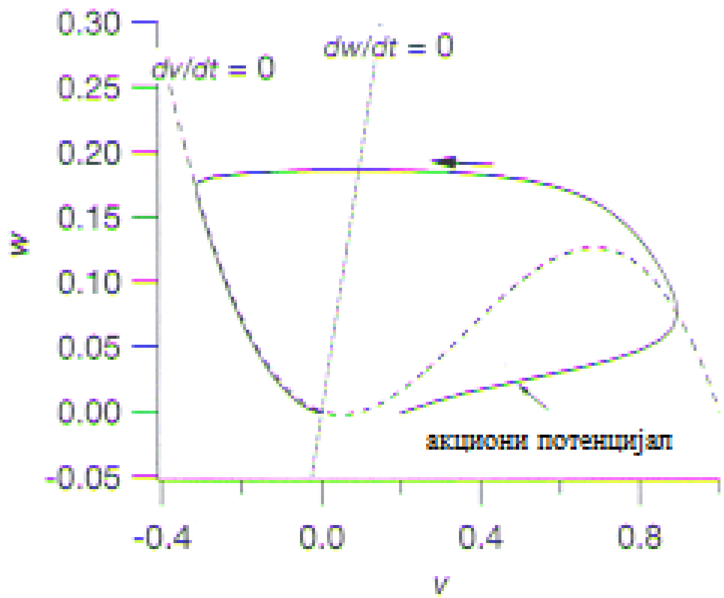
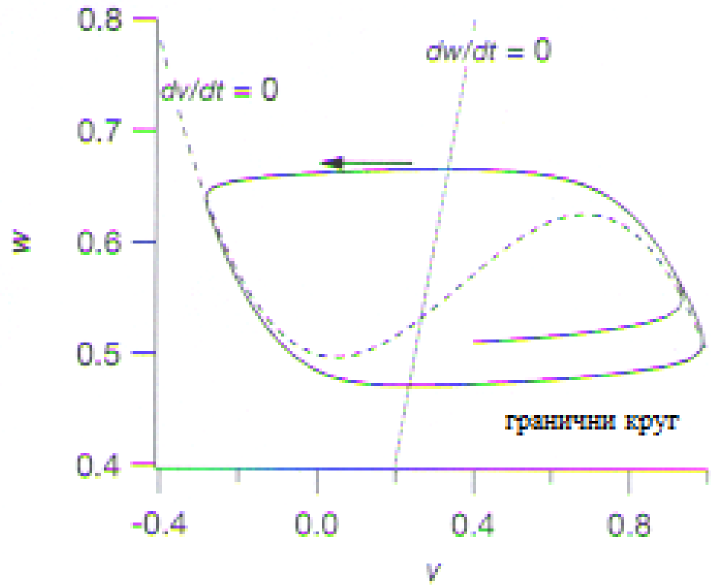
Понашање у фазној равни

Добра особина ФицХју-Нагумовог модела је што је је систем са две променљиве и може да се проучава методама у фазној равни.

Могућа су два карактеристична лика стања, сл.1 и сл.2.



