Математика 3

Душан Ђукић

9. Три интегралне теореме

9.1. Увод уз осврт на озбиљнију математику

У овој глави обрадићемо три корисна тврђења из векторске анализе. Сва три тврђења су заправо специјални случајеви једног истог тврђења о интеграцији по *многострукостима*. Пошто смо овде ограничени на три димензије, за нас су „многострукости” криве, површи или просторне области. Опште тврђење је познато као *уопштена Стоксова*[6] *теорема* и каже следеће:

- Ако је Ω оријентабилна многострукост и $\partial\Omega$ њена граница, онда је интеграл *диференцијалне форме* ω по $\partial\Omega$ једнак интегралу њеног *спољног извода* $d\omega$ по целом Ω:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

У овом тврђењу има неколико појмова које не разумемо. Покушаћу да их објасним само информативно. Уводимо ознаку $dx \wedge dy = -dy \wedge dx = dxdy$.

– *Оријентабилне многострукости* су нпр. све криве (имају два смера кретања) и двостране површи (знамо и за једну која то није - Мебијусову траку).

– *Диференцијална форма* је нешто попут $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ или $P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$.

– Њен *спољни извод* је нека диференцијална форма реда вишег за један и задовољава правила $d(\omega\,dx) = d\omega \wedge dx$ и $d(dx) = 0$. Дакле, у три димензије за $P = P(x,y,z)$ добићемо ово:

$$\begin{aligned} d(P) &= dP = \text{потпуни диференцијал функције } P, \\ d(P\,dx) &= dP \wedge dx = (P'_x\,dx + P'_y\,dy + P'_z\,dz) \wedge dx = P'_y\,dy \wedge dx + P'_z\,dz \wedge dx = -P'_y\,dxdy + P'_z\,dzdx, \\ d(P\,dxdy) &= d(P\,dx) \wedge dy = (-P'_y\,dxdy + P'_z\,dzdx) \wedge dy = P'_z\,dzdxdy = -P'_z\,dxdzdy = P'_z\,dxdydz. \end{aligned}$$

Теореме које су тема ове главе су случајеви уопштене Стоксове када је

(1) Ω област у равни, $\partial\Omega$ крива којом је она омеђена и $\omega = P\,dx + Q\,dy$;

(2) Ω област у простору, $\partial\Omega$ површ којом је она омеђена и $\omega = P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$;

(3) Ω површ у простору, $\partial\Omega$ крива која чини њену границу и $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

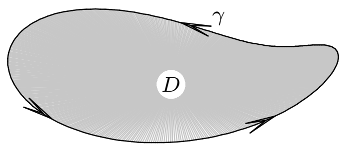
У овим случајевима спољни извод $d\omega$ изгледаће овако:

$$\begin{aligned} d(P\,dx + Q\,dy) &= (Q'_x - P'_y)\,dxdy, \\ d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) &= (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dxdy, \\ d(P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy) &= (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dxdydz. \end{aligned}$$

Запажамо ротор (у другој једнакости) и дивергенцију векторског поља $\vec{A} = (P,Q,R)$ (у трећој).

9.2. Гринова теорема

Нека је γ затворена позитивно оријентисана крива у xy-равни, део-по-део глатка и без самопресека, а D област омеђена њоме. Тада за произвољне непрекидно диференцијабилне функције $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ важи следеће тврђење.



[6] *George Gabriel Stokes* (1819-1903), енглеско-ирски физичар и математичар

Тврђење 9.1 (Гринова[7] теорема). $\displaystyle\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$

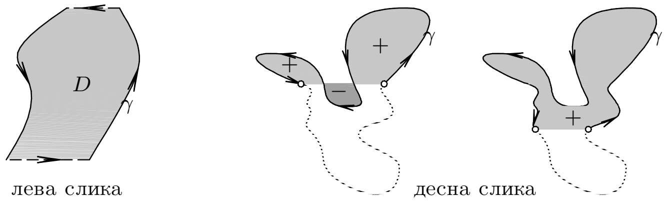
Доказ. Доказаћемо да је
$$\oint_\gamma Q\,dy = \iint_D Q'_x\,dxdy.$$

Слично важи и $\oint P\,dx = -\iint_D P'_y\,dxdy$.

