Завршни колоквијум из Математике 2 (смене 3 и 4)
10.6.2015.

Група 1 - решења

1. Испитати конвергенцију и ако конвергира израчунати

$$\int_0^2 x^{-3}dx.$$

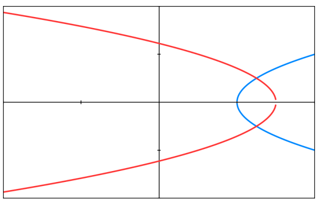
Решење. Како је подинтегрална функција неограничена за $x = 0$, то је дати интеграл несвојствен. Важи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x^{-3}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^2 x^{-3}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]\Bigg|_\epsilon^2 = -\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\epsilon^2}\right) \\ &= -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\epsilon^2} = +\infty, \end{aligned}$$

што значи да I (одређено) дивергира.
2. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре

$$\Phi = \left\{(x,y) \mid x \le \frac{3}{2} - y^2 \ \wedge \ x \ge 1 + y^2\right\}$$

око y-осе.
Решење. Фигура Φ омеђена је параболама $x = \frac{3}{2} - y^2$ ("горња" крива) и $x = 1 + y^2$ ("доња" крива).



Границе за y добијамо из тачака пресека ових двеју парабола, које налазимо решавањем система

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - y^2 \\ x &= 1 + y^2. \end{aligned}$$

Одавде је $\dfrac{3}{2} - y^2 = 1 + y^2$, односно $2y^2 = \dfrac{1}{2}$, па је $y^2 = \dfrac{1}{4}$, одакле следи $y = \pm\dfrac{1}{2}$. Тражена запремина износи

$$\begin{aligned}
V_y &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} - y^2 \right)^2 - \left(1 + y^2\right)^2 \right] dy = \left\{ \begin{array}{c} \text{подинтегрална} \\ \text{функција је парна} \end{array} \right\} \\
&= \pi \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{9}{4} - 3y^2 + y^4 - 1 - 2y^2 - y^4 \right) dy = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{4} - 5y^2 \right) dy \\
&= 2\pi \cdot \frac{5}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4y^2\right) dy = \frac{5\pi}{2} \left[y - 4 \cdot \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

3. Написати једначину тангентне равни и нормале на површ

$$z = x^2 - \frac{y^2}{2}$$

у тачки $(1, 0, 1)$.

Решење. Парцијални изводи функције $z = z(x, y)$ у произвољној тачки су

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -y,$$

па је

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Како једначина тангентне равни у тачки (x_0, y_0, z_0) гласи

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

то је у овом задатку

$$z - 1 = 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0),$$

односно

$$z = 2x - 1$$

је тражена једначина тангентне равни.

Како једначина нормале на површ у тачки (x_0, y_0, z_0) гласи

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

то је у овом задатку

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

односно

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

је тражена једначина нормале на површ.
4. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'=-\frac{2}{x}y+\sqrt{y}\sin x$$

које испуњава услов $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$.
Решење. Дата једначина је Бернулијева. Запишимо је у облику

$$y'+\frac{2}{x}y=(\sin x)y^{1/2}.$$

Прво тражимо њено опште решење. Дељењем претходног израза са $y^{1/2}$ добијамо

$$y^{-1/2}y'+\frac{2}{x}y^{1/2}=\sin x. \tag{1}$$

Уведимо смену

$$z=y^{1/2},$$

где је $z=z(x)$ нова непозната функција. Диференцирањем добијамо

$$z'=\frac{1}{2}y^{-1/2}y',$$

па кад то уврстимо у (1), имамо

$$2z'+\frac{2}{x}z=\sin x,$$

односно

$$z'+\frac{1}{x}z=\frac{\sin x}{2},$$

што представља линеарну диференцијалну једначину, чије је опште решење

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx\right),$$

где је $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \dfrac{\sin x}{2}$. Дакле,

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \frac{\sin x}{2}dx\right) = e^{-\ln|x|}\left(c + \frac{1}{2}\int e^{\ln|x|}\sin x dx\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{2}\int x \sin x dx\right) = \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{x}\left[c + \frac{1}{2}\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right)\right] = \frac{1}{x}\left(c - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) \\
&= \frac{c}{x} - \frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2x} = \frac{2c - x\cos x + \sin x}{2x},
\end{aligned}$$

па након враћања смене добијамо опште решење полазне једначине

$$y^{1/2} = \frac{2c - x\cos x + \sin x}{2x}.$$

Када у опште решење уврстимо услов $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$ следи

$$\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{1/2} = \frac{2c - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}{2 \cdot \frac{\pi}{2}},$$

одакле је

$$c = \frac{1}{2},$$

па кад то вратимо у опште решење добијамо

$$y^{1/2} = \frac{1 - x\cos x + \sin x}{2x},$$

што представља тражено партикуларно решење.

Завршни колоквијум из Математике 2 (смене 3 и 4)
10.6.2015.

