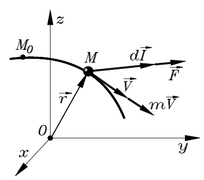
Opšte teoreme i zakoni dinamike tačke

Količina kretanja tačke

Pod količinom kretanja tačke ($\vec{K}$) podrazumeva se vektorska veličina koja je jednaka proizvodu mase *m* tačke i njene brzine $\vec{V}$, tj. $\vec{K} = m\vec{V}$.

Impuls sile



1.) Elementarni impuls sile: Pod elementarnim impulsom sile $d\vec{I}$ podrazumeva se veličina koja je jednaka proizvodu sile $\vec{F}$ koja deluje na tačku i infinitezimalno malog intervala vremena dt, tj. $d\vec{I} = \vec{F}dt$.

2.) Impuls sile (ukupni impuls sile): Ako tačka pod dejstvom sile $\vec{F}$ pređe iz položaja M_0 u kome se našla u trenutku t_0 u položaj *M*, koji odgovara trenutku *t*, tada je u datom intervalu vremena (t_0,*t*) impuls sile $\vec{F}$ određen sa $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$.

Teorema o promeni količine kretanja tačke

Polazeći od toga da je masa *m* tačke konstantna i koristeći definiciju količine kretanja tačke, važi

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = m\vec{a} = \vec{F} \; .$$

Projektovanjem članova prethodne relacije na ose izabranog koordinatnog sistema, npr. *Oxyz*, dobijaju se teoreme o promeni količine kretanja materijalne tačke u odnosu na ose, tj.

$$\dot{K}_x = X \; , \quad \dot{K}_y = Y \; , \quad \dot{K}_z = Z \; .$$

Ako se teorema o promeni količine kretanja materijalne tačke, u diferencijalnom obliku, napiše kao $d\vec{K} = \vec{F}dt$, integracijom se dobija

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \vec{I} \; ,$$

što predstavlja teoremu o promeni količine kretanja materijalne tačke, u (konačnom) integralnom obliku, koja glasi: promena količine kretanja materijalne tačke u konačnom intervalu vremana jednak je impulsu rezultante sila koje deluju na tačku, u istom intervalu vremena. Odgovarajuće skalarne jednačine su

$$K_{x_1} - K_{x_0} = \int_{t_0}^{t_1} Xdt = I_x \, , \quad K_{y_1} - K_{y_0} = \int_{t_0}^{t_1} Ydt = I_y \, , \quad K_{z_1} - K_{z_0} = \int_{t_0}^{t_1} Zdt = I_z \, .$$

Zakon o održanju količine kretanja tačke

Ako na tačku deluje takav sistem sila da njegova rezultanta jednaka nuli, tj. $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, tada iz teoreme o promeni količine kretanja sledi zakon o održanju količine kretanja tačke, u obliku

$$d\vec{K} = 0 \, , \; \vec{K} = const. \, , \text{ ili } \; \vec{K}_1 = \vec{K}_0 = const.$$

Često se dešava da za neku od osa inercijalnog koordinatnog sistema (npr. osu *Ox*) važi $X = 0$. Tada važi zakon o održanju količine kretanja za osu, tj. $K_x = const.$ Odatle sledi da je projekcija brzine tačke na tu osu konstantna:

$$K_x = m\dot{x} = const. \quad \dot{x} = const.$$

Moment količine kretanja (kinetički moment) tačke

Moment količine kretanja (kinetički moment) tačke, u odnosu na neki pol *O* je

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{V} \,,$$

gde je $\vec{r}$ - vektor položaja tačke u odnosu na pol *O*, a $\vec{K}$ njena količina kretanja. Moment količine kretanja tačke, u odnosu na neku osu *Ou* je projekcija na tu osu kinetičkog momenta $\vec{L}_O$.

Teorema o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu

Diferenciranjem izraza za moment količine kretanja tačke po vremenu, dobija se:

$$\dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{r}} \times m_i + \vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right), \; \dot{\vec{r}} \times m\vec{V} = \vec{V} \times m\vec{V} = 0 \,, \; \dot{\vec{L}}_O = \vec{r} \times \vec{F} \,,$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O\left(\vec{F}\right),$$

tj. izvod po vremenu kinetičkog momenta tačke, određenog u odnosu na nepokretni pol, jednak je momentu rezultante svih sila koje deluju na tačku u odnosu na isti nepokretni pol.

