Pismeni ispit iz Numeričkih metoda

1. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je odredjena vrednost `sin` na intervalu $[0, 5]$ pod pretpostavkom da je argument funkcije zadat sa 5 značajnih cifara.

   a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije `sin` u funkciji broja značajnih cifara argumenta funkcije.

   b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije `sin` u funkciji vrednosti argumenta sa korakom `.001`

   c) Nacrtati na jednoj slici teorijski dobijenu ocenu i eksperimentom. Uporediti vrednosti dobijene teorijski i eksperimentom.

   Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite teorijko razmatranje a), `script` file i sliku pod b), sliku i komentar pod c).

   Rešenje. a) Važi ocena (videti knjigu)

$$r_f \leq \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| r_x \quad \Rightarrow \quad z_f \geq -\log_{10} \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| + z_x = 5 - \log_{10} \left| \frac{x \cos(x)}{\sin x} \right|.$$

   b) i c) `Script` koji implementira postavljeni zadatak može biti sledeći

```
x=0:.001:5;
xPrim=x.*(1+10^(-5)*(2*rand(1,length(x))-1));
y=sin(x);
yPrim=sin(xPrim);
plot(x,-log10(abs(yPrim./y-1)),'g',x,5-log10(abs(x.*cos(x)./sin(x))),'r');
legend('eksperiment', 'teorija');
grid on;
```

   Slika 1, levo, prikazuje zahtevanu zavisnost. Primećujemo da se rezultati dobro slažu.

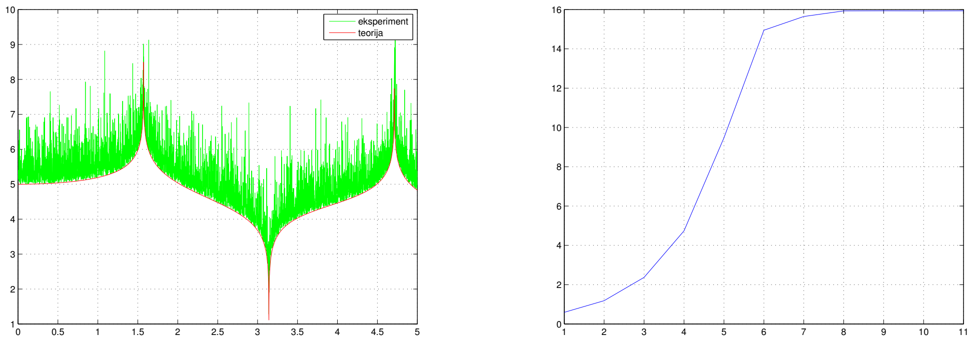
2. a) Napisati program u Matlabu koji izračunava vrednost inverzne matrice matrice A koristeći iterativni metod

$$X_0 = A^T, \quad X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

   Podrazumevati da je matrica A, matrica reda 40, oblika

$$A = I + \frac{1}{40} R,$$

   gde je I jedinična matrica reda 40, i gde je R matrica reda 40, čiji su elementi slučajni brojevi koji pripadaju intervalu $[-1, 1]$.



Slika 1: Levo zavisnost broja značjanih cifara vrednosti funkcije sin u zavisnosti od argumetna, desno broj značjanih cifara prilikom odredjivanja inverzne matrice.

b) Pod pretpostavkom da broj značajnih cifara matrice X_k, $k \in \mathbb{N}$, odredjujemo sa

$$z_k = -\log_{10} \frac{||X_k - A^{-1}||}{||A^{-1}||} \geq -\log_{10} ||AX_k - I||, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara u funkciji broja iteracije.

c) Pokazati na osnovu grafika dobijenog pod b) da je red metoda dva.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `script` file koji implementira iterativni metod za inverziju matrice pod a), nacrtate grafik b) i odredite sa grafika red metoda c).

