УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ 2

7015

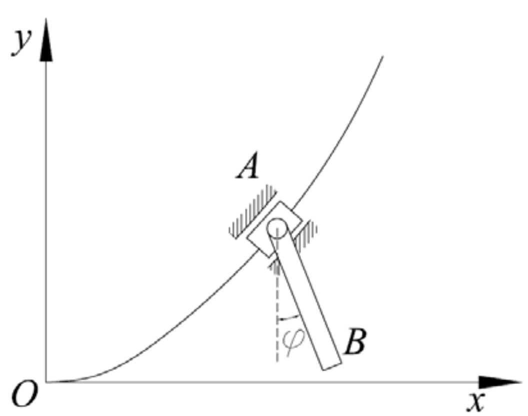
30. јануар 2021.

1. Клизач A креће се у равни Oxy дуж вођица које имају облик $y = x^2\,[\mathrm{m}]$ тако да пројекција убрзања на осу Ox износи $\ddot{x}_A = 0$ (слика 1). За клизач A зглобно је везан штап AB дужине $\overline{AB} = 1\mathrm{m}$. Угао између штапа AB и правца паралелног оси Oy мења се по закону $\varphi = t\,[\mathrm{rad}]$. У почетном тренутку клизач је био у координатном почетку и имао брзину интензитета $V_0 = 2\mathrm{m/s}$.
Одредити:

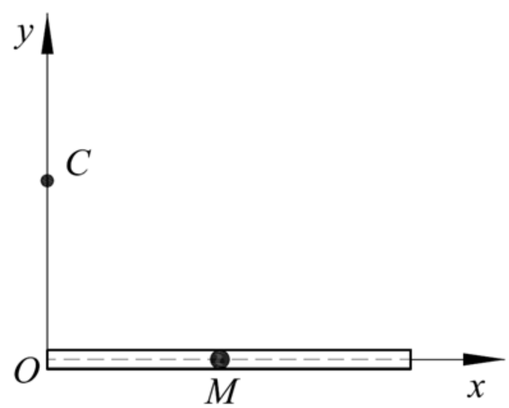
1) коначне једначине кретања B,
2) интензитет брзине тачке B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$,
3) интензитет убрзања тачке B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$,
4) полупречник кривине трајекторије B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$.

2. Куглица M масе m налази се у хоризонталној храпавој цеви (слика 2). Коефицијент трења између куглице и цеви је $\mu\,(\mu < 1)$. На куглицу дејствује одбојна сила са центром у тачки C пропорционална растојању куглице M од тачке C са коефицијентом пропорционалности $\frac{mg}{b}$, где је b позитивна константа. Тачка C се креће дуж осе Oy константном брзином $\vec{V}_C = \sqrt{gb}\,\vec{j}$. У почетном тренутку куглица M је била у положају $x(0) = 2b$ у стању мировања, а тачка C у координатном почетку. Одредити коначну једначину кретања куглице M. Оса Oy оријентисана је вертикално навише.

3. Тачка M масе m, која се креће у хомогеном пољу Земљине теже, везана је за еластичну опругу крутости c чија је дужина у ненапрегнутом стању $l_0 = k$. Опруга је својим другим крајем везана за непомичну тачку $A(0, -k\ k)$. У положају $M_1(k, k, 3k)$ тачка је имала брзину $\vec{V}_1 = b\vec{i} + b\vec{j} + b\vec{k}$. Одредити интензитет брзине тачке у положају $M_2(0, k, k)$. Оса Oz оријентисана је вертикално навише.



Слика 1



Слика 2

1. Задатак

1. Група

1) $\ddot{x}_A = 0 \Rightarrow \dot{x}_A = 2 \Rightarrow x_A = 2t \quad \Rightarrow \quad y_A = x_A^2 = 4t^2$

$x_B = x_A + \overline{AB}\sin\varphi = 2t + \sin(t), \quad y_B = y_A - \overline{AB}\cos\varphi = 4t^2 - \cos(t)$

2) $\dot{x}_B = 2 + \cos(t), \quad \dot{y}_B = 8t + \sin(t) \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{5 + 4\cos(t) + 16t\sin(t) + 64t^2}$

$V_B(t_1) = \sqrt{5 + 8\pi + 16\pi^2}\,\text{m/s}$

3) $\ddot{x}_B = -\sin(t), \quad \ddot{y}_B = 8 + \cos(t) \Rightarrow a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2} = \sqrt{65 + 16\cos(t)}$