Projektujući članove prethodne relacije na ose nepokretnog koordinatnog sistema, npr. *Oxyz*, dobijaju se izrazi koji predstavljaju teoremu o promeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretnu osu

$$\dot{L}_{Ox} = M_{Ox} \,, \quad \dot{L}_{Oy} = M_{Oy} \,, \quad \dot{L}_{Oz} = M_{Oz} \,.$$

Zakon o održanju kinetičkog momenta tačke u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu

Ako za sve vreme kretanja tačke važi da je $\vec{M}_O = 0$, tada je $\dot{\vec{L}}_O = 0$, tj

$$\vec{L}_O = const.$$

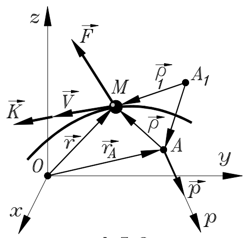
Dakle, ako je za sve vreme kretanja tačke moment sile u odnosu na nepokretni pol jednak nuli, tada je kinetički moment u odnosu na isti pol konstantan. Moment sile u odnosu na tačku jednak je nuli ako je za sve vreme kretanja sila jednaka nuli ili ako njena napadna linija prolazi kroz tu tačku.

Ako na tačku deluje takva sila da za neku nepomičnu osu *Ou* važi da je $M_{Ou} = 0$ (napanda linija sile je ili paralelna sa osom ili seče osu), tada je $\dot{L}_{Ou} = 0$, tj. $L_{Ou} = const.$, što predstavlja zakon o održanju kinetičkog momenta u odnosu na nepokretnu osu.

U posebnom slučaju, kada je $\vec{M}_O = 0$, a u nekom trenutku t_0 je $\vec{L}_O(t_0) = 0$, tada je $\vec{L}_O = 0$, što predstavlja specijalni slučaj zakona o održanju kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol. Ako za za neku nepomičnu osu *Ou* važi da je $M_{Ou} = 0$, a u nekom trenutku t_0 je $L_{Ou}(t_0) = 0$, tada je u svakom trenutku $L_{Ou} = 0$.

Teorema o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na pokretni pol i pokretnu osu

Posmatra se kretanje tačke *M*, mase *m*, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem *Oxyz*, pod dejstvom sistema sila čija je rezultanta $\vec{F}$. Položaj pokretnog pola *A* u odnosu na nepokretni pol *O* određen je vektorom položaja $\vec{r}_A$. Položaj posmatrane tačke *M* u odnosu na nepokretni pol *O* određen je vektorom položaja $\vec{r}$, u odnosu na pokretni pol *A* vektorom položaja $\vec{\rho}$, a u odnosu na pokretni pol A_1 vektorom položaja $\vec{\rho}_1$.



sl.5.3.

Kinetički moment posmatrane tačke *M* u odnosu na pokretni pol *A* određen je sa $\vec{L}_A = \vec{\rho} \times m\vec{V}$,gde je $\vec{V}$ - brzina posmatrane tačke u odnosu na izabrani koordinatni sistem *Oxyz*. Na osnovu slike, može se napisati: $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_A$, $\vec{\rho}_1 = \overrightarrow{A_1A} + \vec{\rho}$. Kako je $\vec{L}_{A_1} = \vec{\rho}_1 \times m\vec{V}$, dobija se $\vec{L}_A = \vec{L}_O - \vec{r}_A \times \vec{K}$, $\vec{L}_{A_1} = \vec{L}_A + \overrightarrow{A_1A} \times \vec{K}$, gde je $\vec{K}$ - količina kretanja tačke *M*. Promena kinetičkog momenta tačke, u odnosu na pokretni pol *A*, može se odrediti diferenciranjem po vremenu:

$$\dot{\vec{L}}_A = \dot{\vec{\rho}} \times m\vec{V} + \vec{\rho} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V}) .$$

Kako je $\dot{\vec{r}} \times m\vec{V} = \vec{V} \times m\vec{V} = 0$ i $\vec{\rho} \times m\vec{a} = \vec{\rho} \times \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F})$, dobija se

$$\dot{\vec{L}}_A + \vec{V}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A(\vec{F}) .$$

Pri tome je sa $\vec{V}_A = \dot{\vec{r}}_A$ označena brzina pokretnog pola *A*. Ovaj izraz predstavlja <u>teoremu o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na pokretni pol</u>. Vidi se da se ova teorema svodi na teoremu o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na nepokretni pol u slučaju kada je $\vec{V}_A \times \vec{K} = 0$.

