$r - \log_{10} \|B\|$

Teorema 3.2.2. Ako je $\vec{x}^{(0)}$ proizvoljan vektor i $\|B\| < 1$, tada za svako $k \in N$, važe nejednakosti

$\vec\beta - \vec x = B\vec x$

$$\|(I-B)^{-1} - (I+B+\ldots+B^{k-1})\| \leqq \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}; \tag{3.2.5}$$

$$\boxed{\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}\| \leqq \|B\|^k \|\vec{x}^{(o)}\| + \frac{\|\vec{\beta}\|\cdot\|B\|^k}{1-\|B\|};} \tag{3.2.6}$$

$= \|\vec\beta\|^k \|\vec\beta\|$

$$\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}\| \leqq \|B\|\cdot\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}\|; \tag{3.2.7}$$

$\vec x^{(0)} = \vec\beta$

$$\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}\| \leqq \|B\|^k \|\vec{x}^{(o)} - \vec{x}\|. \tag{3.2.8}$$

$\vec\beta - \vec x = B\vec x$

Dokaz teoreme 3.2.1. Na osnovu (3.2.2) matematičkom indukcijom lako dokazujemo jednakost

$\vec x^{(k)} = B\vec x^{(k-1)} +$

$$\vec{x}^{(k)} = B^k\vec{x}^{(o)} + (I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta} \quad (k\in N). \tag{3.2.9}$$

$= B(B\vec x^{(k-2)} + \vec\beta) + \vec\beta$

Kako je $\|B\| < 1$, imamo

$$\lim_{k\to+\infty} \|B^k\| = 0, \text{ tj. } \lim_{k\to+\infty} B^k = 0$$

i

$$\lim_{k\to+\infty} (I+B+\ldots+B^{k-1}) = (I-B)^{-1}.$$

Tada, iz (3.2.9) sleduje

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} B^k\vec{x}^{(o)} + \lim_{k\to+\infty} (I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta} = (I-B)^{-1}\vec{\beta},$$

odakle zaključujemo da niz $\{\vec{x}^{(k)}\}$ konvergira ka rešenju jednačine (3.2.3).

Dokaz teoreme 3.2.2. Iz jednakosti

$$(I-B)^{-1} = I + B + B^2 + \ldots \qquad (\|B\| < 1)$$

sleduje

$$(I-B)^{-1}-(I+B+\ldots+B^{k-1}) = B^k + B^{k+1} + \ldots,$$

Do sada smo razmatrali dovoljne uslove za konvergenciju iterativnog procesa (3.2.2). Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove.

Teorema 3.2.6. Neka je $\vec{x}^{(0)}$ proizvoljan početni vektor. Potreban i dovoljan uslov za konvergenciju iterativnog procesa (3.2.2) je da su sve sopstvene vrednosti matrice B po modulu manje od jedinice.

Dokaz. Kako za iterativni proces (3.2.2) važi jednakost (3.2.9), tj.

$$\vec{x}^{(k)} = B^k \vec{x}^{(0)} + (I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta} \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{3.2.12}$$

zaključujemo da je proces (3.2.2) ekvikonvergentan sa matričnim redom

$$I + B + B^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{+\infty} B^m. \tag{3.2.13}$$

S druge strane, kako su potrebni i dovoljni uslovi za konvergenciju reda (3.2.13) (videti odeljak 4.1.7)

$$|\lambda_i(B)| < 1 \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{3.2.14}$$

dokaz teoreme 3.2.6 je završen. $\boxtimes$

Primedba 3.2.3. Pod uslovima (3.2.14) imamo

$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{k\to+\infty} (I+B+\ldots+B^{k-1}) = (I-B)^{-1}.$$

Tada iz (3.2.12) sleduje

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \vec{x}^{(k)} &= \lim_{k\to+\infty} \left[B^k\vec{x}^{(0)} + (I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta}\right]\\ &= \lim_{k\to+\infty} B^k\vec{x}^{(0)} + \lim_{k\to+\infty}(I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta}\\ &= (I-B)^{-1}\vec{\beta},\end{aligned}$$

što predstavlja tačno rešenje jednačine (3.2.3).

Dakle, iz teoreme 3.2.6 sleduje da iterativni proces (3.2.2) konvergira ako i samo ako su sve nule polinoma

$$\lambda \mapsto \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

po modulu manje od jedinice.

