Математика 2

Душан Ђукић

1. Неодређени интеграли

1.1. Увод

Примитивна функција дате функције $f(x)$ је функција $F(x)$ таква да је $F' = f$.

Примитивна функција функције f није једнозначно одређена - она је одређена само *до на додавање константе* јер се додавањем константе функцији F њен извод не мења. Примитивну функцију у општем облику пишемо као *неодређени интеграл* функције - *интегранда* f:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C означава произвољну реалну константу.

Налажење неодређеног интеграла - тј. *интеграција* - је процес супротан диференцирању. Тако одмах знамо неке једноставније интеграле. Као и одговарајуће изводе, и њих је корисно запамтити - волимо да их зовемо „табличним”. Можете се уверити да је у свакој једнакости извод десне стране једнак интегранду на левој страни:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1); \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > -0, a \neq 1);$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a}\right) + C.$$

Свака непрекидна функција f има неодређени интеграл. У следећој глави ћемо то и доказати.

С друге стране, и неке функције које нису непрекидне имају неодређени интеграл. На пример, функција

$$f(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

има прекид у нули и прилично је дивља у околини нуле, али има неодређени интеграл:

$$\int f(x)\,dx = x^2 \sin\frac{1}{x^2} + \text{const.}$$

Неодређени интеграли многих функција, иако постоје, не могу се представити помоћу елементарних функција. Такви су, на пример,

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \dots,$$

ма колико једноставно изгледали.

Други су само компликовани - нпр. проверите да ли је ово тачно:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{2+\sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{\sin x - \cos x + \sqrt{3}}{\cos x - \sin x + \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \text{const.}$$

Како онда пронаћи неодређени интеграл?

За почетак, имамо једноставна линеарна правила: ако су f и g функције и k константа, онда је

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Значило би нам и некакво правило производа, али оно не постоји.

Пример 1.1. Свакако *није тачна* формула $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$.

Контрапример је тешко промашити. Нпр. ако је $f(x) = g(x) = x$, онда је

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \neq \quad \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \Big(\frac{1}{2}x^2 + C\Big) \cdot \Big(\frac{1}{2}x^2 + C\Big).$$

Не постоји ни правило сложене функције. Наш једини алат за налажење неодређених интеграла су неке методе, од којих ће најважније бити приказане у наставку.

1.2. Смена променљиве и парцијална интеграција

Понекад се дати интеграл по променљивој x може упростити ако се изрази као интеграл по новој променљивој y. Претпоставимо да је $x = g(y)$ функција по y. Диференцирање даје $dx = g'(y)dy$. Тако добијамо *правило смене променљиве*:

$$\int f(x)dx = \int f(g(y)) \cdot g'(y)dy.$$

Ово правило је очигледна последица правила извода сложене функције.

Пример 1.2. Израчунати интеграле (а) $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ и (б) $J = \int xe^{-x^2}dx$.

Решење. (а) Стару променљиву x изразићемо преко нове променљиве t.

Сменом $x = (t-1)^2$ и $dx = 2(t-1)dt$ (за $t \geqslant 1$) дати интеграл постаје

$$I = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = \int \Big(2 - \frac{2}{t}\Big)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} = 2t - 2\ln|t| + \text{const}.$$

Најзад, $t = 1 + \sqrt{x}$, па је коначно $I = 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + \text{const}$.

(б) Чешћи је случај када је нова променљива t задата као функција по старој променљивој x.

Овде задајемо смену $t = -x^2$ и $dt = -2xdx$. Тада је $xdx = -\frac{1}{2}dt$, па дати интеграл постаје

$$J = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + \text{const} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \text{const}.$$

Затим имамо правило *парцијалне интеграције*, које је последица правила извода производа. Наиме, ако су $u(x)$ и $v(x)$ функције, онда из $u \cdot v' = (uv)' - v \cdot u'$ интеграцијом по dx следи $\int u \cdot v'\,dx = uv - \int v \cdot u'\,dx$. Краће записано,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Укратко, ако смо суочени са интегралом $\int f\,dx$, одабиром u и v тако да је $f = u \cdot v'$ проблем сводимо на одређивање интеграла $\int v \cdot u'\,dx$. Што је тај други интеграл једноставнији, то боље.

Пример 1.3. Израчунати $\int \ln x\,dx$.

Решење. Применићемо парцијалну интеграцију, узимајући $u = \ln x$ и $dv = dx$:

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & v=x \\ du=dx/x & dv=dx \end{matrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x(\ln x - 1) + C.$$

1.3. Просте рационалне функције

Рационална функција је количник два полинома. Такве су нпр. функције $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{x^4-4x+1}{x^3-x}$, али не и функције $\sqrt[3]{x^3+1}$ и $\sin x$. Овде су нам рационалне функције важне, јер чине једну велику класу интеграла који се могу тачно одредити.