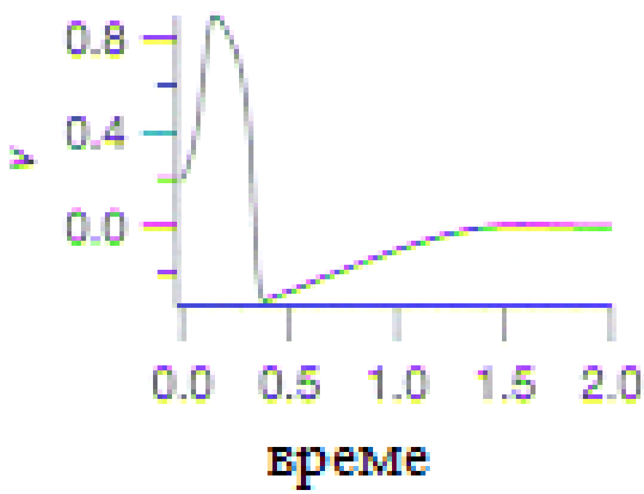
сл.1



сл.2

По претпоставци постоји само једно равнотежно стање $v = v^*$, $w = w^*$ при чему је $f(v^*,\ w^*) = g(v^*,\ w^*) = 0$. Без губитка у општости може да се претпостави да је ово равнотежно стање у координатном почетку пошто то подразумева само транслацију променљивих. На даље, усваја се да је параметар ε мали број. За мало ε, у колико равнотежно стање лежи било са леве, било са десне стране криве $f(v,\ w) = 0$ тј. кривих $v = V_{\pm}(w)$ оно је стабилно. Негде на средини гране $v = V_0(w)$ близу екстрема криве $f(v,\ w) = 0$ налази се тачка Хопфове бифуркације. То значи да у колико се параметри мењају тако да равнотежно стање прође крох ову тачку јавља се периодично кретање које представља стабилни гранични круг. Када је равнотежно стање на левој грани али близу минимума, сл.1, систем може да буде побуђен. Ово се јавља пошто иако је равнотежно стање стабилно, довољно велика пертурбација у равнотежном стању помера стање на трајекторију којом се удаљава од њега пре него што би се евентуално смирило. Ова трајекторија иде брзо ка десној грани, којом пошто достигне максимум иде брзо ка левој грани и затим постепено смирује остајући близу ње.

Дијаграми променљиве $\boldsymbol{v}$ у функцији времена на сл.3.



сл.3

Математички опис ових појава проистиче из теорије сингуларних пертурбација. Са $\varepsilon \ll 1$ променљива $\boldsymbol{v}$ је **брза променљива**, а променљива $\boldsymbol{w}$ је **спора променљива**.

То значи да се у колико је могуће v мења брзо тако да одржи псеудо равнотежно стање у $f(v,\ w) = 0$. Другим речима, у колико је могуће v се држи стабилне гране $f(v,\ w) = 0$ означене са $v = V_{\pm}(w)$.

Дуж ових грана динамика променљиве $\boldsymbol{w}$ је одређена:

$$\frac{dw}{dt} = g(V_{\pm}(w), w) = G_{\pm}(w)$$

Када није могуће да променљива $\boldsymbol{v}$ буде у квази равнотежном стању, кретање је одређено приближно диференцијалним једначинама:

$$\frac{dv}{d\tau} = f(v,\, w),\;\; \frac{dw}{d\tau} = 0$$

које се добијају сменом за брзу променљиву $\boldsymbol{t = \varepsilon\tau}$ и затим увршујући $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$. На овој временској скали $\boldsymbol{w}$ је константа, док се v уравнотежава на стабилном решењу $f(v,\ w) = 0$. Сад може да се опише промена величина $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ почевши од почетних вредности $\boldsymbol{v_0}$ и $\boldsymbol{w_0}$. Претпоставимо да је v_0 веће од вредности мировања v^*.

Ако је $v_0 < V_0(w)$ тада се v одмах враћа у стационарно стање.

Ако је $v_0 > V_0(w)$ тада се v брзо креће ка горњој грани $V_+(w)$ при чему w остаје практично константно на вредности w_0. Крива $v = V_0(w)$ је **крива прага**.

Док v остаје на горњој грани, w расте по:

$$\frac{dw}{dt} = G_+(w)$$

докле год је могуће. Међутим, за коначно време

$$T_e = \int_{w_0}^{W^*} \frac{dw}{G_+(w)}$$

w достиже "врх" нулклине $f(v,\ w) = 0$.

