4.1.2. *LR* faktorizacija kvadratne matrice

Često se kod rešavanja sistema linearnih jednačina javlja problem predstavljanja kvadratne matrice kao proizvod dve trougaone matrice. Ovaj odeljak posvećen je ovom problemu.

Teorema 1.2.1. Ako su sve determinante

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

različite od nule, matrica $A = [a_{ij}]_{nxn}$ može se predstaviti u obliku

(1.2.1) $$A = LR,$$

gde je L donja i R gornja trougaona matrica.

Trougaone matrice L i R reda n, imaju oblike:

(1.2.2) $$L = [\ell_{ij}]_{nxn} \qquad (\ell_{ij} = 0 \Leftarrow i < j),$$

(1.2.3) $$R = [r_{ij}]_{nxn} \qquad (r_{ij} = 0 \Leftarrow i > j).$$

Razlaganje (1.2.1), poznato kao LR faktorizacija (dekompozicija), nije jedinstveno, s obzirom na jednakost

$$LR = (cL)(\tfrac{1}{c}R) \qquad (\forall c \neq 0).$$

Medjutim, ako se dijagonalnim elementima matrice R (ili L) fiksiraju vrednosti od kojih nijedna nije jednaka nuli, razlaganje je jedinstveno.

S obzirom na (1.2.2) i (1.2.3) i imajući u vidu da je

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} r_{kj} \qquad (i,j=1,\ldots,n)$$

elementi matrica L i R mogu se lako odrediti rekurzivnim postupkom, ukoliko se unapred zadaju elementi $r_{ii}(\neq 0)$ ili ℓ_{ii} $(\neq 0)$ $(i=1,\ldots,n)$.

Tako, na primer, neka su dati brojevi $r_{ii}\,(\neq 0)\,(i=1,\ldots,n)$. Tada važi

(1)
$$\ell_{11}=\frac{a_{11}}{r_{11}},$$

$$\left.\begin{aligned} r_{1i}&=\frac{a_{1i}}{\ell_{11}}\\ \ell_{i1}&=\frac{a_{i1}}{r_{11}}\end{aligned}\right\}\quad (i=2,\ldots,n);$$

(i)
$$\left.\begin{aligned} \ell_{ii}&=\frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}\ell_{ik}r_{ki}\Big),\\ &\left.\begin{aligned} r_{ij}&=\frac{1}{\ell_{ii}}\Big(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}\ell_{ik}r_{kj}\Big)\\ \ell_{ji}&=\frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}\ell_{jk}r_{ki}\Big)\end{aligned}\right\}\ (j=i+1,\ldots,n)\end{aligned}\right\}\ (i=2,\ldots,n).$$

Slično bismo mogli iskazati i rekurzivni postupak za odredjivanje elemenata matrica L i R ako su unapred dati brojevi $\ell_{ii}\,(\neq 0)\,(i=1,\ldots,n)$.

U primenama, najčešće se uzima $r_{ii}=1\,(i=1,\ldots,n)$ ili $\ell_{ii}=1\,(i=1,\ldots,n)$.

Primer 1.2.1. Razložimo matricu

$$A=\begin{bmatrix}1&4&1&3\\0&-1&2&-1\\3&14&4&1\\1&2&2&9\end{bmatrix}$$

u obliku (1.2.1), tako da jediničnu dijagonalu ima

a) matrica R; b) matrica L.

a) Kako je $r_{ii}=1\ (i=1,\ldots,4)$, na osnovu izloženog rekurzivnog postupka, imamo redom:

(1)
$$\ell_{11}=1,$$

$$r_{12}=4,\ \ell_{21}=0,\ r_{13}=1,\ \ell_{31}=3,\ r_{14}=3,\ \ell_{41}=1;$$

(2) $\ell_{22} = -1$

$r_{23} = -2,\ \ell_{32} = 2,\ r_{24} = 1,\ \ell_{42} = -2;$

(3) $\ell_{33} = 5,$

$r_{34} = -2,\ \ell_{43} = -3;$

(4) $\ell_{44} = 2.$

Dakle, dobili smo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Polazeći od $\ell_{ii} = 1$ $(i = 1,\ldots,4)$, imamo redom

(1) $r_{11} = 1,$

$r_{12} = 4,\ \ell_{21} = 0,\ r_{13} = 1,\ \ell_{31} = 3,\ r_{14} = 3,\ \ell_{41} = 1;$