Пример 1.4. Како се рачуна интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4-4x+1}{x^3-x}\,dx$?

Овде вероватно ниједна смена нити парцијална интеграција неће помоћи. У интегралима рационалних функција, као што је овај, идеја је да се интегранд представи као збир једноставнијих сабирака - полинома и тзв. простих рационалних функција. У овом случају то представљање је

$$\frac{x^4-4x+1}{x^3-x}=x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

(можете проверити да ли је једнакост тачна). Сада је задатак лак:

$$\int \frac{x^4-4x+1}{x^3-x}dx=\int x\,dx-\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+3\ln|x+1|-\ln|x-1|+\text{const.}$$

Просте рационалне функције су функције облика $F(x)/G(x)^n$, где је G нерастављив полином, а F полином степена мањег од степена G. Дакле, ако подразумевамо реалне коефицијенте, просте функције су функције облика

$$(1^\circ)\quad \frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^2},\ \frac{A}{(x-a)^3}\ \dots\quad \text{или}\quad (2^\circ)\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^3},\ \dots$$

где су A,B,C и a,p,q (реалне) константе. Обично се захтева и да триноми x^2+px+q имају негативне дискриминанте. Видећемо ускоро како се налазе интеграли свих оваквих функција. Остаје питање - *да ли* и *како* се авака рационална функција може раставити на збир простих функција.

Подсетимо се пар чињеница о полиномима.

- Сваки полином $Q(x)$ степена n има тачно n нула у скупу комплексних бројева: рецимо, α_1, $\dots,\alpha_n$. Неке нуле се могу понављати. Тада је $Q(x)=c\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Комплексне нуле реалног полинома увек долазе у пару: ако је z његова нула, онда је то и $\bar z$. При томе је $(x-z)(x-\bar z)=x^2-px+q$ реалан полином: $p=2\,\mathrm{Re}(z)$ и $q=|z|^2$.
- Груписањем чинилаца, сваки реалан полином $Q(x)$ се може раставити на линеарне и квадратне чиниоце:
$$Q(x)=c\cdot(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell},\tag{1}$$
где су сви фактори различити и при томе су α_i,p_i,q_i и c реални, а r_i,s_i природни бројеви.

Тврђење 1.1. Нека се $Q(x)$ факторише као у (1). Свака рационална функција $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ може се представити у облику збира полинома и простих рационалних функција:

$$f(x)=S(x)+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant r_i}}\frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant \ell\\1\leqslant j\leqslant s_i}}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j},$$

за неке константе A_{ij} и B_{ij},C_{ij}.

Доказ. Полиномски сабирак $S(x)$ добија се дељењем полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ са остатком. Тада је $f(x)=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где је степен остатка $R(x)$ мањи од степена $Q(x)$.

Множење са $Q(x)$ даје представљање

$$R(x)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant r_i}}A_{ij}\frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant \ell\\1\leqslant j\leqslant s_i}}(B_{ij}x+C_{ij})\frac{Q(x)}{(x^2+p_ix+q_i)^j},$$

у коме су сви сабирци осим $\frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^{r_i}}$ дељиви са $x-\alpha_i$. Тако заменом $x=\alpha_i$ налазимо $A_{ir_i}=R(a)/\frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^{r_i}}\big|_{x=a}$. Овај поступак настављамо на функцији $\frac{R(x)}{Q(x)}-\frac{A_{ir_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}$, елиминишући један по један сабирак. Слично, коефицијенте B_{ij} и C_{ij} одређујемо заменом вредности $x=z$, где је z (комплексна) нула полинома $x^2+p_ix+q_i$. $\square$

За растављање на просте рационалне функције постоје разни методи.

Пример 1.5. Посматрајмо функцију $f(x)=\dfrac{x^6+x^3+3}{x^5-x^3-2x^2+2x}$.

Дељење са остатком даје $x^6+x^3+3=x(x^5-x^3-2x^2+2x)+x^4+3x^3-2x^2+3$. Именилац се факторише као $x^5-x^3-2x^2+2x=x(x-1)^2(x^2+2x+2)$. Дакле, имаћемо растављање облика

$$f(x) = x + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

Треба одредити коефицијенте A, B, C, D, E тако да ова једнакост буде тачна. Свођење на заједнички именилац даје

$$A(x-1)^2(x^2+2x+2) + Bx(x-1)(x^2+2x+2) + Cx(x^2+2x+2) + (Dx+E)x(x-1)^2 = x^4+3x^3-2x^2+3. \quad (2)$$

(а) Један начин је *метод замене вредности*.