Испитајмо шта представља величина $I = \iint_D Q'_x\,dxdy$.

(1°) Ако се γ састоји само од кривих $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ за $a \leqslant y \leqslant b$ ($x_1 \leqslant x_2$) и сегмената на правим $y = a$ и $y = b$ (лева слика), важи

$$\int_\gamma Qdy = \int_a^b Q(x_2(y), y)dx - \int_a^b Q(x_1(y), y)dx = \int_a^b \big(Q(x_2, y) - Q(x_1, y)\big)dy = \int_a^b dy \int_{x_1}^{x_2} Q'_x dx = \iint_D Q'_x dxdy.$$



лева слика десна слика

(2°) У случају маштовитије криве γ десна слика приказује шта представља интеграл I. Интеграл $\iint_D Q'_x\,dxdy$ се рачуна по свим осенченим областима, са назначеним знаком. $\square$

Пример 9.1. За $P = 0$ и $Q = x$ у Гриновој теореми следи да се површина области D може рачунати као
$$P = \oint_\gamma x\,dy, \quad \text{јер је} \quad \oint_\gamma x\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\Big) = \iint_D 1\,dxdy.$$

Пример 9.2. Израчунати интеграл $\displaystyle\oint_\gamma \big(2\sin(2x+y) + xy^2\big)\,dx + \big(\sin(2x+y) - xy^2\big)\,dy$, где је γ кружница $x^2 + y^2 = 1$.

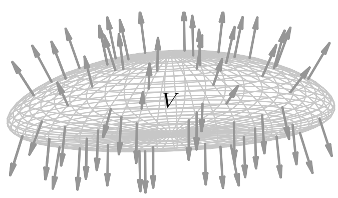
Решење. Овде је $P = 2\sin(2x+y) + xy^2$ и $Q = \sin(2x+y) - xy^2$. По Гриновој теореми је

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint_D \big((\cancel{2\cos(2x+y)} - y^2) - (\cancel{2\cos(2x+y)} + 2xy)\big)dxdy = \iint_D (2xy + y^2)dxdy,$$

где је D унутрашњост круга γ. Увођењем поларних координата $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ за $D' : \{0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ овај интеграл постаје

$$\iint_{D'} r^2(2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi)\cdot r\,drd\varphi = \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} (\cancelto{0}{2\cos\varphi\sin\varphi} + \cancelto{\pi}{\sin^2\varphi})\,d\varphi = \pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

9.3. Теорема Гауса и Остроградског



Тврђење које следи је тродимензионална верзија Гринове теореме.

Нека је Π затворена површ у простору, део-по-део глатка, а V део простора унутар ње. Тада за произвољне непрекидно диференцијабилне функције P, Q и R по x, y, z важи

Тврђење 9.2 (Теорема Гауса[8] и Остроградског[9]).
$$\oiint_\Pi P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dxdydz.$$

[7] *George Green* (1793-1841), енглески физичар
[8] *Carl Friedrich Gauß* (1777-1855), немачки математичар
[9] *Михаил Васильевич Остроградский* (1801-1862), руски математичар и физичар

Другим речима, проток векторског поља $\vec{A} = (P, Q, R)$ кроз спољну страну затворене површи Π једнак је количини дивергенције унутар површи:

$$\oiint\limits_{\Pi} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\Pi = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{A}\,dxdydx.$$

Ово тврђење се доказује слично Гриновој: показује се да је

$$\iiint\limits_{V} R'_z\,dxdydz = \oiint\limits_{\Pi^+} R\,dxdy \qquad \text{и аналогно за преостала два сабирка.}$$

Заиста, у простом случају када је област V дата условима $z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)$ за $(x,y)\in D$ (тако да се површ Π састоји од површи $z = z_1$ и $z = z_2$) имамо