$a_B(t_1) = \sqrt{65}\,\text{m/s}^2$

4) $a_{BT} = \dfrac{dV_B}{dt} = \dfrac{6\sin(t) + 8t\cos(t) + 64t}{\sqrt{5 + 4\cos(t) + 16t\sin(t) + 64t^2}} \Rightarrow a_{BT}(t_1) = \dfrac{6 + 32\pi}{\sqrt{5 + 8\pi + 16\pi^2}}\,\text{m/s}^2$

$$a_{BN}(t_1) = \sqrt{a_B^2(t_1) - a_{BT}^2(t_1)} = \sqrt{65 - \frac{36 + 384\pi + 1024\pi^2}{5 + 8\pi + 16\pi^2}}\,\text{m/s}^2 = \sqrt{\frac{289 + 136\pi + 16\pi^2}{5 + 8\pi + 16\pi^2}}\,\text{m/s}^2$$

$$R_{KB}(t_1) = \frac{V_B^2(t_1)}{a_{BN}(t_1)} = \frac{5 + 8\pi + 16\pi^2}{\sqrt{\dfrac{289 + 136\pi + 16\pi^2}{5 + 8\pi + 16\pi^2}}}\,\text{m} = \left(5 + 8\pi + 16\pi^2\right)\sqrt{\frac{5 + 8\pi + 16\pi^2}{289 + 136\pi + 16\pi^2}}\,\text{m}$$

2. Група

1) $\ddot{x}_A = 0 \Rightarrow \dot{x}_A = 1 \Rightarrow x_A = t \quad \Rightarrow \quad y_A = x_A^2 = t^2$

$x_B = x_A + \overline{AB}\sin\varphi = t + 2\sin(t), \quad y_B = y_A - \overline{AB}\cos\varphi = t^2 - 2\cos(t)$

2) $\dot{x}_B = 1 + 2\cos(t), \quad \dot{y}_B = 2t + 2\sin(t) \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{5 + 4\cos(t) + 8t\sin(t) + 4t^2}$

$V_B(t_1) = \sqrt{5 + 4\pi + \pi^2}\,\text{m/s}$

3) $\ddot{x}_B = -2\sin(t), \quad \ddot{y}_B = 2 + 2\cos(t) \Rightarrow a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2} = \sqrt{8 + 8\cos(t)}$

$a_B(t_1) = \sqrt{8}\,\text{m/s}^2 = 2\sqrt{2}\,\text{m/s}^2$

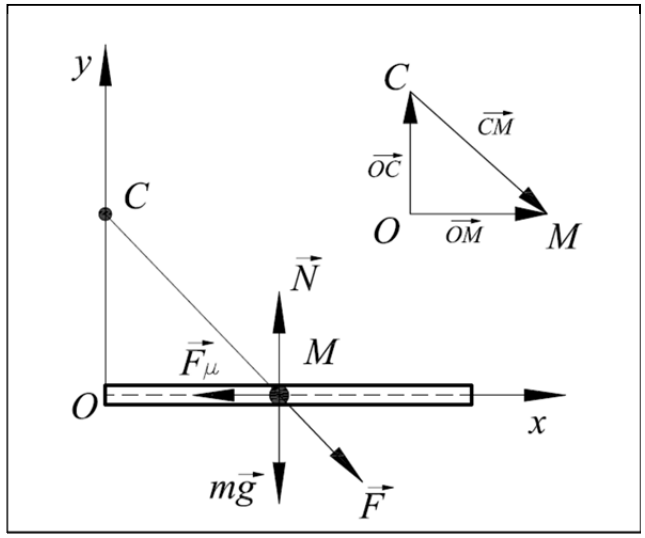
4) $a_{BT} = \dfrac{dV_B}{dt} = \dfrac{2\sin(t) + 4t\cos(t) + 4t}{\sqrt{5 + 4\cos(t) + 8t\sin(t) + 4t^2}} \Rightarrow a_{BT}(t_1) = \dfrac{2 + 2\pi}{\sqrt{5 + 4\pi + \pi^2}}\,\text{m/s}^2$