- Заменом $x = 1$ у (2) добијамо $C = 1$;
- Одузимањем $\cancel{C}x(x^2+2x+2)$ од (2) и дељењем са $x-1$, а затим поновним уметањем $x = 1$, добијамо $B = 0$;
- Заменом $x = 0$ у (2) добијамо $A = \frac{3}{2}$;
- Нула тринома $x^2 + 2x + 2$ је $x = i - 1$. Њеном заменом у (2) добијамо $(7i+1)(Di+E-D) = 10i + 5$, тј. $Di + E - D = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$, одакле је $D = -\frac{1}{2}$ и $E = 1$.

(б) Други начин је *метод неодређених коефицијената*. Једнакост (2) након развоја постаје

$$(A+B+D)x^4 + (B+C-2D+E)x^3 + (2C+D-A-E)x^2 + (E+2C-2B-2A)x + 2A = x^4+3x^3-2x^2+3.$$

Упоређивањем коефицијената на левој и десној страни добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} A + B + D &= 1 \\ B + C - 2D + E &= 3 \\ -A + 2C + D - 2E &= -2 \\ -2A - 2B + 2C + E &= 0 \\ 2A &= 3 \end{aligned}$$

чијим решавањем налазимо $A = \frac{3}{2}$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -\frac{1}{2}$ и $E = 1$.

Тако долазимо до траженог растављања функције $f(x)$:

$$f(x) = x + \frac{3/2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x + 1}{x^2+2x+2}.$$

1.4. Рационални интеграли

Рационалан интеграл је интеграл рационалне функције. Пошто рационалну функцију умемо да раставимо на збир простих, још нам требају интеграли простих рационалних функција:

$$(1^\circ) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx \quad \text{и} \quad (2^\circ) \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

(1°) Интеграле функција облика $\frac{A}{(x-a)^n}$ је лако наћи (сменом $y = x - a$), јер је

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + \text{const} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \text{const}.$$

Остају интеграли функција $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$. Почећемо допуњавањем квадрата у имениоцу:

$$\int f(x)dx = \!\!\!\mid_{\substack{y=x+p/2 \\ dy=dx}}\!\!\mid\!= \int \frac{Bx+C'}{(x^2+px+q)^n} = B \cdot \int \frac{y\,dy}{(y^2+D)^n} + C' \cdot \int \frac{dy}{(y^2+D)^n}.$$

где су $C' = C - \frac{1}{2}Bp$ и $D = q - \frac{1}{4}p^2$.

(2°_1) Нека је $n = 1$. Одмах имамо

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+D} = \!\!\!\mid_{\substack{t=y^2+D \\ dt=2y\,dy}}\!\!\mid\!= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + \text{const} = \frac{1}{2} \ln|y^2+D| + \text{const}.$$

Обично се претпоставља да именилац $x^2 + px + q$ нема реалних нула, тако да је $D = a^2 > 0$. Тада је

$$\int \frac{dy}{y^2+a^2} = \!\!\!\mid_{\substack{y=at \\ dy=a\,dt}}\!\!\mid\!= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + \text{const} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} + \text{const}.$$

С друге стране, и случај $D = -a^2 < 0$ може да буде од користи. Тада је

$$\int \frac{dy}{y^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a} \right) dy = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y-a}{y+a} \right| + \text{const}.$$

(2°_2) Најзад, нека је $n>1$. Као и у случају (2°_1), лако рачунамо

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+D)^n} \;=\!\!\left|\begin{smallmatrix} t=y^2+D \\ dt=2y\,dy\end{smallmatrix}\right|\!\!=\; \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2(n-1)t^{n-1}} + \mathrm{const} = \frac{1}{2(n-1)(y^2+D)^{n-1}} + \mathrm{const}.$$

Последњи случај, интеграл функције $\frac{dy}{(y^2+D)^n}$, решавамо парцијалном интеграцијом. Означимо $I_n = \displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+D)^n}$. Вредност I_1 већ знамо на основу случаја (2°_1). За $n>1$ имамо

$$D\cdot I_n = \int \frac{(x^2+D)-x^2}{(x^2+D)^n}dx = I_{n-1} - \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+D)^n},$$

