

1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

numericke.metode.metode@gmail.com

do 23:59 časova 16.06.2015. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

KMA.NM.999/GG

gde je:

- KMA-oznaka Katedre za Matematiku
- NM-oznaka za Numeričke metode
- 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

KMA.NM.023/11

Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka: program u Matlabu, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu, pa eksportovan u pdf, ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a, tako što sve fileove vezane za jedan zadatak zapakujete u zip arhive sa imenima

zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip

4. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.
5. Svako prepisivanje biće sankcionisano, pored toga, morate usmeno odbraniti rad koji ste poslali.
6. Rešenje svakog zadatka donosi 20%.

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda

1. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je određena vrednost \sin na intervalu $[0, 5]$ pod pretpostavkom da je argument funkcije zadat sa 5 značajnih cifara.
 - a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije \sin u funkciji broja značajnih cifara argumenta funkcije.
 - b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije \sin u funkciji vrednosti argumenta sa korakom `.001`
 - c) Nacrtati na jednoj slici teorijski dobijenu ocenu i eksperimentom. Uporediti vrednosti dobijene teorijski i eksperimentom.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite teorijsko razmatranje a), `script` file i sliku pod b), sliku i komentar pod c).
2. a) Napisati program u `Matlabu` koji izračunava vrednost inverzne matrice matrice A koristeći iterativni metod

$$X_0 = A^T, \quad X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Podrazumevati da je matrica A , matrica reda 40, oblika

$$A = I + \frac{1}{40}R,$$

gde je I jednična matrica reda 40, i gde je R matrica reda 40, čiji su elementi slučajni brojevi koji pripadaju intervalu $[-1, 1]$.

b) Pod pretpostavkom da broj značajnih cifara matrice X_k , $k \in \mathbb{N}$, odredjujemo sa

$$z_k = -\log_{10} \frac{\|X_k - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \geq -\log_{10} \|AX_k - I\|, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara u funkciji broja iteracije.

c) Pokazati na osnovu grafika dobijenog pod b) da je red metoda dva.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `script` file koji implementira iterativni metod za inverziju matrice pod a), nacrtate grafik b) i odredite sa grafika red metoda c).

3. Za određivanje vrednosti integrala

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

koristićemo uopštenu trapeznu formulu.

a) Napisati `script` file u `Matlabu` koji određuje aproksimaciju vrednosti integrala I sa 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64 podintervala. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije vrednosti integrala u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

b) Odrediti teorijsku procenu vrednosti greške koja nastaje prilikom određivanja vrednosti integrala. Nacrtati teorijski procenjen najmanji broj značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

c) Vrednosti dobijene u delu zadatka pod a) smestiti u prvu kolonu matrice \mathbf{r} , redom prema broju upotrebljenih podintervala počev od jednog podintervala ka 64 podintervala. Zatim odrediti elemente matrice \mathbf{r} , na i ispod glavne dijagonale, na sledeći način

$$r(j,k) = r(j,k-1) + 1 / (4^{(k-1)} - 1) * (r(j,k-1) - r(j-1,k-1)), \quad j=k, \dots, 6, \quad k=2, \dots, 6.$$

Elemente iznad glavne dijagonale matrice \mathbf{r} na menjamo, jer nam nisu potrebni. Pod pretpostavkom da elementi matrice \mathbf{r} na glavnoj dijagonali aproksimiraju vrednost integrala I nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala, dakle redni broj vrste matrice \mathbf{r} . Na istom grafiku nacrtati grafik broja značajnih cifara dobijenih u delu zadatka pod a) i dobijen opisani način. Koja je metoda bolja, s obzirom da i jedna i druga koriste iste podatke.

Metod integracije u delu pod c) se naziva Rombergova integracija.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `skscript` file i sliku pod a), teorijsko razmatranje i sliku pod b), `script` file, sliku i poredjenje metoda pod c).

4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći metodu diferenciranja unazad

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6h}{11}f_{n+3}.$$

Potrebnu startnu vrednost y_1 i y_2 izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa $h = .001$ i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y na intervalu $[0, 2]$. Objasniti oblik krive.

c) Za $h_i = 2^{-i}$, $i = 2, \dots, 7$, nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y . Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka h_i imaju veliki gubitak značajnih cifara sa

porastom x , a za koje vrednosti koraka h_i je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite rešenje Cauchyevog problema pod a), napisanu funkciju i nacrtanu sliku pod b) uz objašnjenje slike, sliku i objašnjenje ponašanja metoda za različite vrednosti koraka pod c).

prof. dr Aleksandar Cvetković