da su faktori u ovom slučaju

$$m_{21} = 71837.3, \; m_{31} = 57752.3, \; m_{32} = 0.803905,$$

odgovarajući trougaoni sistem postaje

$$\begin{bmatrix} 0.000003 & 0.213472 & 0.332147 \\ & -15334.9 & -23860.0 \\ & & -0.500000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.235262 \\ -16900.5 \\ -0.20000 \end{bmatrix},$$

odakle je $x_3 = 0.400000$, $x_2 = 0.479723$, $x_1 = -1.33333$.

Posmatrajmo sada dati sistem jednačina u kome su prva i druga jednačina permutovane. S obzirom da su sada faktori

$$m_{21} = 0.0000139203 \quad \text{i} \quad m_{31} = 0.803932,$$

posle prvog eliminacionog koraka dolazimo do sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} 0.215512 & 0.375623 & 0.476625 \\ & 0.213467 & 0.332140 \\ & 0.361282 & 0.242501 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.127653 \\ 0.235260 \\ 0.182697 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, kako je element na mestu (2,2) manji od elementa na mestu (3,2), u matrici poslednjeg sistema jednačina izvršimo permutaciju druge i treće vrste. Tada, s obzirom na faktor $m_{32} = 0.590860$, posle drugog eliminacionog koraka dobijamo

$$\begin{bmatrix} 0.215512 & 0.375623 & 0.476625 \\ & 0.361282 & 0.242501 \\ & & 0.188856 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.127653 \\ 0.182697 \\ 0.127312 \end{bmatrix},$$

odakle sleduje $x_3 = 0.674122$, $x_2 = 0.0532050$, $x_1 = -0.991291$.

Napomenimo da su tačna rešenja datog sistema, sa deset značajnih cifara,

$$x_3 = 0.6741214694, \; x_2 = 0.05320393391, \; x_1 = -0.9912894252.$$

Na osnovu poslednjeg primera vidimo da strategija izbora glavnog elementa bitno utiče na tačnost rezultata. Modifikacija Gaussovog eliminacionog metoda u ovom smislu, naziva se Gaussov metod sa izborom glavnog elementa. Dakle, prema ovom metodu za glavni element u k-tom eliminacionom koraku uzimamo element $a_{rk}^{(k)}$, za koji je $|a_{rk}^{(k)}| = \max\limits_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$, uz permutaciju k-te i r-te vrste.

Ako dozvolimo i permutaciju nepoznatih najbolje je za glavni element u k-tom eliminacionom koraku uzeti element $a_{rs}^{(k)}$, za koji je $|a_{rs}^{(k)}| = \max\limits_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$, uz permutaciju k-te i r-te vrste i k-te i s-te kolone. Ovakav postupak se naziva metod sa totalnim izborom glavnog elementa.

Odredimo sada broj računskih operacija u Gaussovom metodu pri rešavanju sistema od n jednačina sa n nepoznatih.

Kod redukcije sistema na trougaoni oblik, u prvom eliminacionom koraku, potrebno je n-1 deljenja, n(n-1) množenja i n(n-1) oduzimanja, što iznosi $(n-1)(2n+1) = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$. Na osnovu ovoga može se zaključiti da je potreban broj računskih operacija u k-tom eliminacionom koraku $2(n-k)^2 + 3(n-k)$, pa je ukupan broj operacija za trougaonu redukciju

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)^2 + 3(n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2+3k) = \frac{1}{6}(4n^3 + 3n^2 - 7n).$$

Pri rešavanju sistema sa trougaonom matricom potrebno je n deljenja, $n(n-1)/2$ množenja i $n(n-1)/2$ oduzimanja, što iznosi ukupno n^2 operacija. Dakle, ukupan broj računskih operacija u Gaussovom metodu iznosi

$$N(n) = \frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 - 7n).$$

Za zadovoljno veliko n imamo $N(n) \cong 2n^3/3$. Dugo vremena se mislilo da je Gaussov metod o p t i m a l a n u pogledu broja računskih operacija. U novije vreme V. Strassen ([60]) je, uvodeći iterativni algoritam za množenje i inverziju matrica, dao jedan metod za rešavanje sistema linearnih jednačina, kod koga je broj računskih operacija reda $n^{\log_2 7}$. Strassenov metod je dakle, efiostaje da se reše trougaoni sistemi $R\vec{x}_i = \vec{c}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dakle, primena Gaussovog metoda može se iskazati kao transformacija

$$[A \mid I] \to [R \mid C].$$

Za inverziju matrica vrlo često se koristi Gauss-Jordanov metod i to u varijanti sa jediničnom dijagonalom. U ovom slučaju, odgovarajuća transformacija je

$$[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}],$$

što znači da se na mesto jedinične matrice pojavljuje inverzna matrica.