(2) $r_{22} = -1,$

$r_{23} = 2,\ \ell_{32} = -2,\ r_{24} = -1,\ \ell_{42} = 2;$

(3) $r_{33} = 5,$

$r_{34} = -10,\ \ell_{43} = -3/5;$

(4) $r_{44} = 2,$

tj.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

U primenama vrlo često se javljaju višedijagonalne matrice, tj. matrice čiji su elementi različiti od nule samo na glavnoj dijagonali i oko glavne dijagonale. Na primer, ako je $a_{ij} \neq 0$ za $|i-j| \leq 1$ i $a_{ij} = 0$ za $|i-j| > 1$, matrica je trodijagonalna. Obično elemente ovakve matrice predstavljamo vektorima $(a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1,\ldots,b_n)$, $(c_1,\ldots,c_{n-1})$, tj.

4.1.3. Sopstveni vektori i sopstvene vrednosti matrica

Definicija 1.3.1. Neka je A kompleksna kvadratna matrica reda n. Svaki vektor $\vec{x} \in C^n$, koji je različit od nula-vektora, naziva se sopstveni vektor matrice A ako postoji skalar $\lambda \in C$ takav da je

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} . \tag{1.3.1}$$

Skalar λ naziva se odgovarajuća sopstvena vrednost.

S obzirom da se (1.3.1) može predstaviti u obliku

$$(A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{O},$$

zaključujemo da jednačina (1.3.1) ima netrivijalna rešenja (po $\vec{x}$) ako i samo ako je

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definicija 1.3.2. Ako je A kvadratna matrica, polinom $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se njen karakteristični polinom, a odgovarajuća jednačina $P(\lambda) = 0$ njena karakteristična jednačina.

Neka je $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Karakteristični polinom može se predstaviti u obliku

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

ili

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}p_{n-1}\lambda + (-1)^n p_n),$$

gde je p_k zbir svih glavnih minora reda k determinante matrice A, tj.

$$p_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \det(A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}).$$

Primetimo da je

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A \quad \text{i} \quad p_n = \det(A).$$

Često se umesto karakterističnog polinoma P koristi tzv. normiran karakteristični polinom H, definisan pomoću

$$H(\lambda) = (-1)^n P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n.$$

Sopstvene vrednosti matrice A (tj. nule polinoma P) λ_i $(i=1,\ldots,n)$ označavaćemo sa $\lambda_i(A)$.

Definicija 1.3.3. Skup svih sopstvenih vrednosti kvadratne matrice A naziva se spektrom te matrice i označava se sa $Sp(A)$.

Definicija 1.3.4. Spektralni radijus $\rho(A)$ kvadratne matrice A je broj

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|.$$

Teorema 1.3.1. Svaka matrica je, u matričnom smislu, nula svog karakterističnog polinoma.

Ova teorema je poznata kao Cayley-Hamiltonova teorema.

Teorema 1.3.2. Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A reda n i neka je $x \mapsto Q(x)$ skalarni polinom stepena m. Tada su

$$Q(\lambda_1),\ldots, Q(\lambda_n)$$

sopstvene vrednosti matrice $Q(A)$.

Teorema 1.3.3. Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sopstvene vrednosti regularne matrice A reda n. Tada su

$$\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}$$

sopstvene vrednosti matrice A^{-1}.

Teorema 1.3.4. Sopstvene vrednosti trougaone matrice jednake su dijagonalnim elementima.

Sledeća teorema daje rekurzivni postupak za nalaženje karakterističnog polinoma trodijagonalne matrice (1.2.4).

Teorema 1.3.5. Neka je

$$A_k = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & b_k \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H_k(\lambda) = (-1)^k \det(A_k - \lambda I).$$

Normiran karakteristični polinom $\lambda \mapsto H(\lambda)$ $(=H_n(\lambda))$ matrice $A(=A_n)$ dobija se rekurzivnim postupkom

$$H_k(\lambda) = (\lambda - b_k)H_{k-1}(\lambda) - a_{k-1}c_{k-1}H_{k-2}(\lambda) \quad (k=2,\dots,n),$$

gde su $H_o(\lambda)=1$ i $H_1(\lambda)=\lambda-b_1$.

Definicija 1.3.5. Za matricu B kaže se da je slična matrici A ako postoji bar jedna regularna matrica C, takva da je

$$B = C^{-1}AC.$$

Teorema 1.3.6. Slične matrice imaju identične karakteristične polinome, a samim tim i iste sopstvene vrednosti.

