

Интеграли - одређени, несвојствени, примене

1. Израчунати:

а) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2$ ($u = x^2$, $dv = \sin x \, dx$),

б) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x \, dx$),

в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\operatorname{tg}(x/2) = t$),

г) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \pi/4$ ($x = a \sin t$),

д) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln 3$,

ђ) $\int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \, dx = \frac{1}{4} \ln 2$ ($u = \ln x$, $dv = x \, dx/(1 + x^2)^2$),

е) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2} = \pi/\sqrt{2}$.

2. Наћи површину омеђену линијама $y^2 = 2x + 1$ и $y = x - 1$ (решење је $\frac{16}{3}$).

3. Наћи дужину лука криве $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$ за $0 \leq x \leq b$ (решење је $\frac{a}{2} (e^{b/a} - e^{-b/a})$).

4. Наћи дужину лука криве $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ за $1 \leq x \leq 2$ (решење је $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$).

5. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око y -осе области ограничене функцијом $\cos 2y = \frac{x^2}{y^2}$ и правим $y = \frac{\pi}{6}$ и $y = \frac{\pi}{4}$ (решење је $\pi^3(1/2 - \sqrt{3}/9)/16 - \pi/24 - (1 - \sqrt{3}/2)/4$.)