Primer 2.3.1. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primenom Gauss-Jordanovog metoda na $[A \mid I]$ imamo redom

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Dakle,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.2.4. Faktorizacioni metodi

Faktorizacioni metodi za rešavanje sistema linearnih jednačina zasnivaju se na razlaganju matrice sistema na proizvod dve matrice čiji je oblik takav da omogućava svodjenje sistema na dva sistema jednačina koji se jednostavno sukcesivno rešavaju. U ovom odeljku ukazaćemo na metode zasnovane na LR faktorizaciji matrice (videti odeljak 4.1.2).

Neka je dat sistem jednačina

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{2.4.1}$$

sa kvadratnom matricom A, čiji su svi glavni dijagonalni minori različiti od nule. Tada, na osnovu teoreme 1.2.1, postoji faktorizacija matrice $A = LR$, gde je L donja i R gornja trougaona matrica. Faktorizacija je jednoznačno odredjena, ako se, na primer, usvoji da matrica L ima jediničnu dijagonalu. U tom slučaju, sistem (2.4.1), tj. sistem $LR\vec{x} = \vec{b}$, se može predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$L\vec{y} = \vec{b}, \qquad R\vec{x} = \vec{y}. \tag{2.4.2}$$

Na osnovu prethodnog, za rešavanje sistema jednačina (2.4.1), može se formulisati sledeći metod:

1° Stavimo $\ell_{ii} = 1$ $(i = 1,\dots,n)$,

2° Odredimo ostale elemente matrice $L = [\ell_{ij}]_{n\times n}$ i matrice $R = [r_{ij}]_{n\times n}$ (videti odeljak 4.1.2),

3° Rešimo prvi sistem jednačina u (2.4.2),

4° Rešimo drugi sistem jednačina u (2.4.2),

Koraci 3° i 4° se jednostavno izvode. Naime, neka su

$$\vec{b} = [b_1\ b_2 \dots b_n]^T, \quad \vec{y} = [y_1\ y_2 \dots y_n]^T, \quad \vec{x} = [x_1\ x_2 \dots x_n]^T.$$

Tada je

$$y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} y_k \qquad (i = 2,\dots,n)$$

i

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} x_k\right) \qquad (i = n-1,\dots,1).$$

Izloženi metod se u literaturi sreće kao metod Haleckog. U slučaju kada je matrica A normalna, tj. kada je simetrična i pozitivno definitna, metod Haleckog se može uprostiti. Naime, tada se može uzeti da je $L = R^T$. Dakle, treba odrediti faktorizaciju matrice A u obliku $A = R^T R$. Na osnovu formula iz odeljka

4.1.2 za elemente matrice R važe formule

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1j} = \frac{a_{1j}}{r_{11}} \quad (j = 2,\ldots,n)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} \\ r_{ij} &= \frac{1}{r_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}r_{kj}\right) \quad (j=i+1,\ldots,n) \end{aligned}\right\} \quad (i=2,\ldots,n).$$

U ovom slučaju sistemi (2.4.2) postaju

$$R^T\vec{y} = \vec{b}, \quad R\vec{x} = \vec{y}.$$

Navedena modifikacija metoda Haleckog se naziva metod kvadratnog korena.

Primedba 2.4.1. Determinanta normalne matrice se može izračunati metodom kvadratnog korena

$$\det A = (r_{11}r_{22}\cdots r_{nn})^2.$$

Faktorizacioni metodi su naročito pogodni za rešavanje sistema linearnih jednačina, kod kojih se matrica sistema ne menja, već samo vektor slobodnih članova $\vec{b}$. Ovakvi sistemi se često javljaju u tehnici*.