Značaj uslova (3.2.14) u teorijskim razmatranjima je vrlo veliki. Medjutim, za praktičnu primenu oni nisu pogodni, jer je problem nalaženja sopstvenih vrednosti matrice dosta težak. Uslov $\|B\| < 1$, u teoremi 3.2.1, je sa stanovišta praktične primene vrlo pogodan za ispitivanje konvergencije. Nažalost, ovaj uslov je samo dovoljan, ali ne i potreban.

Primer 3.2.2. Posmatrajmo metod proste iteracije

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= \frac{1}{3}x^{(k-1)} - \frac{1}{9}y^{(k-1)} + \frac{1}{9}, \\ y^{(k)} &= 2x^{(k-1)} + \frac{1}{3}y^{(k-1)} - \frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

gde je $k = 1,2,\ldots$.

Na osnovu posledice 3.2.1, ništa ne možemo zaključiti o konvergenciji procesa (3.2.15), jer nijedan od uslova (a), (b), (c) za matricu

$$B = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/9 \\ 2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

nije ispunjen. Naime,

$$\|B\|_\infty = \max\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9},\ 2+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} > 1,$$

$$\|B\|_1 = \max\left(\frac{1}{3}+2,\ \frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} > 1,$$

$$\|B\| = \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+4+\frac{1}{9}\right)^{1/2} = 2.057\ldots > 1.$$

Medjutim, sopstvene vrednosti matrice B su $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}(1 \pm i\sqrt{2})$. Kako je $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, iterativni proces (3.2.15) je konvergentan za proizvoljne vrednosti $x^{(0)}$ i $y^{(0)}$.

Uslovi (3.2.14) mogu se zameniti uslovom

$$\boxed{\rho(B) < 1,}$$

gde je $\rho(B)$ spektralni radijus matrice B. Za iterativnu matricu B se u ovom slučaju kaže da je konvergentna (videti [28]).

Kao kriterijum za brzinu konvergencije iterativnog procesa uzima se veličina $\rho(B)$. Naime, iterativni proces konvergira brže, ukoliko je $\rho(B)$ bliže nuli. Broj koji karakteriše brzinu konvergencije definisan je kao

$$\nu(B) = -\log\rho(B).$$

Pri ovome, za ispunjenje uslova $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| < \varepsilon\|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}\|$, gde je ε dovoljno mali pozitivan broj i $\rho(B) \neq 0$, potreban broj iteracija je približno dat sa $k \simeq -\log\varepsilon/\nu(B)$.

Pored brzine konvergencije jednog iterativnog procesa vrlo je bitan i broj aritmetičkih i logičkih operacija neophodnih za obavljanje jednog iterativnog koraka (iteracije). Ovaj broj često se naziva cena iteracije i označava sa C(B), gde je B odgovarajuća iterativna matrica.

Tako je ukupan broj operacija za postizanje tačnosti (u prethodno navedenom smislu) približno dat sa

$$N(B,\varepsilon) = k\,C(B) \simeq -\frac{C(B)\log\varepsilon}{\nu(B)}.$$

(—)

Iterativni proces je efektivniji, ukoliko je ovaj broj manji.

Pokazaćemo sada kako se može dobiti jedan tzv. optimalni iterativni proces za rešavanje jednačine $A\vec{x} = \vec{b}$ u slučaju kada je A hermitska pozitivno definitna matrica. Ovaj metod je baziran na primeni formule (3.1.8)

Dokaz. S obzirom na učinjene pretpostavke za matricu A, matrica $B = I - \frac{2}{M+m}A$ je hermitska. Tada je, na osnovu Teoreme 1.6.2,

$$\sigma(B) = \rho(B) = \frac{M-m}{M+m}.$$

Uzimajući Euklidsku normu za normu vektora i spektralnu normu za normu matrica, nejednakost (3.2.8), iz teoreme 3.2.2, se svodi na (3.2.20).

O nekim opštijim iterativnim procesima tipa (3.2.19) može se naći u [7, str. 352-363].

Na kraju ovog odeljka, izložićemo jedan praktičan način za formiranje metoda proste iteracije.