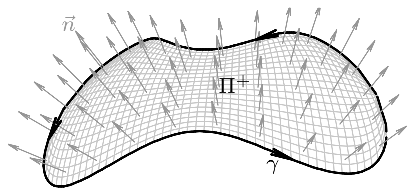
$$\iiint\limits_{V} R'_z\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy\int_{z_1}^{z_2} R'_z\,dz = \iint\limits_{D}\big(R(z_2(x,y)) - R(z_1(x,y))\big)\,dxdy = \iint\limits_{\Pi^+} R\,dxdy.$$

Пример 9.3. Израчунати интеграл $I = \oiint\limits_{\Pi^+} e^{x+y}(x\,dx - x\,dy - z\,dz)$, где је Π^+ спољна граница ваљка датог условима $x^2+y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Решење. Овде је $P = xe^{x+y}$, $Q = -xe^{x+y}$ и $R = -ze^{x+y}$, а област V је дати ваљак. По теореми Гауса и Остроградског је

$$I = \iiint\limits_{V}(P'_x + Q'_y + R'_z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V}\big((x+1)e^{x+y} - xe^{x+y} - e^{x+y}\big)\,dxdydz = \iiint\limits_{V} 0\,dxdydz = 0.$$

9.4. Стоксова теорема



Следеће тврђење је уопштење Гринове теореме на тродимензионалне криве. Сада је γ усмерена (тј. оријентисана) затворена крива у простору, а Π површ чија је граница крива γ. Функције P, Q и R су непрекидно диференцијабилне.

Тврђење 9.3 (Стоксова теорема).

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Pi^+}(R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dydz,$$

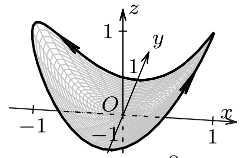
где је Π^+ она страна површи која остаје *с леве стране* приликом кретања дуж криве.

Другим речима, циркулација векторског поља $\vec{A} = (P, Q, R)$ дуж усмерене криве γ једнака је протоку ротора кроз „леву” страну површи Π^+:

$$\oint\limits_{\gamma}\vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\Pi^+}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,d\Pi.$$

Специјално, ако је ротор векторског поља $\vec{A}$ нула (тј. ако је оно потенцијално), онда је интеграл тог поља дуж сваке затворене криве једнак нули. Одатле следи да интеграл потенцијалног векторског поља не зависи од пута. Тога се сећамо из главе 4 (*независност од пута*). Из Стоксове теореме у ствари закључујемо да *само* потенцијална векторска поља имају ту особину.

Пример 9.4. Израчунајмо интеграл $I = \oint\limits_{\gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz$ по кривој γ у пресеку површи $x^2+y^2 = 1$ и $z = x^2$, оријентисаној у позитивном смеру гледано одозго.



Крива γ се може параметризовати једначинама

$$(x,y,z) = \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos^2 t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Позитивна оријентација криве значи да t иде од 0 до 2π, тако да је

$$I = \int_0^{2\pi}(z\cdot x'_t + x\cdot y'_t + y\cdot z'_t)\,dt = \int_0^{2\pi}\big(\cancelto{0}{\cos^2 t\cdot(-\sin t)} + \cos t\cdot\cos t + \cancelto{0}{\sin t\cdot(-2\cos t\sin t)}\big)\,dt. = \pi.$$

Исти интеграл се може израчунати и применом Стоксове теореме. За површ Π може се узети део површи $z = x^2$ за $D: x^2+y^2 \leqslant 1$. Кретањем дуж криве γ у позитивном смеру, слева остаје *горња* страна површи Π. Имамо $\vec{A} = (z, x, y)$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = (1,1,1)$, па је

$$I=\iint\limits_{\Pi^+}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,d\Pi=\iint\limits_{\Pi^+}dydz+dzdx+dxdy=\iint\limits_{D}(-z'_x-z'_y+1)\,dxdy=\iint\limits_{D}(1-2x)\,dxdy$$
$$=\left|\begin{smallmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{smallmatrix}\right|=\iint\limits_{D}(1-2r\cos\varphi)\cdot r\,drd\varphi=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(1-2r\cos\varphi)r\,d\varphi=\int_0^1 2\pi r\,dr=\pi.$$