Sada ćemo pokazati da se Gaussov metod eliminacije može interpretirati kao LR faktorizacija matrice A. Uzmimo matricu A takvu, da prilikom eliminacije ne treba vršiti permutaciju vrsta i kolona. Polazni sistem označimo sa $A^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)}$. Gaussov eliminacioni postupak daje n-1 ekvivalentnih sistema $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$, pri čemu matrica $A^{(k)}$ ima oblik takav da su svi njeni elementi ispod glavne dijagonale i ispred k-te kolone jednaki nuli, tj.

$A(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = \vec{b}+\Delta\vec{b}$, $\|\Delta\vec{x}\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta\vec{b}\|$

$A\Delta\vec{x} = \Delta\vec{b}$ $\qquad \|\vec{b}\| \le \|A\|\cdot\|\vec{x}\|$

$\dfrac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\dfrac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$

odakle je $A\Delta\vec{x} = \Delta\vec{b}$, tj. $\Delta\vec{x} = A^{-1}\Delta\vec{b}$. Iz ove jednakosti sleduje

(2.6.1) $$\|\Delta\vec{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\vec{b}\|.$$

Kako je $\|\vec{b}\| = \|A\vec{x}\| \le \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$, imamo

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} = k(A)\,\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|},$$

gde je $k(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$. Broj $k(A)$ naziva se faktorom uslovljenosti matrice A. Faktor uslovljenosti zavisi od upotrebljene norme matrice, ali je uvek $k(A) \ge 1$, što sleduje iz

$$\|\vec{x}\| = \|I\vec{x}\| = \|AA^{-1}\vec{x}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|\vec{x}\|. \qquad \vec{x} \ne \vec{0}$$

Što je faktor $k(A)$ veći od jedinice kažemo da je matrica A slabije uslovljena. Sistem sa slabouslovljenom matricom nazivamo slabouslovljenim sistemom*.

Kada se koristi spektralna norma, faktor uslovljenosti je dat sa

$$k(A) = \sigma(A)\sigma(A^{-1}) = \sqrt{\frac{\max\lambda(A^*A)}{\min\lambda(A^*A)}}.$$

Ukoliko je matrica A hermitska, prethodni izraz se pojednostavljuje, tj. postaje

$$k(A) = \frac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|}.$$

Zbog svojstva minimalnosti spektralne norme, ova vrednost broja $k(A)$ za hermitsku matricu A je najmanja u odnosu na vrednosti koje se dobijaju korišćenjem drugih normi.

Nejednakost (2.6.1) se može interpretirati i na sledeći način. Neka je $\vec{x}_p$ približno rešenje jednačine $A\vec{x} = \vec{b}$. Sa $\vec{r}(\vec{x}_p)$ označimo odgovarajući *"vektor ostatak"*, tj.

$$\vec{r}(\vec{x}_p) = A\vec{x}_p - \vec{b} = A(\vec{x}_p - \vec{x}).$$

* *U anglo-saksonskoj literaturi: ill conditioned systems, a u ruskoj:* плохо обусловленные системы.

Dakle, $\vec{x}_p$ je tačno rešenje jednačine $A\vec{x}_p = \vec{b} + \vec{r}(\vec{x}_p)$ i za grešku važi

(2.6.2) $$\|\Delta\vec{x}\| \leqq \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{r}(\vec{x}_p)\| .$$

Na osnovu ove nejednakosti može se zaključiti da $\|\Delta\vec{x}\|$ može biti velika, i u slučajevima kada je veličina $\|\vec{r}(\vec{x}_p)\|$ dovoljno mala.

Teorema 2.6.1. Neka je A regularna matrica reda n, $B = A(I+F)$, $\|F\| < 1$ i vektori $\vec{x}$ i $\Delta\vec{x}$ definisani pomoću $A\vec{x} = \vec{b}$, $B(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = \vec{b}$. Tada je

1^o $$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leqq \frac{\|F\|}{1-\|F\|},$$

2^o $$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leqq \frac{k(A)}{1-k(A)\frac{\|B-A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|B-A\|}{\|A\|} \text{ ako je } k(A)\frac{\|B-A\|}{\|A\|} < 1.$$

Dokaz. Kako, na osnovu učinjenih pretpostavki, B^{-1} egzistira imamo

$$\Delta\vec{x} = B^{-1}\vec{b} - A^{-1}\vec{b} = B^{-1}(A-B)A^{-1}\vec{b}, \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leqq \|B^{-1}(A-B)\| = \|-(I+F)^{-1}A^{-1}AF\| \leqq \|(I+F)^{-1}\| \cdot \|F\| \leqq \frac{\|F\|}{1-\|F\|}.$$

Imajući u vidu da je $F = A^{-1}(B-A)$ i $\|F\| \leqq k(A)\ \|B-A\|/\|A\|$, na osnovu poslednje nejednakosti dobijamo nejednakost 2^o.