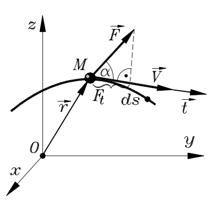
Ako se uoči osa *Ap* koja je određena jediničnim vektorom $\vec{p}$, tada se množenjem jednačine (5.65) sa $\vec{p}$ dobija

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_A \cdot \vec{p}) - \vec{L}_A \cdot \dot{\vec{p}} + (\vec{V}_A \times \vec{K}) \cdot \vec{p} = \vec{M}_A \cdot \vec{p} .$$

Ova relacija predstavlja <u>teoremu o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na pokretnu osu</u>.

Elementarni rad sile

Neka se tačka *M* kreće pod dejstvom sile $\vec{F}$ po putanji proizvoljnog oblika. Rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomeranju $d\vec{r}$ tačke ili elementarni rad sile δA jednak je skalarnom proizvodu sile $\vec{F}$ i elementarne (beskonačno male) promene vektora položaja te tačke, tj.



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \, , \; \delta A = \vec{F} \cdot \vec{V} \, dt \, , \; \delta A = \vec{V} \cdot d\vec{I} \, ,$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \vec{t} \, ds \, , \; \delta A = \vec{F} \cdot \vec{t} \, ds \, .$$

Iz prethodnih razmatranja vidi se da je

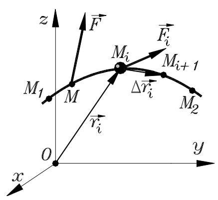
$$\delta A \begin{cases} > 0, & 0 \le \alpha \le 90^o \\ = 0, & \alpha = 90^o \\ < 0, & 90^o < \alpha \le 180^o. \end{cases}$$

Ako se $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ izraze u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem *Oxyz* $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, tada je elementarni rad sile

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz\,.$$

Rad sile

Ukupni rad sile, ili samo rad sile, koja deluje na tačku, predstavlja rad sile pri konačnom pomeranju tačke po putanji. U cilju određivanja rada sile posmatra se kretanje tačke *M* pod dejstvom sile $\vec{F}$, po putanji proizvoljnog oblika. Ako se deo putanje tačke između dva njena proizvoljna položaja M_1 i M_2 izdeli se na *n* delova, dobija se poligonalna linija. Analogno definiciji elementarnog rada sile može se uvesti mera dejstva sile $\vec{F}_i$, pri malom konačnom pomeranju tačke iz položaja M_i u položaj M_{i+1}, koja je određena sa $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, $(i = 1,2,...,n)$, gde je $\vec{F}_i$ - sila koja deluje na tačku *M* kada se ona nađe u položaju M_i i gde je $\Delta\vec{r}_i$ -priraštaj vektora položaja $\vec{r}$ tačke između njenih položaja M_i i M_{i+1}. Ukupna mera dejstva sile $\vec{F}$, pri pomeranju tačke *M* iz položaja M_1 u položaj M_2, duž poligonalne linije, je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$. Graničnim prelazom, tj. $n \to \infty$ dolazi se do $A_{M_1M_2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, koja predstavlja rad sile $\vec{F}$, na njenoj putanji između tačaka M_1 i M_2. Ova granična vrednost naziva se krivolinijski integral. Dakle, rad sile $\vec{F}$ obeležava se sa *A* ili $A_{M_1M_2}$ i određen je sa $A = A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



Ako je za izračunavanje rada sile izabran Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, tada je

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \left(Xdx + Ydy + Zdz\right),\; A = \int_{t_1}^{t_2} \left(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}\right)dt\,.$$