4.1.4. Specijalne matrice i njihove osobine

Neka je $A=[a_{ij}]_{mxn}$ $(a_{ij} \in C)$. Sa $\bar{A}$ označićemo konjugovanu matricu matrici A, tj. $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{mxn}$, dok ćemo sa A^T označavati transponovanu matricu od A. Nadalje, matricu $\bar{A}^T$ označavaćemo sa A^*.

Lako se uočavaju sledeće osobine

$$(A+B)^* = A^*+B^*, \quad (AB)^*=B^*A^*, \quad (A^*)^*=A,$$

$$(A^*A)^*=A^*A, \quad \det A^*=\det A, \quad (A^{-1})^*=(A^*)^{-1}.$$

Definicija 1.4.1. Ako za kvadratnu matricu A važi jednakost $A=A^T$, matrica A se naziva simetrična matrica.

Definicija 1.4.2. Ako za kvadratnu matricu A važi $A=A^*$, matrica A se naziva hermitska matrica.

Definicija 1.4.3. Ako za kvadratnu matricu A važi $A=-A^*$, matrica A se naziva kosohermitska matrica.

Definicija 1.4.4. Ako za kvadratnu matricu A važi $A^*A=I$ (I jedinična matrica), matrica A se naziva unitarna matrica.

Definicija 1.4.5. Ako za regularnu matricu važi $A^T = A^{-1}$, matrica A se naziva ortogonalna matrica.

Korišćenjem skalarnog proizvoda dva vektora $\vec{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ i $\vec{y} = [y_1 \dots y_n]^T$, definisanog pomoću

$$(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^*\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i,$$

uslov za hermitsku matricu ($A = A^*$) može se predstaviti u ekvivalentnoj formi

$$(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},A\vec{y}) \qquad (\forall \vec{x},\vec{y} \in C^n).$$

Slično se uslov za kosohermitsku matricu ($A = -A^*$) može predstaviti u obliku

$$(A\vec{x},\vec{y}) + (\vec{x},A\vec{y}) = 0 \qquad (\forall \vec{x},\vec{y} \in C^n).$$

Definicija 1.4.6. Hermitska matrica A naziva se pozitivno definitna ako je za svako $\vec{x} \neq \vec{0}$ ispunjen uslov

(1.4.1) $$(A\vec{x},\vec{x}) = \vec{x}^*A\vec{x} > 0.$$

Ako je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $\vec{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ uslov (1.4.1) može se predstaviti u obliku

$$(A\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j > 0,$$

odakle zaključujemo da je $a_{ii} > 0$ $(i = 1,\dots,n)$.

Definicija 1.4.7. Simetrična pozitivno definitna matrica naziva se normalna matrica.

Teorema 1.4.1. Matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je pozitivno definitna ako i samo ako su ispunjeni Sylvesterovi uslovi

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1,\dots,n).$$

Teorema 1.4.2. Ako matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ $(m \geq n)$ ima rang n, tada je matrica C^*C pozitivno definitna.

Teorema 1.4.3. Sve sopstvene vrednosti hermitske matrice su realni brojevi.

Teorema 1.4.4. Sve sopstvene vrednosti pozitivno definitne matrice su pozitivni brojevi.

Teorema 1.4.5. Sve sopstvene vrednosti koso-hermitske matrice su ~~čisto imaginarni~~ brojevi.

Teorema 1.4.6. Ako je A hermitska matrica, tada je

1° $\lambda(A^*A) = \lambda(A)^2$,

2° $\lambda_{\min}(A)(\vec{x},\vec{x}) \leq (A\vec{x},\vec{x}) \leq \lambda_{\max}(A)(\vec{x},\vec{x})$.

Znaci jednakosti u 2° se postižu za sopstvene vektore koji odgovaraju sopstvenim vrednostima $\lambda_{\min}(A)$ i $\lambda_{\max}(A)$.

4.1.5. Jordanov kanonički oblik

Definicija 1.5.1. Kvadratna matrica reda r

$$J_1(\lambda) = [\lambda] \qquad (r=1),$$

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (r \geq 2), \tag{1.5.1}$$

naziva se Jordanov blok.

Definicija 1.5.2. Kvazidijagonalna matrica oblika

$$J = \begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda) & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & J(\lambda) \end{bmatrix} \tag{1.5.2}$$

naziva se Jordanova matrica.