Pomoću teoreme 2.6.1 moguće je oceniti grešku u rešenju $\vec{x}$, pri zameni matrice A nekom drugom matricom. Naime, ako stavimo $C = (I+F)^{-1} = B^{-1}A$, $F = A^{-1}B - I$, imamo

$$\|B^{-1}A\| \leqq \frac{1}{1-\|A^{-1}B-I\|}.$$

S druge strane, iz $A^{-1} = A^{-1}BB^{-1}$ sleduje pri čemu smo iskoristili jednakost $A^{-1}B = (B^{-1}A)^{-1} = (I-(I-B^{-1}A))^{-1}$.

Najzad, na osnovu (2.6.2) dobijamo

$$||\vec{x}_p - \vec{x}|| \le \frac{||B^{-1}||}{1 - ||I - B^{-1}A||} ||\vec{r}(\vec{x}_p)|| \qquad (||I-B^{-1}A|| < 1).$$

Primer 2.6.1. Jedan tipičan primer slabouslovljenog sistema je sistem (videti [40])

$$\begin{bmatrix} 121734 & 169217 & 176624 & 166662 \\ 169217 & 235222 & 245505 & 231653 \\ 176624 & 245505 & 256423 & 242029 \\ 166662 & 231653 & 242029 & 228474 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 634237 \\ 881597 \\ 920581 \\ 868818 \end{bmatrix},$$

čija su tačna rešenja $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Medjutim, ako koordinate vektora slobodnih članova variraju samo za ± 1 i recimo budu

$$b_1 = 634238,\ b_2 = 881596,\ b_3 = 920580,\ b_4 = 868819,$$

rešenja sistema postaju

$$x_1 = 130214370,\ x_2 = 78645876,\ x_3 = -32701403,\ x_4 = 19395881.$$

Iz datog primera se može videti da je problem rešavanja slabouslovljenih sistema veoma složen i njemu treba pristupati obazrivo.

4.3. ITERATIVNI METODI

Drugu važnu klasu metoda u linearnoj algebri čine iterativni metodi, kod kojih se teorijski rezultat dobija posle beskonačnog broja koraka. Praktično, medjutim, za nalaženje remetoda izloženih u prethodnom poglavlju.

U ovom poglavlju razmatraćemo samo iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina i metode za inverziju matrica. Iterativni metodi za rešavanje problema sopstvenih vrednosti (kao uostalom i direktni metodi) biće razmatrani u posebnom poglavlju. Napomenimo ovde da se za rešavanje sistema sa velikim brojem jednačina, kakvi se javljaju pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina, uglavnom koriste iterativni metodi.

4.3.1. Načini formiranja iterativnih metoda

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

koji se može predstaviti i u matričnom obliku

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{3.1.2}$$

gde su

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Uvek u ovom poglavlju, pretpostavljamo da sistem (3.1.1), tj. (3.1.2) ima jedinstveno rešenje.

Iterativni metodi za rešavanje sistema (3.1.2) imaju za cilj odredjivanje rešenja $\vec{x}$ sa unapred zadatom tačnošću. Naime, polazeći od proizvoljnog vektora $\vec{x}^{(o)}$ $(=[x_1^{(o)} \dots x_n^{(o)}]^T)$, iterativnim metodom

Često se za C_k uzima dijagonalna matrica sa jednakim elementima na dijagonali, tj. $C_k = \mathrm{diag}(c_k,\ldots,c_k) = c_k I$ $(c_k \in R)$. Tada se (3.1.7) svodi na

$$F_k(\vec{x}) = \vec{x} - c_k(A\vec{x} - \vec{b}). \tag{3.1.8}$$

Ako se matrica A predstavi u obliku

$$A = D_k + E_k,$$

gde je D_k regularna matrica, tada se F_k može zadati u implicitnom obliku kao

$$D_k F_k(\vec{x}) + E_k\vec{x} = \vec{b}. \tag{3.1.9}$$

U praktičnim primenama, za D_k se najčešće uzima dijagonalna ili trougaona matrica.