9.5. Задаци

1. Израчунати $I=\iint\limits_{\sigma}x\,dydz+2y\,dzdx+3z\,dxdy$, где је σ спољна граница коцке $V:0\leqslant x,y,z\leqslant 1$.
2. Израчунати $I=\oint_{\gamma^+}\dfrac{y\,dx}{\sqrt{x+2}}+2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})\,dy$, где је γ^+ позитивно оријентисан круг $x^2+y^2=1$.
3. Ако је γ полукруг $y=\sqrt{1-x^2}$ у позитивном смеру, одредити $I=\displaystyle\int_\gamma\ln(2-x+y)\big((x-2)\,dx-y\,dy\big)$.
4. Израчунати интеграл $I=\iint\limits_{\Pi^-}(e^z+xyz)dydz+(e^x+xyz)dzdx+(e^y+xyz)dxdy$, где је Π^- унутрашња страна сфере $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.
5. Нека је S спољна граница тела V одређеног конусом $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ и равни $z=3$. Израчунати интеграл $\iint\limits_S z^2x\,dydz+x^2y\,dzdx+y^2z\,dxdy$.
6. Наћи проток векторског поља $\vec{A}=(\cos x,y\sin x,z^2)$ кроз спољну границу тела V одређеног конусом $z^2=x^2+y^2$ и равни $y-2z+2=0$.
7. Израчунати $I=\iint\limits_S z^3\,dydz+x^3\,dzdx+y^3\,dxdy$, где је S горња страна полусфере $z=\sqrt{y-x^2-y^2}$.

9.6. Решења

1. Коришћењем теореме Гауса-Остроградског добијамо
$$I=\iiint\limits_V\big((x)'_x+(2y)'_y+(3z)'_z\big)\,dxdydz=\iiint\limits_V 6\,dxdydz=6\cdot(\text{запремина коцке})=6.$$
2. Означимо $P=y/\sqrt{x+2}$ и $Q=2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})$. На основу Гринове теореме,
$$I=\oint_{\gamma^+}P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D(Q'_x-P'_y)\,dxdy=\iint\limits_D\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\Big)\,dxdy=\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{1+x}},$$
где је $D:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ диск обухваћен кривом γ^+. Увођењем поларних координата $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ за $0\leqslant r\leqslant 1$ и $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$ овај интеграл постаје
$$I=\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r\,dr}{\sqrt{1+r\cos\varphi}}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2(r\cos\varphi-2)\sqrt{1+r\cos\varphi}}{3\cos^2\varphi}\Big|_{r=0}^{r=1}d\varphi=\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2-(2-\cos\varphi)\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$
$$=\left|\begin{smallmatrix}t=\frac{\varphi}{2}\\ dt=\frac{d\varphi}{2}\end{smallmatrix}\right|=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-(2-\cos 2t)\cos t}{\cos^2 2t}\,dt=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sin t(\sqrt{2}\cos t-1)}{\cos 2t}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$
3. Означимо $P=(x-2)\ln(2-x+y)$ и $Q=-y\ln(2-x+y)$. Гринову теорему не можемо да применимо на отворену криву γ, па ћемо је прво затворити сегментом AB, где је $A(-1,0)$ и $B(1,0)$. Област коју обухвата затворена крива $\gamma\cup AB$ зваћемо D. Имамо
$$I_0=\int_{\gamma\cup AB}P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D(Q'_x-P'_y)\,dxdy=\iint\limits_D\Big(\frac{y}{2-x+y}-\frac{x-2}{2-x+y}\Big)\,dxdy=\iint\limits_D dxdy=\frac{\pi}{2},$$
што је површина области D. Остаје да одузмемо „вишак” - интеграл $I_1=\int_{AB}P\,dx+Q\,dy$:
$$I_1=\int_{-1}^{1}\big(P\cdot 1+Q\cdot 0\big)\,dx=\int_{-1}^{1}(x-2)\ln(2-x)\,dx=\Big(\frac{(2-x)^2\ln(2-x)}{2}+\frac{(x-1)(3-x)}{4}\Big)\Big|_{-1}^{1}=2-\frac{9\ln 3}{2}.$$
Према томе, $I=I_0-I_1=\frac{\pi}{2}+\frac{9}{2}\ln 3-2$.