Rešenje. a) `Script` može biti sledeći

```
red=40;
A=eye(red)+(2*rand(red,red)-1)/red;
X(:,:,1)=transpose(A);
for k=1:10
    X(:,:,k+1)=X(:,:,k)*(2*eye(red)-A*X(:,:,k));
end
```

b) `Script` koji odredjuje broj značajnih cifara, pod uslovom da je izvršen `script` pod delom a), može biti sledeći

```
z=[];
for k=1:11
    z=[z -log10(norm(A*X(:,:,k)-eye(red)))];
end
plot(1:11,z)
grid on;
```

Slika 1, desno, prikazuje zahtevanu zavisnost.

c) Za $k = 4$ vidimo da je broj značajnih cifara otprilike 5 dok je za $k = 5$ broj značjanih cifara 10. Kako je red konvergencije odredjen sa

$$\lim_{k\ to + \infty} \frac{||X_{k+1} - A^{-1}||}{||X_k - A^{-1}||^r} = C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

možemo zaključiti da važi približno

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \frac{||X_{k+1} - A^{-1}||}{||A^{-1}||} \approx C||A^{-1}||^{r-1} \frac{||X_k - A^{-1}||^r}{||A^{-1}||^r} \\ z_{k+1} &= -\log 10 \frac{||X_{k+1} - A^{-1}||}{||A^{-1}||} \approx -r \log_{10} \frac{||X_k - A^{-1}||}{||A^{-1}||} - \log_{10}(C||A^{-1}||^{r-1}) = r z_k + a, \\ a &= -\log_{10}(C||A^{-1}||^{r-1}). \end{aligned}$$

Vidimo da približno broj značajnih cifara raste dva puta sa porastom broja iteracije za jedan. Dakle, red konvergencije je dva.

3. Za odredjivanje vrednosti integrala

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2},$$

koristićemo uopštenu trapeznu formulu.

a) Napisati `script` file u `Matlabu` koji odredjuje aproksimaciju vrednosti integrala I sa 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64 podintervala. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije vrednosti integrala u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

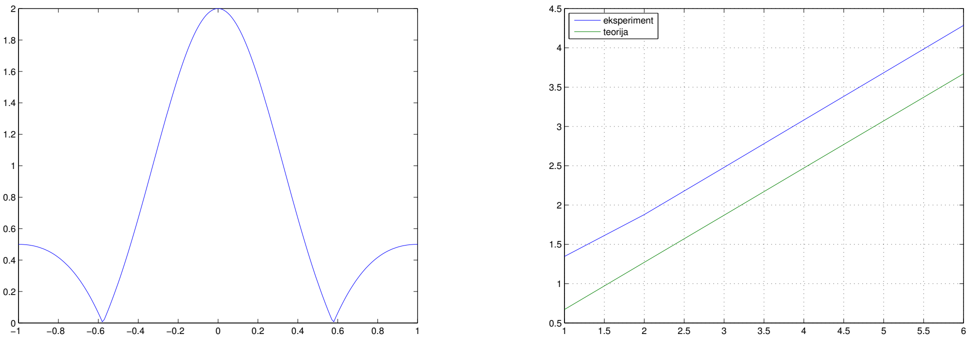
b) Odrediti teorijsku procenu vrednosti greške koja nastaje prilikom odredjivanja vrednosti integrala. Nacrati teorijski procenjen najmanji broj značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

c) Vrednosti dobijene u delu zadatka pod a) smestiti u prvu kolonu matrice `r`, redom prema broju upotrebljenih podintervala počev od jednog podintervala ka 64 podintervala. Zatim odrediti elemente matrice `r`, na i ispod glavne dijagonale, na sledeći način

```
r(j,k)=r(j,k-1)+1/(4^(k-1)-1)*(r(j,k-1)-r(j-1,k-1)),  j=k,...,6,  k=2,...,6.
```

Elemente iznad glavne dijagonale matrice `r` na menjamo, jer nam nisu potrebni. Pod pretpostavkom da elementi matrice `r` na glavnoj dijagonali aproksimiraju vrednost integrala I nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala, dakle redni broj vrste matrice `r`. Na istom grafiku nacrtati grafik broja značajnih cifara dobijenih u delu zadatka pod a) i dobijen opisani način. Koja je metoda bolja, s obzirom da i jedna i druga koriste iste podatke.

Metod integracije u delu pod c) se naziva Rombergova integracija.



Slika 2: Levo grafik funkcije $2|(3x^2-1)/(1+x^2)^3|$, desno zavisnost broja značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `skcript` file i sliku pod a), teorijsko razmatranje i sliku pod b), `script` file,sliku i poredjenje metoda pod c).