$$a_{BN}(t_1) = \sqrt{a_B^2(t_1) - a_{BT}^2(t_1)} = \sqrt{8 - \frac{4 + 8\pi + 4\pi^2}{5 + 4\pi + \pi^2}}\,\text{m/s}^2 = \sqrt{\frac{36 + 24\pi + 4\pi^2}{5 + 4\pi + \pi^2}}\,\text{m/s}^2$$

$$R_{KB}(t_1) = \frac{V_B^2(t_1)}{a_{BN}(t_1)} = \frac{5 + 4\pi + \pi^2}{\sqrt{\dfrac{36 + 24\pi + 4\pi^2}{5 + 4\pi + \pi^2}}}\,\text{m} = \left(5 + 4\pi + \pi^2\right)\sqrt{\frac{5 + 4\pi + \pi^2}{36 + 24\pi + 4\pi^2}}\,\text{m}$$

2. Задатак

1. Група



$\dot{y}_C = \sqrt{gb} \;\Rightarrow\; y_C = \sqrt{gb}\,t$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = x\vec{i} - \sqrt{gb}\,t\vec{j}$

$\vec{F} = \frac{mg}{b}\overrightarrow{CM} = \frac{mg}{b}\left(x\vec{i} - \sqrt{gb}\,t\vec{j}\right)$

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$

$1): \; m\ddot{x} = \frac{mg}{b}x - F_\mu$

$2): \; m\ddot{y} = N - mg - \frac{mg}{b}\sqrt{gb}\,t = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{b}\sqrt{gb}\,t + mg, \qquad F_\mu = \mu N = \mu\frac{mg}{b}\sqrt{gb}\,t + \mu mg$

$1): \Rightarrow \; \ddot{x} - \frac{g}{b}x = -\mu\frac{g}{b}\sqrt{gb}\,t - \mu g$

$x = x_h + x_p; \quad \ddot{x} - \frac{g}{b}x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{g}{b} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{b}} \Rightarrow x_h = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{b}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{b}}t}$

$x_p = At + B \Rightarrow \dot{x}_p = A \Rightarrow \ddot{x}_p = 0; \; -\frac{g}{b}At - \frac{g}{b}B \equiv -\mu\frac{g}{b}\sqrt{gb}\,t - \mu g \Rightarrow A = \mu\sqrt{gb},\; B = \mu b \Rightarrow x_p = \mu\sqrt{gb}t + \mu b$

$x = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{b}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{b}}t} + \mu\sqrt{gb}t + \mu b$

$x(0) = 2b \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 + \mu b = 2b,$

$\dot{x} = C_1\sqrt{\frac{g}{b}}e^{\sqrt{\frac{g}{b}}t} - C_2\sqrt{\frac{g}{b}}e^{-\sqrt{\frac{g}{b}}t} + \mu\sqrt{gb}; \quad \dot{x}(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 - C_2 + \mu b = 0$

$C_1 = b(1-\mu),\; C_2 = b$

$x = b(1-\mu)e^{\sqrt{\frac{g}{b}}t} + be^{-\sqrt{\frac{g}{b}}t} + \mu\sqrt{gb}t + \mu b$

2. Група $b = k$

3. Задатак

1. Група

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{1-2}(m\vec{g}) + A_{1-2}(\vec{F}_c)$$

$$V_1 = \sqrt{b^2 + b^2 + b^2} = \sqrt{3}b, \quad E_{k1} = \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{3}{2}mb^2, \quad E_{k2} = \frac{1}{2}mV_2^2$$

$$A_{1-2}(m\vec{g}) = mg(z_1 - z_2) = 2mgk$$

$$l_p = \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (z_1 - z_A)^2} = \sqrt{k^2 + 4k^2 + 4k^2} = 3k, \ \Delta l_p = l_p - l_0 = 2k$$

$$l_k = \sqrt{(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 + (z_2 - z_A)^2} = \sqrt{0 + 4k^2 + 0} = 2k, \ \Delta l_k = l_k - l_0 = k$$

$$A_{1-2}(\vec{F}_c) = \frac{1}{2}c(\Delta l_p^2 - \Delta l_k^2) = \frac{1}{2}c(4a^2 - a^2) = \frac{3}{2}ck^2$$

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{3}{2}mb^2 = 2mgk + \frac{3}{2}ck^2 \Rightarrow \boxed{V_2^2 = 3b^2 + 4gk + 3\frac{c}{m}k^2}$$