4. Интеграл по унутрашњој страни је I, а по спољној $-I$. По теореми Гауса-Остроградског је

$$-I = \iiint\limits_V \left((e^z + xyz)'_x + (e^x + xyz)'_y + (e^y + xyz)'_z\right) dxdydz = \iiint\limits_V (xy + yz + zx)\, dxdydz,$$

где је V унутрашњост сфере. Увођењем сферних координата $x = 1 + \sin\theta\cos\varphi$, $y = 1 + \sin\theta\sin\varphi$ и $z = 1 + \cos\theta$ за $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ имаћемо $dxdydz = r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$ и

$$I = -\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2\big(3+2\cos\theta + (2\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\cancelto{0}{(\cos\varphi + \sin\varphi)} + \cancelto{0}{\sin^2\theta \sin\varphi\cos\varphi}\big) \cdot r^2 \sin\theta\, d\varphi$$

$$= -\int_0^1 r^4\, dr \int_0^\pi 2\pi(3 + 2\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = -\frac{12}{5}\pi.$$

5. Означимо $P = z^2x$, $Q = x^2y$ и $R = y^2z$. По теореми Гауса-Остроградског је

$$I = \iiint\limits_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

У цилиндричним координатама $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $z = z$ тело V је одређено условима $V' : 3 \leqslant z \leqslant 4 - r$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$. Пошто је $dxdydz = r\, drd\varphi dz$, добијамо

$$I = \int_{V'} (r^2 + z^2) \cdot r\, drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_3^{4-r} (r^3 + rz^2)\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{3}\big(3(1-r)r^3 + r((4-r)^3 - 27)\big)dr = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 (37r - 48r^2 + 15r^3 - 4r^4)\, dr = \frac{109}{30}\pi.$$

6. Пројекција датог тела на xy-раван је елипса $D : x^2 + y^2 \leqslant (\frac{y+2}{2})^2$, тј. $12x^2 + (3y-2)^2 \leqslant 16$.

По теореми Гауса-Остроградског проток поља $\vec{A}$ кроз спољну границу једнак је количини дивергенције $\operatorname{div}\vec{A} = -\sin x + \sin x + 2z = 2z$ у унутрашњости:

$$I = \iiint\limits_V 2z dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{y+2}{2}} 2z dz = \iint\limits_D \left(\left(\frac{y+2}{2}\right)^2 - (x^2+y^2)\right) dxdy = \iint\limits_D \frac{16 - 12x^2 - (3y-2)^2}{12} dxdy$$

што се увођењем поларних координата $x = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{12}}$ и $y = \frac{r\sin\varphi + 2}{3}$ за $D' : 0 \leqslant r \leqslant 4$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ своди на

$$I = \iint\limits_{D'} \frac{16 - r^2}{12} \cdot \frac{r\, drd\varphi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{72\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 (16 - r^2)\, dr = \frac{32\pi}{27\sqrt{3}}.$$

7. Пошто теорема Гаус-Остроградског захтева да површ буде затворена, површ S затворићемо доњом страном D^- диска $D : x^2 + y^2 \leqslant y$, тј. $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$ у xy-равни (са D^+ означаваћемо горњу страну). Површ $S \cap D$ уоквирује полулопту V и важи

$$\iint\limits_{S \cup D^-} z^3\, dydz + x^3\, dzdx + y^3\, dxdy = \iiint\limits_V \left((z^3)'_x + (x^3)'_y + (y^3)'_z\right) dxdydz = 0.$$

Дакле, $\iint_S * = -\iint_{D^-} * = \iint_{D^+} *$. Следи да је, уз прелазак на поларне координате $\left|\begin{smallmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi \end{smallmatrix}\right|$,

$$I = \iint\limits_{D^+} \cancelto{0}{z^3\, dydz} + \cancelto{0}{x^3\, dzdx} + y^3\, dxdy = \iint\limits_D y^3\, dxdy$$

$$= \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\cancelto{0}{r\sin\varphi} + \frac{3}{2}r^2\sin^2\varphi + \cancelto{0}{r^3\sin^3\varphi}\right) d\varphi = \int_0^{1/2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}r^2\right) dr = \frac{5}{16}\pi.$$