Jordanova matrica često se predstavlja i u obliku

$$J = J_{r_1}(\lambda_1) \dotplus J_{r_2}(\lambda_2) \dotplus \dots \dotplus J_{r_m}(\lambda_m). \tag{1.5.3}$$

Pod Jordanovim kanoničkim oblikom matrice A podrazumeva se ona Jordanova matrica koja je slična matrici A i njena egzistencija sleduje iz sledeće teoreme (videti, na primer, [42]).

Teorema 1.5.1. Svaka klasa sličnih matrica sadrži bar jednu Jordanovu matricu.

Napomenimo, da je broj Jordanovih blokova u (1.5.2), tj. (1.5.3), jednak broju linearno nezavisnih vektora matrice A.

Primetimo, takodje, da je λ_i sopstvena vrednost matrica $J_{r_i}(\lambda_i)$, J, A.

Primedba 1.5.1. Neka je $x \mapsto Q(x) = a_o x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ skalarni polinom i $J_r(\lambda)$ Jordanov blok (1.5.1). Tada je

$$Q(J_r(\lambda)) = \begin{bmatrix} Q(\lambda) & Q'(\lambda) & \frac{1}{2!}Q''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(r-1)!}Q^{(r-1)}(\lambda) \\ 0 & Q(\lambda) & Q'(\lambda) & & \frac{1}{(r-2)!}Q^{(r-2)}(\lambda) \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & Q(\lambda) \end{bmatrix}$$

Štaviše, ako je J Jordanova matrica, imamo

$$Q(J) = Q(J_{r_1}(\lambda_1)) \dotplus Q(J_{r_2}(\lambda_2)) \dotplus \dots \dotplus Q(J_{r_m}(\lambda_m)).$$

Teorema 1.5.2. Za proizvoljnu hermitsku matricu A, postoji unitarna matrica S, takva da je S*AS dijagonalna matrica, tj.

$$S^*AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dve važne posledice ove teoreme su:

Posledica 1.5.1. Svaka hermitska matrica A reda n ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora, koji obrazuju ortogonalni sistem.

Posledica 1.5.2. Potrebni i dovoljni uslovi, da je hermitska matrica A reda n pozitivno definitna su $\lambda_i(A) > 0$ $(i = 1,\dots,n)$.

4.1.6. Norme vektora i matrica

U teoriji iterativnih procesa veoma važnu ulogu, pri ispitivanju konvergencije, imaju norme vektora i norme matrica.

Neka je X realan prostor R^n (kompleksan prostor C^n) sa nula-vektorom $\vec{0}(=[0\ldots0]^T)$. Za vektor $\vec{x}(=[x_1\ldots x_n]^T)$ definiše se norma saglasno definiciji 1.2.1 (odeljak 2.1.2). Od svih mogućih normi vektora od interesa su norme oblika

(1.6.1) $$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < +\infty).$$

U graničnom slučaju, kada $p \to +\infty$, iz (1.6.1) sleduje

(1.6.2) $$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

U praktičnim računanjima, pored norme (1.6.2), koriste se i norme koje se iz (1.6.1) dobijaju za $p=1$ i $p=2$, tj.

(1.6.3) $$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

i

(1.6.4) $$\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Norma (1.6.4) poznata je kao Euklidska norma. Primetimo da je $\|\vec{x}\|_E = (\vec{x}^*\vec{x})^{1/2} = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Nije teško primetiti da za proizvoljno $\vec{x} \in X$ važe nejednakosti

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\|\vec{x}\|_\infty,$$
$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\vec{x}\|_\infty,$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 .$$

Neka je X_M linearan realan ili kompleksan prostor kvadratnih matrica reda n, sa nula-matricom $O(\in X_M)$.

Definicija 1.6.1. Pod normom matrice $A \in X_M$ podrazumeva se nenegativan broj $\|A\|$, takav da je

1° $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = O$ (definisanost),

2° $\|cA\| = |c|\cdot\|A\|$ (homogenost),

3° $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$ (relacija trougla),

gde su $A,B \in X_M$ i $c \in C$.

Napomenimo da se norma $\|A\|$ može razmatrati i kao norma operatora A koji se primenjuje na vektore iz prostora X.

Sada dajemo definicije saglasnosti i potčinjenosti norme matrice sa normom vektora.