Neka je dat sistem jednačina $A\vec{x} = \vec{b}$, gde je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $\vec{b} = [b_1 \ldots b_n]^T$, i neka je

$$D = \mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

regularna matrica. Tada se ovaj sistem može predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$\vec{x} = D^{-1}(D-A)\vec{x} + D^{-1}\vec{b}.$$

Napomenimo da je odgovarajući skalarni oblik

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}},$$

$$\vdots$$

$$x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$0 = -A\vec{x} + \vec{b}$

$D\vec{x} = (D-A)\vec{x} + \vec{b}$

$\vec{x} = D^{-1}(D-A)\vec{x} + D^{-1}\vec{b}$

Na osnovu prethodnog, može se formirati metod proste iteracije

(I)

$$\vec{x}^{(k)} = D^{-1}(D-A)\vec{x}^{(k-1)} + D^{-1}\vec{b} \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{3.2.21}$$

koji je u literaturi poznat kao $\boxed{\text{Jacobiev metod.}}$

Kako je karakteristični polinom matrice $D^{-1}(D-A)$ dat sa

$$P(\lambda) = \det(D^{-1}(D-A) - \lambda I) = -\det(D^{-1})\det(\lambda D + (A-D)),$$

iz teoreme 3.2.6 sleduje da Jacobiev iterativni proces konvergira ~~ako i samo ako su svi koreni~~ jednačine

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

po modulu manji od jedinice.

4.3.3. Gauss–Seidelov metod

Gauss-Seidelov metod se dobija $\boxed{\text{modifikacijom}}$ metoda proste iteracije. Kao što smo ranije videli, kod metoda proste iteracije, vrednost i-te komponente $x_i^{(k)}$ vektora $\vec{x}^{(k)}$ izračunava se na osnovu vrednosti $x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}$, tj.

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{(k-1)} + \beta_i \qquad (i=1,\ldots,n;\quad k=1,2,\ldots).$$

Ovaj metod može se modifikovati na taj način što bi se za izračunavanje vrednosti $x_i^{(k)}$ koristile vrednosti $x_1^{(k)},\ldots,x_{i-1}^{(k)}$, $x_i^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}$, tj.

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij}x_j^{(k-1)} + \beta_i \quad (i=1,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots).$$

Navedena modifikacija metoda proste iteracije poznata je kao Gauss-Seidelov metod.

Iterativni proces (3.3.1) može se predstaviti i u matričnoj formi. Naime, neka je

$$B = B_1 + B_2,$$

gde su

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Tada (3.3.1) postaje

(GS)

$$\vec{x}^{(k)} = B_1\vec{x}^{(k)} + B_2\vec{x}^{(k-1)} + \vec{\beta} \qquad (k = 1,2,\ldots). \tag{3.3.2}$$

<u>Teorema 3.3.1</u>. Pri proizvoljnom vektoru $\vec{x}^{(0)}$, iterativni proces (3.3.2) konvergira ako i samo ako su svi koreni jednačine

$$\det[B_2 - (I - B_1)\lambda] \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21}\lambda & b_{22}-\lambda & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1}\lambda & b_{n2}\lambda & & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3.3}$$

po modulu manji od jedinice.

$\boxed{\text{Dokaz}}$. Kako je $\det(I-B_1)=1$, tj. matrica $I-B_1$ regularna, za (3.3.2) može se dobiti ekvivalentan metod proste iteracije. Naime, iz (3.3.2) sleduje

$$(I-B_1)\vec{x}^{(k)} = B_2\vec{x}^{(k-1)} + \vec{\beta} \qquad (k=1,2,\ldots),$$

tj.

$$\vec{x}^{(k)} = (I-B_1)^{-1}B_2\vec{x}^{(k-1)} + (I-B_1)^{-1}\vec{\beta} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Na osnovu teoreme 3.2.6, ovaj iterativni proces konvergira, pri proizvoljnom vektoru $\vec{x}^{(0)}$, ako i samo ako su svi koreni jednačine $\det[(I - B_1)^{-1}B_2 - \lambda I] = 0$ po modulu manji od jedinice.

$\det\left(D^{-1}C_2+\lambda\left(I+D^{-1}C_1\right)\right)=0$

$\det\left(C_2+\lambda(D+C_1)\right)=0$

Iz poslednje jednačine sleduje

$$\det\left[(I-B_1)^{-1}(B_2-(I-B_1)\lambda)\right]=0,$$

tj.

$$\det(I-B_1)^{-1}\det\left[B_2-(I-B_1)\lambda\right]=0.$$

Kako je $\det(I-B_1)^{-1}=1$, poslednja jednačina se svodi na jednačinu (3.3.3), čime je dokazana teorema 3.3.1. $\boxtimes$