Rešenje. a) `Script` može biti sledeći

```
int = [];
for i=1:log2(64)
     res=.5*(1/2+1/2);
     h=2/2^i;
     x=-1;
     for j=1:(2^i-1)
          x=x+h;
          res=res+1/(1+x^2);
     end
     int = [int; h*res];
end
plot(1:log2(64),-log10(abs(int*2/pi-1)));
grid on;
```

b) Greška je teorijski odredjena sa

$$R_N = \frac{(1-(-1))^3}{12N^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)''_{x=\psi} \le \frac{4}{3N^2}\max_{\psi\in[-1,1]}\left|\frac{3\psi^2-1}{(1+\psi^2)^3}\right| \approx \frac{4}{3N^2}.$$

Maksimum funkcije možemo odrediti sa slike koja predstavlja grafik funkcije

$$2\left|\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}\right|$$

Grafik je prikazan na slici 2, levo. Vidimo da je maksimum 2.

Teorisjki broj značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$ je

$$z_T \ge -\log_{10}\frac{8}{3\pi N^2} = -\log_{10}\frac{8}{3\pi} + 2\log_{10} N \approx .071 + .6\log_2 N.$$

Grafik je teorijskog broja značjanih cifara u funkciji $\log_2 N$ je prikazan na slici 2, desno, zajedno sa eksperimentalno dobijenim brojem značajnih cifara.

Vidimo da teorijska i eksperimetalna ocena imaju istu zavisnost u funkciji $\log_2 N$, jedino su teorijski rezultati malo pesimističniji. Što je posledica činjenice da, pri teorijskoj proceni, uzimamo maksimum drugog izvoda funkcije.

c) `Script` kojim se može nacrtati grafik može biti sledeći

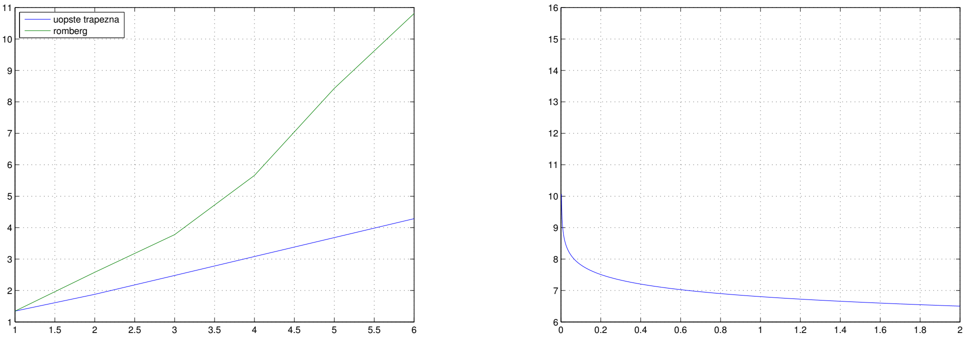
```
int = [];
for i=1:log2(64)
    res=.5*(1/2+1/2);
    h=2/2^i;
    x=-1;
    for j=1:(2^i-1)
        x=x+h;
        res=res+1/(1+x^2);
    end
    int = [int; h*res];
end
r=zeros(log2(64));
r(:,1)=int;
for k=2:log2(64)
    for j=k:6
        r(j,k)=r(j,k-1)+1/(4^(k-1)-1)*(r(j,k-1)-r(j-1,k-1));
    end
end
for i=1:log2(64)
    int(i)=r(i,i);
end
plot(1:log2(64),-log10(abs(r(:,1)*2/pi-1)),1:log2(64),-log10(abs(int*2/pi
    -1)));
legend('uopste trapezna','romberg','Location','northwest');
grid on;
```

Grafik koji se dobija prikazan je na slici 3, levo. Vidimo da podaci modifikovani Rombergovoim algoritmom imaju znatno veći broj značajnih cifara u odnosu na originalne podatke dobijene traeznom formulom. Čak prilikom Rombergove modifikacije broj značajnih cifara raste kvadratno sa porastom $\log_2 N$, dok kod originalnih podataka taj je porast linearan.

4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.