Definicija 1.6.2. Norma $\|A\|$ saglasna je sa normom $\|\vec{x}\|$, ako je

$$\|A\vec{x}\| \le \|A\|\cdot\|\vec{x}\| \qquad (\forall A \in X_M \wedge \forall \vec{x} \in X)$$

i

$$\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\| \qquad (\forall A,B \in X_M).$$

Definicija 1.6.3. Neka je norma $\|A\|$ saglasna sa normom $\|\vec{x}\|$. Ako se za svako $A \in X_M$ može naći $\vec{x}(\neq\vec{0})$, takvo da je $\|A\vec{x}\| = \|A\|\cdot\|\vec{x}\|$, za normu $\|A\|$ kaže se da je potčinjena normi $\|\vec{x}\|$.

Za svaku normu matrica, potčinjenu normi vektora, važi $\|I\| = 1$, gde je I jedinična matrica.

Može se dokazati (videti, na primer, [14]) da za svaku normu vektora $\|\vec{x}\|$ postoji bar jedna potčinjena norma $\|A\|$. Na primer, norma matrice A, definisana pomoću

$$(1.6.5) \qquad \|A\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|},$$

potčinjena je upotrebljenoj normi vektora.

Na osnovu (1.6.5) možemo, na primer, naći potčinjenu normu matrice, za Euklidsku normu vektora. Tako imamo

$$\|A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_E}{\|\vec{x}\|_E}.$$

Kako je $\|A\vec{x}\|_E^2 = (A\vec{x})^*(A\vec{x})^*(A\vec{x}) = \vec{x}^*A^*A\vec{x}$ i matrica A^*A hermitska, imamo

$$(1.6.6) \qquad \|A\vec{x}\|_E^2 \le \lambda_{max}\|\vec{x}\|_E^2,$$

gde je λ_{max} najveća sopstvena vrednost matrice A^*A(videti teoremu 1.4.6). Nejednakost (1.6.6) sugeriše sledeću definiciju:

Definicija 1.6.4. Pod spektralnom normom kvadratne matrice A podrazumeva se broj $\sigma(A)$, dat pomoću

$$\sigma(A) = ||A||_{sp} = +\sqrt{\max\lambda(A^*A)}.$$

Za spektralnu normu važe sledeći rezultati:

Teorema 1.6.1. Ako je matrica A regularna, tada je

$$\sigma(A^{-1}) = +\sqrt{\frac{1}{\min\lambda(A^*A)}}.$$

Teorema 1.6.2. Spektralni radijus $\rho(A)$ matrice A nije veći od njene spektralne norme, tj. važi $\rho(A) \leq \sigma(A)$. Ako je matrica hermitska, tada je $\rho(A) = \sigma(A)$.

Teorema 1.6.3. Spektralna norma matrice je potčinjena Euklidskoj normi vektora.

Teorema 1.6.4. Neka je A hermitska matrica. Tada spektralna norma $\sigma(A)$ ima najmanju vrednost od svih mogućnih normi $||A||$, saglasnih sa nekom normom vektora.

Pored spektralne norme u upotrebi su i sledeće norme matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$:

$$1^\circ \quad ||A||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right),$$

$$2^\circ \quad ||A||_2 = \varepsilon(A) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \quad \text{(norma Schmidta)},$$

$$3^\circ \quad ||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

Za norme 1°, 2° i 3° važe sledeće teoreme:

Teorema 1.6.5. Norma $||A||_1$ potčinjena je normi vektora $||\vec{x}||_1$.

Teorema 1.6.6. Norma Schmidta $\varepsilon(A)$ za matricu reda n saglasna je sa Euklidskom normom (1.6.4), ali joj nije potčinjena za $n > 1$.

i

$$\|\vec{x}\|_\infty^H = \max_i h_i^{-1}|x_i|, \quad \|A\|_\infty^H = \max_i h_i^{-1}\left(\sum_{j=1}^n h_j|a_{ij}|\right)$$

respektivno.

4.1.7. Konvergencija matričnih nizova i redova

Posmatrajmo niz vektora $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k\in N}$, gde je

$$\vec{x}^{(k)} = \left[x_1^{(k)} \; \dots \; x_n^{(k)}\right]^T.$$

Definicija 1.7.1. Ako postoje konačne granične vrednosti

$$a_i = \lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)} \qquad (i=1,\dots,n),$$

kažemo da niz $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k\in N}$ konvergira ka vektoru $\vec{a} = [a_1 \dots a_n]^T$, a vektor $\vec{a}$ nazivamo graničnom vrednošću niza $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k\in N}$.

Slično definišemo i konvergenciju niza matrica $\{A^{(k)}\}_{k\in N}$ gde je $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$.