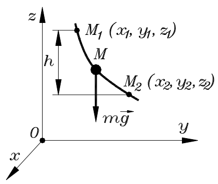
U opštem slučaju rešenje prethodnih krivolinijskih integrala zavisi i od oblika putanje i od dužine luka po kome se kreće tačka. Samo u posebnom slučaju rad sile ne zavisi ni od oblika putanje tačke, niti od njenog pređenog puta, već samo od koordinata početnog i krajnjeg položaja tačke. Da bi to bilo ispunjeno, linearni diferencijalni izraz $Xdx + Ydy + Zdz$ mora da bude totalni diferencijal neke skalarne funkcije položaja tačke $f(x,y,z)$, što znači da se *X, Y* i *Z* mogu predstaviti kao parcijalni izvodi te funkcije. Sile koje ispunjavaju te uslove zovu se konzervativne i rad takvih sila zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tačke na putanji. Svaka sila koja je funkcija položaja ne mora da ispunjava te zahteve koji se nazivaju uslovi konzervativnosti.

Rad rezultante sistema sila

Neka na tačku *M*, mase *m*, deluje sistem sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Rezultanta ovog sistema sila je $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Rad rezultante takvog sistema sila između položaja tačke M_1 i M_2, je $A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n\right) \cdot d\vec{r}$,

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + ... + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}, \quad A_{M_1M_2} = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Rad sile teže

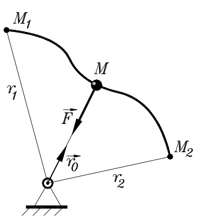


Neka se posmatra kretanje tačke *M*, mase *m* u polju teže, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* kod koga je osa *Oz* usmerena vertikalno naviše. Projekcije težine tačke ($\vec{G} = m\vec{g}$) date su sa $X = Y = 0$, $Z = -mg$, pa je

$$A_{M_1M_2}\left(m\vec{g}\right) = \pm mgh .$$

$$A = \int_{z_{C1}}^{z_{C2}} -mgdz = mg(z_{C_1} - z_{C_2})$$

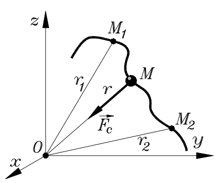
Rad centralne sile



Posmatra se kretanje tačke *M* na koju deluje centralna sila $\vec{F}$, koja je funkcija samo rastojanja i čiji je centar u tački *O*. Tada je $A_{M_1M_2}\left(\vec{F}\right) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}$. Ako se uzme u obzir da je $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, odakle diferenciranjem sledi $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr$, dobija se

$$A_{M_1M_2}\left(\vec{F}\right) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)\, dr .$$

Rad linearne sile elastičnosti



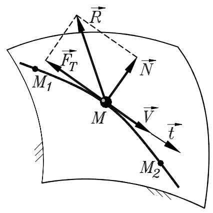
Linearna sila elastičnosti (linearna sila uspostavljanja) $\vec{F}_c$, je sila koja ima smer ka centru sile *O* i koja deluje shodno Hukovom zakonu, tj. $F_c = c|\Delta l|$, gde je *c* – koeficijent krutosti, a Δl – deformacija. Pod deformacijom Δl podrazumeva se veličina $\Delta l = r - r_0$. Sada je

$$A_{M_1M_2}\left(\vec{F}_c\right) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} c\left(r - r_0\right) dr ,$$

$$A_{M_1M_2}\left(\vec{F}_c\right) = \frac{1}{2}c\left(r_1 - r_0\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(r_2 - r_0\right)^2, \quad A_{M_1M_2}\left(\vec{F}_c\right) = \frac{1}{2}c\,(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2) .$$

Rad sile trenja klizanja

Posmatra se kretanje tačke M po realnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi koju čini površ nekog tela. Reakcija veze $\vec{R}$, ima dve komponente: $\vec{N}$ u pravcu normale i $\vec{F}_T$ u pravcu tangente na putanju tačke. Ako otpor kretanju tačke M po površi potiče od suvog trenja, sila trenja klizanja $\vec{F}_T$ je $\vec{F}_T = -\mu N \dfrac{\vec{V}}{V} = -\mu N \operatorname{sgn} \dot{s}\, \vec{t}$. Rad sile trenja klizanja $\vec{F}_T$ pri



prelasku tačke M iz položaja M_1 u položaj M_2, je

$$A_{M_1M_2}\left(\vec{F}_T\right) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = -\int_{M_1}^{M_2} \mu N \operatorname{sgn} \dot{s}\, ds = -\mu \int_{M_1}^{M_2} N|ds| .$$