одакле је парцијалном интеграцијом

$$\begin{aligned} I_{n-1} - D\cdot I_n &= \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+D)^n} \;=\!\!\left|\begin{matrix} u=x & v=-\frac{1}{2n-2}(x^2+D)^{1-n} \\ du=dx & dv=x(x^2+D)^{-n}dx\end{matrix}\right|\!\!=\; \int u\,dv = uv-\int v\,du \\ &= \frac{-x}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}} + \int\frac{dx}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}} = \frac{1}{2n-2}I_{n-1} - \frac{x}{(2n-2)(x^2+D)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$D\cdot I_n = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+D)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \mathrm{const}.$$

1.5. Експоненцијални и тригонометријски интеграли

Рационалан експоненцијални интеграл је интеграл облика

$$I = \int R(e^x)\,dx,$$

где је R рационална функција. Овакав интеграл се сменом $t=e^x$ одмах своди на рационалан:

$$\int R(e^x)\,dx \;=\!\!\left|\begin{smallmatrix} x=\ln t \\ dx=dt/t\end{smallmatrix}\right|\!\!=\; \int\frac{R(t)}{t}\,dt.$$

Пример 1.6. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$.

Решење. Смена $t=e^x$ даје $I \;=\!\!\left|\begin{smallmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{smallmatrix}\right|\!\!=\; \displaystyle\int\frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + \mathrm{const} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \mathrm{const}.$

Рационалан тригонометријски интеграл је интеграл облика

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где је R рационална функција по две променљиве. Овакав интеграл се у општем случају своди на рационалан интеграл „универзалном” тригонометријском сменом:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{тј.} \quad x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Заиста, тада је $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$, па је

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{и} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Тако полазни интеграл постаје $I = \displaystyle\int\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,dt}{1+t^2}$, што је можда рогобатно, али је рационално.

Пример 1.7. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int\frac{dx}{1+2\sin x}$.

Решење. Смена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ нам даје

$$\begin{aligned} I &\;=\!\!\left|\begin{smallmatrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=2dt/(1+t^2)\end{smallmatrix}\right|\!\!=\; \int\frac{2\,dt/(1+t^2)}{1+4t/(1+t^2)} = \int\frac{2\,dt}{1+4t+t^2} \\ &\;=\!\!\left|\begin{smallmatrix} u=t+2 \\ du=dt\end{smallmatrix}\right|\!\!=\; \int\frac{2\,du}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + \mathrm{const} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right| + \mathrm{const}. \end{aligned}$$

Ипак, у неким специјалним случајевима пролазе и једноставније смене:

(1°) $I = \int R(\sin x)\cos x\,dx \;=\!\!\left|{}^{t=\sin x}_{dt=\cos x\,dx}\right|\!\!= \int R(t)\,dt;$

(2°) $I = \int R(\cos x)\sin x\,dx \;=\!\!\left|{}^{t=\cos x}_{dt=-\sin x\,dx}\right|\!\!= -\int R(t)\,dt;$

(3°) $I = \int R(\operatorname{tg} x)\,dx \;=\!\!\left|{}^{t=\operatorname{tg} x}_{dx=\frac{dt}{t^2+1}}\right|\!\!= \int \dfrac{R(t)}{t^2+1}dt.$

Пример 1.8. Израчунати интеграле (а) $I = \int \cos^5 x\,dx$ и (б) $I = \int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

Решење. (а) Овде је важно приметити да је $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ рационална функција по $\sin x$, па је

$$I \;=\!\!\left|{}^{t=\sin x}_{dt=\cos x\,dx}\right|\!\!= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-t^2)^2 dt = t - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{2}{5}t^5 + \text{const}$$
$$= \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + \tfrac{2}{5}\sin^5 x + \text{const}.$$

(б) Примећујемо да је $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ рационално по $\operatorname{tg} x$, па је употребљива смена $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \;=\!\!\left|{}^{t=\operatorname{tg} x}_{dt=dx/cos^2 x}\right|\!\!= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2)dt = t + \frac{1}{3}t^3 + \text{const} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \text{const}.$$

Посебно су значајни интеграли степена тригонометријских функција:

$$I = \int \cos^n x\,dx \quad \text{и} \quad \int \sin^n x\,dx = \int \cos^n\!\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)dx, \quad \text{где је } n \in \mathbb{N}.$$