Група 2 - решења

1. Испитати конвергенцију и ако конвергира израчунати

$$\int_0^3 x^{-2}dx.$$

<u>Решење</u>. Како је подинтегрална функција неограничена за $x = 0$, то је дати интеграл несвојствен. Важи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x^{-2}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^3 x^{-2}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_\epsilon^3 = -\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\epsilon}\right)\\ &= -\frac{1}{3}+\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\epsilon} = +\infty, \end{aligned}$$

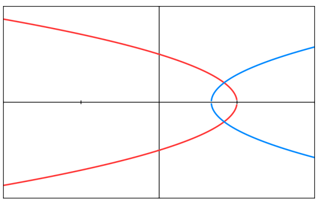
што значи да I (одређено) дивергира.

2. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре

$$\Phi = \left\{(x,y)\mid x \geq \frac{2}{3}+y^2 \ \wedge\ x \leq 1-y^2\right\}$$

око y-осе.

<u>Решење</u>. Фигура Φ омеђена је параболама $x = \dfrac{2}{3}+y^2$ ("доња" крива) и $x = 1-y^2$ ("горња" крива).



Границе за y добијамо из тачака пресека ових двеју парабола, које налазимо решавањем система

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}+y^2\\ x &= 1-y^2. \end{aligned}$$

Одавде је $\frac{2}{3}+y^2 = 1-y^2$, односно $2y^2 = \frac{1}{3}$, па је $y^2 = \frac{1}{6}$, одакле следи $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Тражена запремина износи

$$\begin{aligned}
V_y &= \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left[\left(1-y^2\right)^2-\left(\frac{2}{3}+y^2\right)^2\right]dy = \left\{\begin{array}{c}\text{подинтегрална}\\ \text{функција је парна}\end{array}\right\}\\
&= \pi\cdot 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(1-2y^2+y^4-\frac{4}{9}-\frac{4}{3}y^2-y^4\right)dy\\
&= 2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(\frac{5}{9}-\frac{10}{3}y^2\right)dy = 2\pi\cdot\frac{5}{9}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(1-6y^2\right)dy\\
&= \frac{10\pi}{9}\left[y-6\cdot\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{10\pi}{9}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9} = \frac{10\pi\sqrt{6}}{81}.
\end{aligned}$$

3. Написати једначину тангентне равни и нормале на површ

$$z = \frac{x^2}{2}+y^2$$

у тачки $(0,1,1)$.
Решење. Парцијални изводи функције $z = z(x,y)$ у произвољној тачки су

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

па је

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 2.$$

Како једначина тангентне равни у тачки (x_0, y_0, z_0) гласи

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0),$$

то је у овом задатку

$$z-1 = 0\cdot(x-0)+2\cdot(y-1),$$

односно

$$z = 2y-1$$

је тражена једначина тангентне равни.

Како једначина нормале на површ у тачки (x_0, y_0, z_0) гласи

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

то је у овом задатку

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1},$$

односно

$$\frac{x}{0} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}$$

је тражена једначина нормале на површ.
4. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y' = -\frac{2}{x}y - \sqrt{y}\cos x$$

које испуњава услов $y\,(\pi) = \dfrac{1}{4\pi^2}$.
Решење. Дата једначина је Бернулијева. Запишимо је у облику

$$y' + \frac{2}{x}y = (-\cos x)y^{1/2}.$$

Прво тражимо њено опште решење. Дељењем претходног израза са $y^{1/2}$ добијамо

$$y^{-1/2}y' + \frac{2}{x}y^{1/2} = -\cos x. \tag{2}$$

Уведимо смену

$$z = y^{1/2},$$

где је $z = z(x)$ нова непозната функција. Диференцирањем добијамо

$$z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y',$$

па кад то уврстимо у (2), имамо

$$2z' + \frac{2}{x}z = -\cos x,$$

односно

$$z' + \frac{1}{x}z = -\frac{\cos x}{2},$$

што представља линеарну диференцијалну једначину, чије је опште решење

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx\right),$$

где је $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = -\dfrac{\cos x}{2}$. Дакле,

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \left(-\frac{\cos x}{2}\right) dx\right) \\
&= e^{-\ln|x|}\left(c - \frac{1}{2}\int e^{\ln|x|}\cos x dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \frac{1}{2}\int x \cos x dx\right) \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \cos x \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right\} = \frac{1}{x}\left[c - \frac{1}{2}\left(x\sin x - \int \sin x dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{x}\left(c - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = \frac{c}{x} - \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2x} \\
&= \frac{2c - x\sin x - \cos x}{2x},
\end{aligned}$$

па након враћања смене добијамо опште решење полазне једначине

$$y^{1/2} = \frac{2c - x\sin x - \cos x}{2x}.$$

Када у опште решење уврстимо услов $y(\pi) = \dfrac{1}{4\pi^2}$ следи

$$\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} = \frac{2c - \pi\sin\pi - \cos\pi}{2\pi},$$

одакле је

$$c = 0,$$

па кад то вратимо у опште решење добијамо

$$y^{1/2} = -\frac{x\sin x + \cos x}{2x},$$

што представља тражено партикуларно решење.