Definicija 1.7.2. Ako postoje konačne granične vrednosti

$$a_{ij} = \lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} \qquad (i,j=1,\dots,n),$$

kažemo da niz $\{A^{(k)}\}_{k\in N}$ konvergira ka matrici $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Matricu A nazivamo graničnom vrednošću niza $\{A^{(k)}\}_{k\in N}$.

Mogu se dati i druge definicije konvergencije niza vektora i niza matrica zasnovane na ranije uvedenom pojmu norme (konvergencija po normi). Naime, mi kažemo da $\vec{x}^{(k)} \to \vec{a}$ $(k\to+\infty)$, ako $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\| \to 0$, kada $k\to+\infty$. Slično, kažemo da $A^{(k)} \to A$ $(k\to+\infty)$, ako $\|A^{(k)} - A\| \to 0$, kada $k\to+\infty$. Može se, medjutim, pokazati da je definicija konvergencije po normi ekvivalentna prethodnoj datoj definiciji po koordinatama (videti, na primer, [36]).

Primedba 1.7.1. Na osnovu nejednakosti

$$\left| \|\vec{x}^{(k)}\| - \|\vec{a}\| \right| \leq \|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\|$$

zaključujemo da iz $\vec{x}^{(k)} \to \vec{a}\,(k\to+\infty)$ sleduje $\|\vec{x}^{(k)}\| \to \|\vec{a}\|(k\to+\infty)$. Takodje važi

$$A^{(k)} \to A\,(k\to+\infty) \Longrightarrow \|A^{(k)}\| \to \|A\|\ (k\to+\infty).$$

Teorema 1.7.1. Niz matrica $\{A^k\}_{k\in N}$ konvergira ka nula matrici 0, ako i samo ako su sve sopstvene vrednosti matrice A po modulu manje od jedinice.

Dokaz. S obzirom da se matrica A može transformisati na Jordanov oblik, tj. da postoji regularna matrica C, takva da je

$$J = C^{-1}AC,$$

gde je J Jordanova matrica (videti odeljak 4.1.5), imamo, za svako $k\in N$,

$$A^k = CJ^kC^{-1},$$

odakle zaključujemo da niz $\{A^k\}_{k\in N}$ konvergira (ne konvergira) ka nula matrici ako i samo ako niz $\{J^k\}_{k\in N}$ konvergira (ne konvergira) ka nula matrici.

Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\ (m\le n)$ medjusobno različite sopstvene vrednosti matrice A (matrice J). Kako na osnovu primedbe 1.5.1 (sa $Q(x)=x^k$) važe ekvivalencije

$$\lim_{k\to+\infty} J_r(\lambda)^k = 0 \iff |\lambda|<1$$

i

$$\lim_{k\to+\infty} J^k = 0 \iff \lim_{k\to+\infty} J_{r_i}(\lambda_i)^k = 0 \quad (\forall i),$$

dokaz je završen. $\square$

Sledeća teorema daje dovoljan uslov za konvergenciju niza $\{A^k\}_{k\in N}$ ka nula matrici.

Teorema 1.7.2. Ako je bilo koja norma matrice A manja od jedinice važi $A^k \to 0\ (k\to+\infty)$.

Dokaz. Kako je

$$\|A^k - 0\| = \|A^k\| = \|AA^{k-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{k-1}\| \le \ldots \le \|A\|^k$$

i kako je po pretpostavci $\|A\| < 1$, imamo $\|A^k\| \to 0$ $(k\to+\infty)$, tj. $A^k \to 0$ $(k\to+\infty)$.

Ovim je dokaz završen.

Sada ćemo dokazati jedan važan rezultat koji je u vezi sa teoremama 1.6.2. i 1.6.4.

Teorema 1.7.3. Spektralni radijus $\rho(A)$ matrice A nije veći od bilo koje njene norme.

Dokaz. Za proizvoljan pozitivan broj ε definišemo matricu B pomoću

$$B = \frac{1}{\|A\|+\varepsilon} A.$$

Kako je $\|B\| = \frac{1}{\|A\|+\varepsilon}\|A\| < 1$, iz teoreme 1.7.2 sleduje $B^k \to 0$ $(k\to+\infty)$. S druge strane, na osnovu teoreme 1.7.1. zaključujemo da su sve sopstvene vrednosti matrice B po modulu manje od jedinice, tj. $|\lambda_i(B)| < 1$. Ako sa $\lambda_i(A)$ označimo proizvoljnu sopstvenu vrednost matrice A, tada je

$$|\lambda_i(B)| = \frac{1}{\|A\|+\varepsilon}|\lambda_i(A)| < 1,$$

tj. $|\lambda_i(A)| < \|A\| + \varepsilon$. S obzirom da se ε može uzeti dovoljno malo zaključujemo da je $|\lambda_i(A)| \le \|A\|$, tj. $\rho(A) \le \|A\|$. $\square$