Formule (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) se koriste za formiranje različitih iterativnih metoda za rešavanje sistema (3.1.1).

Na kraju, napomenimo da se metodom najmanjih kvadrata može dobiti niz iterativnih procesa. Ovaj metod se zasniva na minimizaciji funkcionele f definisane pomoću

$$f(\vec{x}) = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2.$$

U slučaju da je A realna normalna matrica, za rešavanje sistema (3.1.1) može se koristiti minimizacija funkcionele odredjene sa

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x},\vec{x}) - 2(\vec{b},\vec{x}).$$

конвергенција

4.3.2. Metod proste iteracije

Jedan od najprostijih stacionarnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina, tzv. metod proste iteracije, zasnovan je na primeni funkcije date pomoću (3.1.6), tj.

$$F(\vec{x}) = B\vec{x} + C\vec{b}. \tag{3.2.1}$$

Često se za C_k uzima dijagonalna matrica sa jednakim elementima na dijagonali, tj. $C_k = \mathrm{diag}(c_k,\ldots,c_k) = c_k I$ $(c_k \in R)$. Tada se (3.1.7) svodi na

$$F_k(\vec{x}) = \vec{x} - c_k(A\vec{x} - \vec{b}). \tag{3.1.8}$$

Ako se matrica A predstavi u obliku

$$A = D_k + E_k,$$

gde je D_k regularna matrica, tada se F_k može zadati u implicitnom obliku kao

$$D_k F_k(\vec{x}) + E_k\vec{x} = \vec{b}. \tag{3.1.9}$$

U praktičnim primenama, za D_k se najčešće uzima dijagonalna ili trougaona matrica.

Formule (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) se koriste za formiranje različitih iterativnih metoda za rešavanje sistema (3.1.1).

Na kraju, napomenimo da se metodom najmanjih kvadrata može dobiti niz iterativnih procesa. Ovaj metod se zasniva na minimizaciji funkcionele f definisane pomoću

$$f(\vec{x}) = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2.$$

U slučaju da je A realna normalna matrica, za rešavanje sistema (3.1.1) može se koristiti minimizacija funkcionele odredjene sa

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x},\vec{x}) - 2(\vec{b},\vec{x}).$$

конвергенција

4.3.2. Metod proste iteracije

Jedan od najprostijih stacionarnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina, tzv. metod proste iteracije, zasnovan je na primeni funkcije date pomoću (3.1.6), tj.

$$F(\vec{x}) = B\vec{x} + C\vec{b}. \tag{3.2.1}$$

Ako stavimo $C\vec{b}=\vec{\beta}$, iz (3.2.1) sleduje

$$\vec{x}^{(k)} = B\vec{x}^{(k-1)}+\vec{\beta} \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{3.2.2}$$

Napomenimo, da je jednačina

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{\beta} \tag{3.2.3}$$

ekvivalentna sa

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3.2.4}$$

Matrica B se naziva iterativna matrica.

Ako se podje od proizvoljnog vektora $\vec{x}^{(o)}$, pomoću (3.2.2) generiše se niz $\{\vec{x}^{(k)}\}$. Razmatraćemo uslove pod kojima generisani niz konvergira ka tačnom rešenju sistema (3.2.3).

Ako je

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

iterativni metod (3.2.2) može se predstaviti skalarno

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)}+\ldots+b_{1n}x_n^{(k-1)}+\beta_1, \\ x_2^{(k)} &= b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{22}x_2^{(k-1)}+\ldots+b_{2n}x_n^{(k-1)}+\beta_2, \\ &\vdots \\ x_n^{(k)} &= b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)}+\ldots+b_{nn}x_n^{(k-1)}+\beta_n, \end{aligned}$$

gde je $k=1,2,\ldots$.

Dokazaćemo sledeće dve teoreme.

Teorema 3.2.1. Ako je $\vec{x}^{(o)}$ proizvoljan vektor, $\|B\|<1$ je dovoljan uslov za konvergenciju procesa (3.2.2) ka tačnom rešenju $\vec{x}$ sistema (3.2.3).