Мада је у примеру 1.8(а) један овакав интеграл сведен на полином сменом $t = \sin x$, оваква смена ће водити циљу само ако је n непарно. Овде ћемо за овакве интеграле употребити Муаврову формулу. Наиме, ако је $z = \cos x + i\sin x$, онда је $z^k + z^{-k} = 2\cos kx$ и, по Биномној формули,

$$\begin{aligned}\cos^n x &= \tfrac{1}{2^n}\left(z+z^{-1}\right)^n = \tfrac{1}{2^n}\left[z^n + \tbinom{n}{1}z^{n-2} + \tbinom{n}{2}z^{n-4} + \dots + \tbinom{n}{n-2}z^{4-n} + \tbinom{n}{n-1}z^{2-n} + z^{-n}\right]\\ &= \tfrac{1}{2^n}\left((z^n+z^{-n}) + \tbinom{n}{1}(z^{n-2}+z^{2-n}) + \tbinom{n}{2}(z^{n-4}+z^{4-n}) + \dots\right)\\ &= \tfrac{1}{2^{n-1}}\left(\cos nx + \tbinom{n}{1}\cos(n-2)x + \tbinom{n}{2}\cos(n-4)x + \dots\right),\end{aligned}$$

тако да је

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\sin nx}{n} + \binom{n}{1}\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \binom{n}{2}\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \dots + \binom{n}{[n/2]}\frac{\sin(n-2[\frac{n}{2}])x}{n-2[\frac{n}{2}]}\right) + \text{const}.$$

1.6. Квадратно ирационални интеграли

Под квадратно ирационалним интегралима подразумевамо интеграле облика

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{3}$$

где је R рационална функција двеју промењљивих и $a \neq 0$.

Добијени интеграл се може свести на рационалан неком од следећа два типа смена.

(1°) *Тригонометријске/хиперболичке смене.*

Први корак је допуњавање тринома под кореном до квадрата: сменом $z = x + \frac{b}{2a}$ дати интеграл постаје $\int R\big(z - \frac{b}{a}, \sqrt{az^2+D}\big)dz$, где је $D = c - \frac{b^2}{4a}$. Он се затим сменом $y = z\sqrt{|D/a|}$ своди на интеграл облика

$$\int R_1\left(y, \sqrt{\pm y^2 \pm 1}\right)dy,$$

где је R_1 такође рационална функција.

(1°_1) Ако у интегралу учествује $\sqrt{1-y^2}$, намеће се тригонометријска смена $t = \arcsin y$, тј. $y = \sin t$. Овако се полазни интеграл своди на тригонометријски:

$$\int R_1\big(y, \sqrt{1-y^2}\big)\,dy \;=\!\!\left|\begin{smallmatrix}y=\sin t\\ \sqrt{1-y^2}=\cos t\\ dy=\cos t\,dt\end{smallmatrix}\right|\!\!= \int R_1\big(\sin t, \cos t\big)\cos t\,dt.$$

(1°_2) Ако пак у интегралу учествује $\sqrt{y^2-1}$ или $\sqrt{y^2+1}$, прибегавамо једној од хиперболичких смена:
$$y=\operatorname{ch} t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \text{односно} \quad y=\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$
Знајући да је $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$ и $t=\ln(\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t)$, једноставно налазимо њихове инверзне функције:
$$t=\operatorname{arch} y=\ln\big(y+\sqrt{y^2-1}\big), \quad \text{односно} \quad t=\operatorname{arsh} y=\ln\big(y+\sqrt{y^2+1}\big).$$
При томе је $(\operatorname{ch} t)'=\operatorname{sh} t$ и $(\operatorname{sh} t)'=\operatorname{ch} t$, па тако полазни интеграли постају експоненцијални:
$$\int R_1\big(y,\sqrt{y^2-1}\big)\,dy=\left|\begin{smallmatrix} y=\operatorname{ch} t\\ \sqrt{y^2-1}=\operatorname{sh} t\\ dy=\operatorname{sh} t\,dt\end{smallmatrix}\right|=\int R_1\big(\operatorname{ch} t,\operatorname{sh} t\big)\operatorname{sh} t\,dt,$$
$$\int R_1\big(y,\sqrt{y^2+1}\big)\,dy=\left|\begin{smallmatrix} y=\operatorname{sh} t\\ \sqrt{y^2+1}=\operatorname{ch} t\\ dy=\operatorname{ch} t\,dt\end{smallmatrix}\right|=\int R_1\big(\operatorname{sh} t,\operatorname{ch} t\big)\operatorname{ch} t\,dt.$$

Пример 1.9. Израчунати: (а) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx$; (б) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$; (в) $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Решење. (а) Користимо смену $\left|\begin{smallmatrix} x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{smallmatrix}\right|$ за $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. Тада је $\sqrt{1-x^2}=\cos t$ и
$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2 t\,dt=\frac12 t+\frac12\sin t\cos t+C=\frac12\arcsin x+\frac12 x\sqrt{1-x^2}+C.$$

