

1. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = \sin x$.
2. Наћи дивергенцију, ротор и потенцијал векторског поља $\vec{A} = (x^2 + yz, 2yz + xz, y^2 + xy)$.
3. Израчунати интеграл $\int_{\gamma} x dx + y dy$ по кривој $\gamma : y = \sqrt{x}$ за $0 \leq x \leq 1$.
4. Израчунати интеграл $\iint_S (1 - xz) dS$, где је S цилиндар $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$.
5. Израчунати $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по лопти $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
6. Наћи оно решење диференцијалне једначине $e^{x+y} y'' = 1$ које задовољава услов $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

1. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = \cos x$.
2. Наћи дивергенцију, ротор и потенцијал векторског поља $\vec{A} = (x^2 + yz, z^2 + xz, 2yz + xy)$.
3. Израчунати интеграл $\int_{\gamma} x dx + y dy$ по кривој $\gamma : x = \sqrt{y}$ за $0 \leq y \leq 1$.
4. Израчунати интеграл $\iint_S (1 - yz) dS$, где је S цилиндар $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$.
5. Израчунати $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по лопти $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
6. Наћи оно решење диференцијалне једначине $e^{x+y} y'' = 1$ које задовољава услов $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. Група А. Кара-полином је $T(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$, нуле су му $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 0$, па је хомогено решење $y_H = C_1 e^{-x} + C_2$.
Партикуларно тражимо у облику $y_P = A \cos x + B \sin x$ и налазимо $y_P = -\frac{\sin x + \cos x}{2}$. Опште је $y = y_P + y_H$.
2. Група Б. Рачунамо $\operatorname{div} \vec{A} = \Delta \cdot \vec{A} = 2x + 2y$ и $\operatorname{rot} \vec{A} = \Delta \times \vec{A} = (0, 0, 0)$, па постоји и потенцијал U . За њега важи $U'_x = x^2 + yz \Rightarrow U = \frac{1}{3}x^3 + xyz + A(y, z)$, затим $U'_y = z^2 + xz \Rightarrow A = yz^2 + B(z)$, и најзад $U'_z = 2yz + xy \Rightarrow B = \operatorname{const}$.
Дакле, $U = \frac{1}{3}x^3 + xyz + yz^2 + \operatorname{const}$.
3. Група А. Како је $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $y dy = \frac{1}{2} dx$, тражени интеграл је $I = \int_0^1 (x + \frac{1}{2}) dx = 1$.
4. Група Б. Површ S параметризујемо цилиндричним координатама: $(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) = \vec{\sigma}(\varphi, z)$, где је $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq z \leq 1$ (пазите, $r = 1$). По формули је $dS = |\vec{\sigma}'_{\varphi} \times \vec{\sigma}'_z| d\varphi dz = |(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1)| d\varphi dz = |(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)| d\varphi dz = d\varphi dz$. Тражени интеграл је $I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} (1 - z \sin \varphi) d\varphi = \int_0^1 2\pi dz = 2\pi$.
5. Група А. У сферним координатама је $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$ и $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, при чему је $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тражени интеграл је $I = \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r d\varphi = \pi^2$.
6. Група Б. Сменом $u = x + y$ и $u'' = y''$ једначина постаје аутономна: $u'' = e^{-u}$. Уводимо функцију $z: u' = z(u)$. Тада је $u'' = z(u)z'(u) = e^{-u}$, што интеграцијом даје $z^2 = C_1 - 2e^{-u}$, тј. $\frac{du}{dx} = u' = \pm \sqrt{C_1 - 2e^{-u}}$. Овде су раздвојене променљиве: $dx = \pm du / \sqrt{C_1 - 2e^{-u}}$. Интеграција даје $\pm x = \frac{2}{\sqrt{C_1}} \ln(\sqrt{C_1 e^u} + \sqrt{C_1 e^u - 2}) + \operatorname{const}$.
Решавањем по u добијамо опште решење: $u = 2 \ln \frac{\operatorname{ch}(C + Dx)}{D\sqrt{2}}$ за неке константе C и D .
Најзад, асимптотски је $u \sim 2(C + Dx - \ln(D\sqrt{2}))$ када $x \rightarrow +\infty$, а треба нам $u = x + y \sim x$, па следи $D = \frac{1}{2}$ и $C = \ln(D\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \ln 2$. Након сређивања коначно добијамо $y = 2 \ln(e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2})$.