Slika 3: Levo broj značajnih cifara upotrebom trapezne formule i modifikacijom podataka upotrebom Rombergovog algoritma, desno

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći metodu diferenciranja unazad

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6h}{11}f_{n+3}.$$

Potrebnu startnu vrednost y_1 i y_2 izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa $h = .001$ i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y na intervalu $[0, 2]$. Objasniti oblik krive.

c) Za $h_i = 2^{-i}$, $i = 2, \ldots, 7$, nacrati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y. Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka h_i imaju veliki gubitak značajnih cifara sa porastom x, a za koje vrednosti koraka h_i je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite rešenje Cauchyevog problema pod a), napisanu funkciju i nacrtanu sliku pod b) uz objašnjenje slike, sliku i objašnjenje ponašanja metoda za različite vrednosti koraka pod c).

Rešenje. a) Egzatno rešenje je

$$y = e^{-5x}.$$

Dobija se jednostavno jer jednačina razdvaja promenljive.

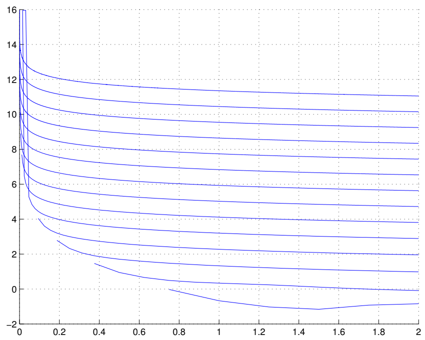
b) Primetimo da za naš konkretan slučaj metoda dobija formu

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6h}{11}(-5y_{n+3}) \quad \Rightarrow \quad y_{n+3} = \frac{1}{11+30h}(18y_{n+2} - 9y_{n+1} + 2y_n).$$

Funkcija implementira rešenje može biti sledeća

```
function [x,y]=difBackward(h)

N=2/h;
x=0:h:2;
y=zeros(1,N+1);
y(1)=1;y(2)=exp(-5*h);y(3)=exp(-5*2*h);
for i=4:(N+1)
```



Slika 4: Levo zavisnost broja značajnih cifara u rešenju u funkciji x, za korake $h = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 15$, desno

```
        y(i)=(18*y(i-1)-9*y(i-2)+2*y(i-3))/(11+30*h);
end
```

`Script` koji crta zahtevani grafik može biti sledeći

```
[x,y]=difBackward(.001);
plot(x,-log10(abs(y.*exp(5*x)-1)));
grid on;
```

Dobijeni grafik je prikazan na slici 3, desno. Dobijeni grafik je posledica zavisnosti greške, videti knjigu, oblika

$$r \approx C(x - x_0)h^p \quad \Rightarrow \quad z \approx C - \log_{10} x - p \log_{10} h.$$

Vidimo da je zavisnost u funkciji x logaritamska, kao i na grafiku.

c) `Script` koji crta zahtevani grafik može biti sledeći

```
close all;
figure;
hold on;
for i=2:15
    h=2^(-i);
    [x,y]=difBackward(h);
    plot(x,-log10(abs(y.*exp(5*x)-1)));
end
grid on;
```

Grafik koji je dobijen je prikazan na slici 4, levo.

Ako h smanjimo dva puta, s obzirom na činjenicu da je metod reda 3, dobijamo

$$3 \log_{10} \approx .9$$

značjanih cifara što se na slici i vidi.

Kako je prikazan broj značjanih cifara primećujemo da posmatramo relativnu stabilnost (videti knjigu). Metodi sa diferentciranjem unazad su apsolutno stabilni na intervalu $(-\infty, 0]$. Dakle apsolutna greška ne raste ako je $-5h \in (-\infty, 0]$. Neka je dakle $\Delta \approx C$. Mi posmatramo broj značajnih cifara, dakle,

$$z \approx -\log_{10} \frac{\Delta}{e^{-5x}} \approx -\log_{10} C - 5x \log_{10} e.$$

Naravno ovde konstanta C zavisni od koraka metoda. Što je korak manji to je ovaj gubitak značajnih cifara, usled opadanja vrednosti rešenja neprimetniji. Što na slici vidimo.

prof. dr Aleksandar Cvetković