(б) Сада је потребна смена $\left|\begin{smallmatrix} x=\operatorname{sh} t\\ dx=\operatorname{ch} t\,dt\end{smallmatrix}\right|$. Имајмо у виду да је $\sqrt{x^2+1}=\operatorname{ch} t$ и $e^{\pm t}=\sqrt{x^2+1}\pm x$:
$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\,dx&=\int\operatorname{ch}^2 t\,dt=\int\Big(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\Big)^2=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}+\frac{t}{2}+C\\&=\frac{\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)^2+\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)^2}{8}+\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)=\frac12 x\sqrt{x^2+1}+\frac12\ln(x+\sqrt{x^2+1}).\end{aligned}$$

(в) Слично делу (б), сменом $\left|\begin{smallmatrix} x=\operatorname{ch} t\\ dx=\operatorname{sh} t\,dt\end{smallmatrix}\right|$, с обзиром на $\sqrt{x^2-1}=\operatorname{sh} t$ и $e^{\pm t}=x\pm\sqrt{x^2-1}$, добијамо
$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-1}\,dx&=\int\operatorname{sh}^2 t\,dt=\int\Big(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\Big)^2=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{t}{2}+C\\&=\frac{\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)^2+\big(\sqrt{x^2-1}-x\big)^2}{8}-\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)=\frac12 x\sqrt{x^2-1}-\frac12\ln(x+\sqrt{x^2-1}).\end{aligned}$$

(2°) *Ојлерове смене.*

Ојлерова смена је рационална смена за x при којој и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ постаје рационална функција.

(2°_1) Ако је $a>0$, уводимо *прву Ојлерову смену*:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.$$
Тада је x рационална функција по t. Заиста, квадрирањем следи $\cancel{ax^2}+bx+c=\cancel{ax^2}+t^2\pm 2tx\sqrt{a}$, па је
$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}=\frac{bt\mp(t^2+c)\sqrt{a}}{b\mp 2t\sqrt{a}}.$$
Тиме се и интеграл (3) своди на рационалан интеграл по t.

(2°_2) Нека је $a<0$.

Можемо почети сменом $y=x+\frac{b}{2a}$, тако да је $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{ay^2+c_0}$, где је $c_0=c-\frac{b^2}{4a}>0$. Сада уводимо *другу Ојлерову смену* при којој y и $\sqrt{ay^2+c_0}$ постају рационалне функције по t:
$$\sqrt{ay^2+c_0}=yt\pm\sqrt{c_0}, \quad \text{или директно,} \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)t\pm\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}.$$
Заиста, квадрирање нам даје $ay^{\cancel{2}}+\cancel{c_0}=y^{\cancel{2}}t^2\pm 2\cancel{y}t\sqrt{c_0}+\cancel{c_0}$, тако да је
$$y=\pm\frac{2t\sqrt{c_0}}{a-t^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{ay^2+c_0}=\pm\frac{(a+t^2)\sqrt{c_0}}{a-t^2}.$$
Овим се интеграл (3) своди на рационалан интеграл по t.

Пример 1.10. Израчунати интеграле (а) $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$ и (б) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{3-\sqrt{4-x^2}}$.

Решење. (а) Ојлерова смена $x+t=\sqrt{x^2+x+1}$ даје $x=\frac{1-t^2}{2t-1}$, $dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$ и $\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}$, па је

$$I_1=\int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt}{1+\frac{t^2-t+1}{2t-1}} = -2\int \frac{t^2-t+1}{t(t+1)(2t-1)}dt = -2\int\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= -2\ln|t+1|-\ln|2t-1|+2\ln|t|+\text{const} = \ln\left|\frac{t^2}{(t+1)^2(2t-1)}\right|+\text{const}.$$

(б) Ојлерова смена $\sqrt{4-x^2}=xt-2$ нам даје $x=\frac{4t}{1+t^2}$, $dx=\frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$ и $\sqrt{4-x^2}=\frac{2(t^2-1)}{1+t^2}$, па је

$$I_1=\int\frac{\frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt}{3-\frac{2(t^2-1)}{1+t^2}} = \int\frac{4(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)(t^2+5)} = \int\left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{6}{t^2+5}\right)dt = 2\operatorname{arctg} t-\frac{6}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt5}+\text{const}.$$

Код релативно уске класе интеграла облика

$$I=\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је $P(x)$ полином, од помоћи је *метод Остроградског*. Наиме, показује се да коначан резултат увек има облик

$$I=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

где је Q непознат полином степена за један мањег од P, а λ непозната константа. При томе је

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt a}\ln\left(ax+\frac b2+\sqrt a\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+\text{const}, & a>0,\\ \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\text{const}, & a<0.\end{cases}$$

Полином Q и константа λ могу се одредити диференцирањем једнакости (4), а затим упоређивањем коефицијената.