Snaga sile

Snaga sile je veličina koja karakteriše promenu po vremenu rada sile. U cilju definisanja snage sile posmatra se tačka na koju deluje sila $\vec{F}$, koja izvrši rad ΔA za konačan interval vremena Δt, pri pomeranju tačke iz položaja M_1, u kome se nalazila u trenutku t_1 u položaj M_2 koji odgovara trenutku t_2. Srednja snaga te sile, za posmatrani interval vremena, određena je sa $P_{sr} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$. Snaga sile $\vec{F}$, u trenutku t, predstavlja graničnu vrednost srednje snage sile kada posmatrani interval vremena teži nuli, tj. $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{\delta A}{dt}$. Dakle, snaga sile u datom trenutku jednaka je odnosu elementarnog rada sile i intervala vremena u kome je taj rad izvršen i predstavlja brzinu vršenja rada u tom trenutku.

Kinetička energija tačke

Kinetička energija tačke je pozitivna skalarna veličina koja se definiše kao $E_k = \dfrac{1}{2} mV^2$, gde je m - masa tačke, a V intenzitet njene brzine.

Teorema o promeni kinetičke energije tačke

Teorema o promeni kinetičke energije tačke može se dobiti iz osnovne jednačine dinamike tačke. Skalarno množeći ovu jednačinu elementarnim priraštajem $d\vec{r}$ vektora položaja tačke dobija se $m\dot{\vec{V}} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Kako je

$$m\dot{\vec{V}} \cdot d\vec{r} = m\vec{V}d\vec{V} = mVdV = d\left(\frac{1}{2} mV^2\right)$$

i koristeći relaciju kojom se definiše elementarni rad rezultante $\vec{F}$ svih sila koje deluju na tačku, sledi da je $d\left(\dfrac{1}{2} mV^2\right) = \delta A$, tj. $dE_k = \delta A$, što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u diferencijalnom obliku. Integracijom u granicama koje su određene položajem M_1 tačke na početku i položajem M_2 tačke na kraju posmatranog kretanja, dobija se $\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\, d\vec{r}$, tj. $E_{k2} - E_{k1} = A_{M_1M_2}$, što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u konačnom obliku.

Polje sile. Potencijalna energija

Polje sile. Funkcija sile. Konzervativna sila

Polje neke fizičke veličine je ograničen ili neograničen deo prostora čijoj svakoj tački odgovara određena vrednost te fizičke veličine. Zavisno od prirode fizičke veličine postoje skalarna (npr. temperaturno, …) ili vektorska polja (polje sile, brzine, …). Polje sile je ograničen ili neograničen deo prostora u čijoj svakoj tački se oseća dejstvo sile, koja zavisi od položaja tačke i vremena. Biće razmatrana samo stacionarna polja sila, tj. $\vec{F} = \vec{f}(x,y,z)$. U slučaju Dekartovog koordinatnog sistema *Oxyz*, slede odgovarajuća skalarna polja $X = f_1(x,y,z)$ $Y = f_2(x,y,z)$ $Z = f_3(x,y,z)$. Ako postoji takva skalarna funkcija $U(x,y,z)$, čiji su parcijalni izvodi po koordinatama jednaki projekcijama sile na odgovarajuće ose Dekartovog koordinatnog sistema, tj. $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$, onda se takva funkcija U naziva funkcija sile, a polje okarakterisano takvom funkcijom naziva se potencijalno ili konzervativno polje sile. Takva sila $\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = grad\, U$, naziva se konzervativna sila. Funkcija sile $U(x,y,z)$ određena je do na proizvoljnu konstantu jer je $\vec{F} = grad\, U = grad(U + C_1)$, gde je C_1 proizvoljna konstanta. Elementarni rad konzervativne sile $\vec{F}$ ima oblik

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz = dU\,,\ \delta A = dU\,.$$

Uslovi konzervativnosti sile

Konzervativna sila može se napisati i na sledeći način $\vec{F} = grad\, U = \nabla U$, gde se gradijent funkcije smatra kao primena operatora ∇ (Hamiltonov operator) na skalarnu funkciju *U*, tj. $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Sada je $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla U = (\nabla \times \nabla)U = 0$,

$$\nabla \times \vec{F} = rot\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0\,.$$

Ovi uslovi nazivaju se uslovi konzervativnosti sile.