Овај период времена представља фазу побуде акционог потенцијала. Када w достигне W^* више није могуће да v остане на грани побуде тако да се враћа на доњу грану $V_-(w)$. Када се нађе на овој грани, w се смањује према:

Међутим, за коначно време

$$T_e = \int_{w_0}^{W^*} \frac{dw}{G_+(w)}$$

w достиже "врх" нулклине $f(v,\ w) = 0$.Овај период времена представља фазу побуде акционог потенцијала.

Када w достигне W^* више није могуће да v остане на грани побуде тако да се враћа на доњу грану $V_-(w)$. Када се нађе на овој грани, w се смањује према:

$$\frac{dw}{dt} = G_-(w)$$

У колико је тачка мировања на доњој грани, онда $G_-(w^*) = 0$ и w се постепено враћа у стање мировања на доњој грани.

Када се у ФицХју-Нагумове једначине доведе улазна величина-струја, оне постају:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = f(v, w) + I$$

$$\frac{dw}{dt} = g(v, w)$$

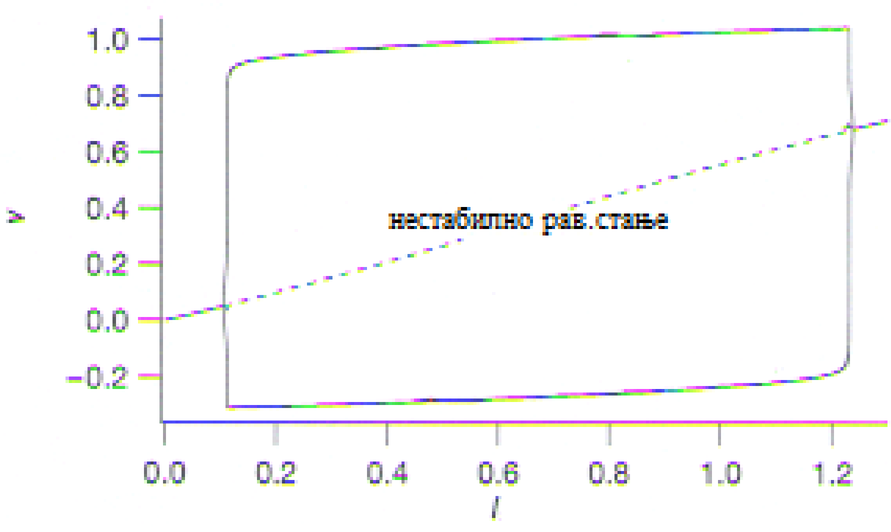
Као и код брзо-споре фазне равни Хоџкин-Хакслијевих једначина, са порастом струје I кубна нулклина се помера на горе. Стога, за вредности струје I у средини опсега, равнотежно стање лежи на средњој грани $V_0(w)$ и оно је нестабилно. Уместо да се у стање мировања после једног циклуса, трајекторија се креће наизменично између горње и доње гране при чему w варира између W_* и W^*, сл.2. Учестаност са којом се трајекторија креће по граничном кругу зависи од вредности ε.

Са смањењем ε, учестаност расте.

За мало ε период осцилација је приближно:

$$T = \int_{W_*}^{W^*} \left(\frac{1}{G_+(w)} - \frac{1}{G_-(w)}\right) dw$$

Бројчана вредност периода добијена из овог израза је ограничена пошто је $G_+(w) > 0$ и $G_-(w) < 0$ за свако w.Као и код Хоџкин-Хакслијевих једначина, појава граничног круга зависно од вредности струје I може да се представи на дијаграму, сл.3.



Сл.3 Дијаграм ФицХју-Нагумових једначина, при $\alpha=0,1$; $\gamma=0,5$; $\varepsilon=0,01$ где је промена вредности струје I узрок појаве граничног круга.

За сваку вредност I уносе се вредности v у равнотежном стању, као и минималне и максималне вредности током периодичне промене. При порасту струје I, гранични круг се јавља за $I = 0{,}1$ и нестаје за $I = 1{,}24$. У том интервалу се јављају стабилне периодичне трајекторије, сл.3.