Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Дискретна математика - предрок

21.12.2020. — група А

Душан Ђукић

1. Да ли су следеће релације на скупу $\mathbb{N}$ релације еквиваленције?

   (а) $a \sim b$ ако је $a \leqslant b$; (б) $a \sim b$ ако је $a = \pm b$; (в) $a \sim b$ ако је $a = 2b$ или $b = 2a$.

2. Потребно је обојити поља квадратне таблице 3×3 у четири боје - црвену, плаву, зелену и жуту, али тако да у свакој врсти или колони сва три поља имају различите боје. На колико начина се ово може учинити?

3. Из скупа $\{0, 1, \dots, 10\}$ двапут произвољно бирамо по један број. Већи број означавамо са a, а мањи са b. (Може да се деси да оба пута одаберемо исти број: тада је наравно $a = b$.) Наћи очекивану вредност и дисперзију разлике $X = a - b$.

4. Проверити да ли је број $2^{561} - 2$ дељив са 561. (Приметите да је $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.)

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Дискретна математика - предрок

21.12.2020. — група Б

Душан Ђукић

1. Да ли су следеће релације на скупу $\mathbb{N}$ релације еквиваленције?

   (а) $a \sim b$ ако је $a \geqslant b$; (б) $a \sim b$ ако је $a = \mp b$; (в) $a \sim b$ ако је $a = 3b$ или $b = 3a$.

2. Потребно је обојити поља квадратне таблице 3×3 у четири боје - плаву, црвену, жуту и зелену, али тако да у свакој врсти или колони сва три поља имају различите боје. На колико начина се ово може учинити?

3. Из скупа $\{1, 2, \dots, 11\}$ двапут произвољно бирамо по један број. Већи број означавамо са a, а мањи са b. (Може да се деси да оба пута одаберемо исти број: тада је наравно $a = b$.) Наћи очекивану вредност и дисперзију разлике $X = a - b$.

4. Проверити да ли је број $2^{561} - 2$ дељив са 561. (Приметите да је $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.)

Решења

не тврдим да су безгрешна

1. Релација (а) није симетрична: нпр. $1 \sim 2$, али није $2 \sim 1$.

   Релација (б) је релација еквиваленције: рефлексивна је, симетрична и транзитивна.

   Релација (в) није рефлексивна: нпр. $1 \not\sim 1$.

2. Прву врсту можемо обојити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Означимо боје у њој са 1, 2 и 3, редом. Дакле, прва врста је 123. Боја "4" се може појавити ниједном, једном или двапут у остатку таблице.

   (0°) Нема боје 4. Тада друге две врсте могу бити само 231 и 312, или обрнуто. Само две могућности.

   (1°) Само једно поље има боју 4. То поље се може одабрати на 6 равноправних начина - рецимо да је то прво поље друге врсте. За прво поље имамо два рав ноправна избора - боје 2 и 3. Одаберимо боју 2. Тада друга и трећа врста имају само једно могуће бојење: 412 и 231, редом. Овде имамо $6 \cdot 2 = 12$ могућности.

   (2°) Два поља имају боју 4: по једно у другој и трећој врсти. Пошто та два поља нису у истој колони, можемо их одабрати на 6 равноправних начина. Пдаберимо прво поље друге и друго поље треће врсте. Друга врста може бити 412 (тада је трећа врста 241 или 341), 431 (тада је трећа врста 342) или 432 (опет је трећа врста 241 или 341). Избројали смо $6 \cdot 5 = 30$ могућности.

   Укупан број могућих бојења је $24 \cdot (2 + 12 + 30) = 1056$.

3. Нека је први одабрани број x, а други y. Могућих исхода (x, y) има 11^2. Закон расподеле променљиве X је
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & 10 \\ \frac{1}{11} & \frac{20}{121} & \frac{18}{121} & \frac{16}{121} & \cdots & \frac{4}{121} & \frac{2}{121} \end{pmatrix}$$
   Очекивана вредност је $E(X) = \frac{20 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + \cdots + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{121} = \frac{440}{121} = \frac{40}{11}$.

   Притом је $E(X^2) = \frac{20 \cdot 1^2 + 18 \cdot 2^2 + 16 \cdot 3^2 + \cdots + 4 \cdot 9^2 + 2 \cdot 10^2}{121} = \frac{2420}{121} = 20$, тако да је $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 20 - (\frac{40}{11})^2 = \frac{820}{121}$.

4. По Малој Фермаовој теореми имамо:

   - $2^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2^{560} \equiv 1^{280} = 1 \pmod 3$;
   - $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{560} \equiv 1^{56} = 1 \pmod{11}$;
   - $2^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 2^{560} \equiv 1^{35} = 1 \pmod{17}$.

   Према томе, $2^{560} - 1$ је дељиво са $3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$, а самим тим $561 \mid 2^{561} - 2 = 2(2^{560} - 1)$.