Пример 1.11. Израчунати интеграл $I=\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решење. Полином Q има степен 1, па једнакост (4) гласи $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+\int\frac{\lambda\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Диференцирање даје $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}=A\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax+B)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, тј.

$$x^2=A(x^2+2x+2)+(Ax+B)(x+1)+\lambda=2Ax^2+(3A+B)x+(2A+B+\lambda),$$

одакле је $2A=1$, $3A+B=0$ и $2A+B+\lambda=0$. Тако налазимо $A=\frac12$, $B=-\frac32$ и $\lambda=\frac12$, па је

$$I=\frac12(x-3)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac12\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac12(x-3)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac12\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\text{const}.$$

1.7. Задаци

1. Израчунати: (а) $\int\cos(nx)dx$; (б) $\int\sin^2 x\,dx$; (в) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; (г) $\int\operatorname{sh}x\,dx$; (д) $\int\operatorname{ch}x\,dx$.

2. Израчунати (а) $I=\int\arcsin x\,dx$ и (б) $I=\int x^n\ln x\,dx$ $(n\neq-1)$.

3. Израчунати (а) $I=\int x^2e^x\,dx$ и (б) $I=\int x^2\sin x\,dx$.

4. Израчунати $I=\int x^3e^{3x}dx$.

5. Израчунати (а) $I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$; (б) $J=\int e^{ax}\cos bx\,dx$

6. Одредити $I=\int\sin x\cos x\sin\cos x\,dx$.

7. Израчунати $I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

8. Одредити интеграле (а) $I = \int x^2 \ln(x^2+1)\, dx$ и (б) $I = \int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$.

9. Израчунати $I = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x}}$.

10. Одредити $I = \int \frac{\ln(\sin^2 x + 1)\cos x dx}{\sin^2 x}$.

11. Представити следеће функције у облику збира полинома и простих рационалних функција:
(а) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$; (б) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$; (в) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$; (г) $f(x) = \frac{x-2}{x^5 + x^3}$.

12. Израчунати $I = \int \frac{x\, dx}{x^2 + 2x + 3}$.

13. Одредити $I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^2}\, dx$.

14. Израчунати $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x} - x}$.

15. Израчунати $I = \int \frac{(2x-3)dx}{x^3 - 3x + 2}$.

16. Одредити $I = \int \frac{x^4\, dx}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$.

17. Израчунати $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 4)^3}$.

18. Израчунати $I = \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

19. Израчунати $I = \int \frac{e^{x/2}}{e^{2x} + 4}\, dx$.

20. Израчунати $I = \int \frac{dx}{4^x - 2^x}$.

21. Израчунати $I = \int \frac{dx}{3 + \sin x}$.

22. Израчунати $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

23. Израчунати $I = \int \cos \frac{x}{2} \sqrt{\cos x}\, dx$.

24. Израчунати $I = \int \frac{x\, dx}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$.

25. Свести интеграл $I = \int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + x + 3)^{3/2}}$ на рационалан користећи Ојлерову смену.

26. Свести интеграл $I = \int x \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\, dx$ на рационалан.

27. Свести интеграл $I = \int \sqrt[5]{x^5 - x^4}\, dx$ на рационалан.

28. Израчунати $I = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$.

29. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

30. Одредити $I = \displaystyle\int \ln x \arcsin x \, dx$.

31. Одредити $I = \displaystyle\int x \ln(x-1)\ln(x+1)\, dx$.

32. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+10x^2-96x-71}}$.

1.8. Решења

1. (а) Смена $y = nx$, $dy = ndx$: $\int \cos(nx)dx = \int \cos y \frac{dy}{n} = \frac{1}{n}\sin y + C = \frac{1}{n}\sin nx + C$.

   (б) Пошто је $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, имамо $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\int 1dx + \int \cos 2x\, dx) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

   (в) Смена $y = \cos x$, $dy = -\sin x\, dx$: $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \frac{-dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C$.

   (г) Како је $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$, имамо $\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + C = \operatorname{ch} x + C$.

   (д) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C = \operatorname{sh} x + C$.

2. Користимо парцијалну интеграцију.

   (а) $$I = \left| \begin{smallmatrix} u=\arcsin x & du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x & dv=dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Преостали интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ се сменом $t = 1-x^2$ и $dt = -2x\,dx$ своди на $-\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, што је једнако $-\sqrt{t} + \text{const} = -\sqrt{1-x^2} + \text{const}$. Према томе, $I = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \text{const}$.