Posmatrajmo sada sistem jednačina $A\vec{x}=\vec{b}$ u obliku (3.2.21). Ako stavimo

$$A-D=C_1+C_2,$$

gde su

$$C_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{21} & 0 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,n-1} & 0\end{bmatrix}\quad i\quad C_2=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 0 & & a_{2n}\\ & & & \\ 0 & 0 & & 0\end{bmatrix},$$

može se obrazovati Gauss-Seidelov proces kao

(N)

$$\vec{x}^{(k)}=-D^{-1}C_1\vec{x}^{(k)}-D^{-1}C_2\vec{x}^{(k-1)}+D^{-1}\vec{b}\qquad(k=1,2,\ldots).\tag{3.3.4}$$

Ova varijanta Gauss-Seidelovog metoda ponekad se ne naziva metod $\boxed{\text{Nekrasova}}$ (videti [46]).

Iz teoreme 3.3.1 sleduje sledeća teorema:

Teorema 3.3.2. Pri proizvoljnom vektoru $\vec{x}^{(0)}$, iterativni proces (3.3.4) konvergira ako i samo ako su svi koreni jednačine

$$\det\left[C_2+(D+C_1)\lambda\right]=\begin{vmatrix}a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & & a_{nn}\lambda\end{vmatrix}=0$$

po modulu manji od jedinice.

$\vec{x}^{(k)}=-\left(I+D^{-1}C_1\right)^{-1}D^{-1}C_2\vec{x}^{(k-1)}+\cdots$

Kao što je i ranije napomenuto, ovi spektralni uslovi za konvergenciju iterativnih procesa, nažalost, nemaju veliki praktični značaj.

Za sistem jednačina sa simetričnom matricom, E.Reich ([49]) je dokazao sledeći rezultat:

Teorema 3.3.3. Neka je matrica A realna i simetrična i neka su joj svi dijagonalni elementi pozitivni. Iterativni proces (3.3.4) konvergira ako i samo ako su sve veličine

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pozitivne.

L.Collatz ([13],[14]) dokazao je sledeći rezultat:

Teorema 3.3.4. Iterativni procesi Jacobia (3.2.21) i Gauss-Seidela (3.3.4) konvergiraju, ako matrica A reda n ispunjava sledeća dva uslova:

1° Matrica A ne sadrži nula-submatricu tipa $m \times (n-m)$ $(1 \leq m \leq n-1)$,

2° Za svako $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ je $|a_{ii}| \geq s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, i bar za jedno $i \in I$ je $|a_{ii}| > s_i$.

Primer 3.3.1. Ispitaćemo primenljivost iterativnog procesa (3.3.4) na rešavanje sistema

$$\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 - x_3 &= 12, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Kako elementi matrice datog sistema

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

važi

$$|a_{11}| = 10 > s_1 = |a_{12}| + |a_{13}| = 4,$$

$$|a_{22}| = 5 > s_2 = |a_{21}| + |a_{23}| = 2,$$

$$|a_{33}| = 10 > s_3 = |a_{31}| + |a_{32}| = 3,$$

i kako A ne sadrži nula-submatricu tipa 1×2 ili tipa 2×1, zaključujemo da su uslovi 1^o i 2^o u teoremi 3.3.4 ispunjeni. Dakle, iterativni proces (3.3.4) primenjen na rešavanje sistema (3.3.5) konvergira.

Polazeći od $\vec{x}^{(0)} = \vec{\beta} = [1.2\ 0.6\ 1.3]^T$, na osnovu

$$x_1^{(k)} = -0.3x_2^{(k-1)} + 0.1x_3^{(k-1)} + 1.2,$$

$$x_2^{(k)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k-1)} + 0.6,$$

$$x_3^{(k)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.2x_2^{(k)} + 1.3,$$

gde je $k = 1,2,\ldots,$ dobijamo niz

$$\vec{x}^{(1)} = [1.1500000 \quad 1.0900000 \quad 0.9670000]^T,$$
$$\vec{x}^{(2)} = [0.9697000 \quad 0.9873400 \quad 1.0055620]^T,$$
$$\vec{x}^{(3)} = [1.0043542 \quad 1.0019832 \quad 0.9991680]^T,$$
$$\vec{x}^{(4)} = [0.9993219 \quad 0.9996979 \quad 1.0001283]^T,$$

itd. Primetimo da je tačno rešenje sistema (3.3.5)

$$\vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

Jedno interesantno pitanje koje se može postaviti u vezi sa razmatranim iterativnim metodama je: Da li Gauss-Seidelov metod uvek konvergira kada konvergira odgovarajući metod proste