Oslanjajući se na koncept konvergencije matričnog niza, moguće je definisati matrični red pomoću

$$\sum_{m=0}^{+\infty} B^{(m)} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{m=0}^{k} B^{(m)} \tag{1.7.1}$$

gde su $B^{(m)}$ $(m = 0,1,\ldots)$ matrice istog reda.

Teorema 1.7.4. Ako matrični red (1.7.1) konvergira tada je

$$\lim_{k\to+\infty} B^{(k)} = 0.$$

Dokaz. Neka je $S^{(k)} = \sum_{m=0}^{k} B^{(m)}$ $(k = 0,1,\ldots)$ i neka je suma reda (1.7.1) S, tj. $\lim_{k\to+\infty} S^{(k)} = S$. Tada je

$$S^{(k)} - S^{(k-1)} = B^{(k)},$$

tj.

$$\lim_{k\to+\infty} S^{(k)} - \lim_{k\to+\infty} S^{(k-1)} = \lim_{k\to+\infty} B^{(k)},$$

odakle neposredno sleduje tvrdjenje teoreme 1.7.4. $\square$

U daljem tekstu daćemo potrebne i dovoljne uslove za konvergenciju matrične geometrijske progresije

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A^m = I + A + A^2 + \dots, \tag{1.7.2}$$

gde je A kvadratna matrica reda n. Ovde je $B^{(m)} = A^m$ $(m=0,1,\dots)$.

Teorema 1.7.5. Matrični red (1.7.2) konvergira ako i samo ako je

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0. \tag{1.7.3}$$

Štaviše, tada je

$$I + A + A^2 + \dots = (I-A)^{-1}. \tag{1.7.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da matrični red (1.7.2) konvergira. Tada, na osnovu teoreme 1.7.4, važi (1.7.3).

Obrnuto, pretpostavimo da je ispunjen uslov (1.7.3). Tada su, na osnovu teoreme 1.7.1, sve sopstvene vrednosti matrice A po modulu manje od jedinice, tj. $|\lambda_i(A)| < 1$ $(i=1,\dots,n)$. Kako je

$$\det(I-A) = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i(A)) \neq 0,$$

zaključujemo da postoji matrica $(I-A)^{-1}$. Množenjem identiteta

$$(I + A + A^2 + \dots + A^k)(I-A) = I - A^{k+1},$$

matricom $(I-A)^{-1}$ s desne strane, dobijamo

$$I + A + A^2 + \ldots + A^k = (I - A)^{-1} - A^{k+1}(I - A)^{-1},$$

odakle sleduje

$$\lim_{k\to+\infty} (I + A + A^2 + \ldots + A^k) = (I - A)^{-1} - \lim_{k\to+\infty} A^{k+1}(I - A)^{-1}$$

$$= (I - A)^{-1},$$

tj. (1.7.4), čime je dokaz teoreme završen.

S obzirom na tvrdjenje teoreme 1.7.1, prvi deo teoreme 1.7.5 se može formulisati i na sledeći način:

Teorema 1.7.6. Matrični red (1.7.2) konvergira ako i samo ako su sve sopstvene vrednosti matrice A po modulu manje od jedinice.

4.2. DIREKTNI METODI

Numerički problemi u linearnoj algebri mogu se klasifikovati u nekoliko grupa:

1° Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

sa regularnom matricom A, izračunavanje determinante od A i inverzija matrice A;

2° Rešavanje proizvoljnog sistema linearnih jednačina metodom najmanjih kvadrata;

3° Odredjivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora date kvadratne matrice;

4° Rešavanje zadatka linearnog programiranja.

Za rešavanje ovih problema razvijen je čitav niz metoda, koji se mogu podeliti na direktne i iterativne. Ovo poglavlje posvećujemo direktnim metodima za rešavanje problema iz tačke 1°.

10 μs, što je slučaj kod većine računara, to bi za izračunavanje vrednosti jedne determinante tridesetog reda bilo potrebno oko

$$\frac{30 \cdot 30! \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{3600 \cdot 24 \cdot 365} = 2.5 \cdot 10^{21} \text{ godina.}$$

Uopšteno govoreći ovakav postupak je praktično ne primenljiv već za determinante reda $n > 5$.