Potencijalna energija

Za konzervativne sisteme, tj. sisteme u kojima deluju konzervativne sile, pojam potencijalne energije uvodi se na sledeći način: $E_p(x,y,z) = -U(x,y,z)$, gde je $U(x,y,z)$ funkcija sile. Tada je $\vec{F} = grad\, U = -grad\, E_p$, $X = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$. Elementarni rad tako date konzervativne sile ima oblik

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz = -dE_p\,,\ \delta A = -dE_p\,,$$

a rad konzervativnog polja sila, pri prelazu tačke iz položaja M_1 u položaj M_2, je

$$A_{M_1M_2} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = \int_{M_2}^{M_1} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2).$$

Rad konzervativnih sila nezavisan je od oblika putanje pokretne tačke kao i od njenog pređenog puta i zavisi samo od potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju tačke, pa je rad konzervativne sile po zatvorenoj putanji tačke jednak nuli.

Polazeći od relacije $dE_p = -dU$, sledi $E_p = -U + C_1$, gde je C_1 konstanta koja se može izabrati proizvoljno. Ova činjenica koristi se tako što se položaj tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojem će, uslovno, potencijalna energija biti jednaka nuli, tj. $E_p(x_0, y_0, z_0) = 0$, može izabrati za tačku nultog potencijala ili nulti nivo potencijalne energije.

Ekvipotencijalne površi

Jednačina $E_p(x, y, z) = C$, predstavlja geometrijsko mesto tačaka u kojima je ista vrednost potencijalne energije. Ta jednačina predstavlja jednačinu površi koja se naziva ekvipotencijalna površ. Za sve vrednosti parametra C dobija se familija ekvipotencijalnih površi. U slučaju kada je $C = 0$, dobija se nulta ekvipotencijalna površ.

Postavlja se pitanje pravca i smera konzervativne sile $\vec{F}$. Neka se tačka pod dejstvom konzervativne sile $\vec{F}$ pomera po ekvipotencijalnoj površi saglasno jednačinama koje u odnosu na Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ glase $x = x(t)\ y = y(t)\ z = z(t)$. Tada iz sledi $E_p[x(t), y(t), z(t)] = C$, $\dot{E}_p = \dfrac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z} = 0$, $X\,\dot{x} + Y\,\dot{y} + Z\,\dot{z} = 0$, $\vec{F} \cdot \vec{V} = 0$, odakle sledi zaključak: sila konzervativnog polja ima pravac normale na ekvipotencijalnu površ u datoj tački. Za određivanje smera konzervativne sile može se pretpostaviti da se tačka pomera u pravcu i smeru sile konzervativnog polja. Elementarni rad konzervativne sile $\vec{F}$ na tom pomeranju, dat je sa $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$. Kako je $\delta A = -dE_p$ sledi da je $dE_p < 0$, tj. konzervativna sila uvek je usmerena u stranu smanjivanja potencijalne energije.

Zakon o održanju mehaničke energije tačke

Neka se posmatra kretanje tačke pod dejstvom aktivne konzervativne sile i neka je njeno kretanje ograničeno stacionarnim idealnim vezama, tj. tada je $\delta A(\vec{N}) = 0$ i važi $\delta A = -dE_p$. Teorema o promeni kinetičke energije tačke u diferencijalnom obliku tada postaje

$$dE_k = -dE_p\,,$$

odakle sledi

$$d\lfloor E_k + E_p \rfloor = 0\,.$$

Zbir kinetičke i potencijalne energije tačke naziva se <u>mehanička energija tačke</u> i označava se sa E, tj.

$$E_k + E_p = E\,,$$

pa se može napisati:

$$dE = 0\,,$$

tj.

$$E = E_k + E_p = const.\,,$$

što predstavlja zakon o održanju mehaničke energije tačke ili integral energije tačke i može se formulisati u sledećem obliku: pri kretanju tačke po idealnim stacionarnim vezama, u polju konzervativne sile, ukupna mehanička energija tačke se održava.