4.2.2. Gaussov metod eliminacije i Gauss–Jordanov metod

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

koji ima jedinstveno rešenje. Za rešavanje ovog sistema, tj.

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{2.2.2}$$

gde su $A, \vec{b}, \vec{x}$ dati pomoću (2.1.1), postoji veliki broj direktnih metoda. Jedan od najpogodnijih je svakako Gaussov metod eliminacije, koji ima više varijanata. U suštini Gaussov metod se zasniva na redukciji sistema (2.2.2), primenom elementarnih transformacija, na trougaoni sistem jednačina

$$R\vec{x} = \vec{c}, \tag{2.2.3}$$

gde su

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Sistem (2.2.3) se rešava sukcesivno polazeći od poslednje jednačine. Naime,

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}x_k\right) \qquad (i = n-1,\dots,1).$$

Napomenimo da su koeficijenti $r_{ii} \neq 0$, jer po pretpostavci sistem (2.2.2), tj. (2.2.3) ima jedinstveno rešenje.

Pokazaćemo sada kako se sistem (2.2.1) može redukovati na ekvivalentan sistem sa trougaonom matricom.

Pod pretpostavkom da je $a_{11} \neq 0$, izračunajmo najpre faktore

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad (i = 2,\dots,n),$$

a zatim množenjem prve jednačine u sistemu (2.2.1) sa m_{i1} i oduzimanjem od i-te jednačine, dobijamo sistem od n-1 jednačina

$$\text{(2.2.4)} \qquad \left\{\begin{array}{l} a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \end{array}\right.$$

gde su

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1 \qquad (i,j = 2,\dots,n).$$

Pod pretpostavkom da je $a_{22}^{(2)} \neq 0$, primenjujući isti postupak na (2.2.4) sa $m_{i2} = a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$ $(i = 3,\dots,n)$ dobijamo sistem od n-2 jednačine

$$\begin{array}{l} a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \vdots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)}, \end{array}$$

gde su

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \qquad (i,j = 3,\dots,n).$$

Primer 2.2.1. Neka je dat sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
2.304x_1 - 1.213x_2 + 2.441x_3 &= 7.201,\\
8.752x_1 - 5.608x_2 + 3.916x_3 &= 9.284,\\
1.527x_1 + 4.333x_2 - 2.214x_3 &= 3.551.
\end{aligned}
$$

Zaokrugljujući sve medjurezultate na četiri značajne cifre, Gaussovom eliminacijom dobijamo trougaoni sistem

$$
\begin{aligned}
2.304x_1 - 1.213x_2 + 2.441x_3 &= 7.201,\\
-0.9998x_2 - 5.357x_3 &= -18.07,\\
-31.36x_3 &= -94.07,
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo redom $x_3 = 3.000$, $x_2 = 1.999$, $x_1 = 0.9995$. Faktori m_{ij}, u ovom slučaju, su

$$m_{21} = 3.799, \quad m_{31} = 6.628, \quad m_{32} = -5.138.$$

Napomenimo, da su tačna rešenja datog sistema $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

S obzirom na numerički postupak za trougaonu redukciju i proces zaokrugljivanja medjurezultata, javiće se greška u elementima matrice R i vektora $\vec{c}$. Naime, umesto sistema (2.2.3) dobijamo sistem $R_o\vec{x} = \vec{c}_o$, gde su $R_o = R + \Delta R$ i $\vec{c}_o = \vec{c} + \Delta\vec{c}$. Rešenje ovog sistema biće $\vec{x}_o = \vec{x} + \Delta\vec{x}$, gde je $\vec{x}$ tačno rešenje sistema (2.2.3). Nije teško ustanoviti da će greška biti veća, što je glavni element $a_{kk}^{(k)}$ manji po modulu od preostalih elemenata matrice. U vezi sa ovim navodimo jedan interesantan primer koji potiče od Wilkinsona ([63, str. 205]).

Primer 2.2.2. Gaussovim metodom eliminacije rešimo sistem jednačina

$$
\begin{bmatrix}
0.000003 & 0.213472 & 0.332147\\
0.215512 & 0.375623 & 0.476625\\
0.173257 & 0.663257 & 0.625675
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.235262\\ 0.127653\\ 0.285321 \end{bmatrix}
$$

uzimajući sve medjurezultate sa šest značajnih cifara. S obzirom