   (б) $$I = \left| \begin{smallmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{x^{n+1}}{n+1} & dv=x^n dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \int \frac{x^n dx}{n+1} = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \text{const}.$$

3. Дате примере решавамо поновљеном парцијалном интеграцијом, снижавањем степена x.

   (а) $$\int x^2 e^x\, dx = \left| \begin{smallmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ v=e^x & dv=e^x dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x^2e^x - \int 2xe^x dx$$
   $$\int 2xe^x\, dx = \left| \begin{smallmatrix} u=2x & du=2dx \\ v=e^x & dv=e^x dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = 2xe^x - \int 2e^x dx = (2x-2)e^x + \text{const}.$$

   Према томе, $I = (x^2 - 2x + 2)e^x + \text{const}$.

   (б) $$\int x^2 \sin x\, dx = \left| \begin{smallmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ v=-\cos x & dv=\sin x dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx$$
   $$\int 2x\cos x\, dx = \left| \begin{smallmatrix} u=2x & du=2dx \\ v=\sin x & dv=\cos x dx \end{smallmatrix} \right| = \int u\,dv = uv - \int v\,du = 2x\sin x + 2\cos x + \text{const}.$$

   Према томе, $I = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + \text{const}$.

4. $I = \dfrac{1}{27}e^{3x}(9x^3 - 9x^2 + 6x - 2) + \text{const}$.

5. Парцијалном интеграцијом $\left| \begin{smallmatrix} u=\sin bx & du=b\cos bx\, dx \\ v=e^{ax}/a & dv=e^{ax}dx \end{smallmatrix} \right|$ добијамо
   $$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J + \text{const}.$$

   С друге стране, парцијалном интеграцијом $\left| \begin{smallmatrix} u=\cos bx & du=-b\sin bx\, dx \\ v=e^{ax}/a & dv=e^{ax}dx \end{smallmatrix} \right|$ добијамо
   $$J = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I + \text{const}.$$

   Дакле, $I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I)$. Решавањем по I налазимо
   $$I = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + \text{const} \quad \text{и} \quad J = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + \text{const}.$$

6. Сменом $\left|{t=\cos x \atop dt=-\sin x\,dx}\right|$ и парцијалном интеграцијом добијамо

$$I=-\int t\sin t\,dt =\!\left|{u=t \atop v=\cos t}\quad{du=dt \atop dv=-\sin t dt}\right|\!= \int u\,dv = uv-\int v\,du = t\cos t-\int \cos t = t\cos t-\sin t+\text{const}$$
$$=\cos x\cos\cos x-\sin\cos x+\text{const}.$$

7. Смена $\left|{x=t^2 \atop dx=2t\,dt}\right|$ даје $I=2\int t\operatorname{arctg} t\,dt$. Сада парцијална интеграција даје

$$I=\!\left|{u=\operatorname{arctg} t \atop du=\frac{dt}{t^2+1}}\quad{v=t^2+1 \atop dv=2tdt}\right|\!= \int u\,dv = uv-\int v\,du = (t^2+1)\operatorname{arctg} t-\int \frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{t^2+1}}dt = (t^2+1)\operatorname{arctg} t - t+\text{const}$$
$$=(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\text{const}.$$

Напомена. Обратите пажњу на одабир $v=t^2+1$ уместо $v=t^2$ у парцијалној интеграцији. Он се показао погодним за упрошћавање интеграла $\int v\,du$.

8. У оба задатка користићемо парцијалну интеграцију.

(а) $$I=\!\left|{u=\ln(x^2+1) \atop v=x^3/3}\quad{du=\frac{2x\,dx}{x^2+1} \atop dv=x^2dx}\right|\!= \int u\,dv = uv-\int v\,du = \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\int(x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\operatorname{arctg} x+\text{const}.$$

(б) $$I=\!\left|{u=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \atop v=x}\quad{du=dx/\sqrt{x^2+1} \atop dv=dx}\right|\!= \int u\,dv = uv-\int v\,du = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\!\left|{t=x^2+1 \atop dt=2xdx}\right|\!= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t+1}} = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+\text{const}.$$

9. $I=2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\text{const}.$

10. $I=2\operatorname{arctg}\sin x-\dfrac{\ln(\sin^2 x+1)}{\sin x}+\text{const}.$

11. (а) Пошто је именилац $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, растављање ће имати облик $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$, што множењем са x^2-x-2 даје $A(x-2)+B(x+1)=x$. Замена $x=-1$ даје $A=\frac{1}{3}$, а замена $x=2$ даје $B=\frac{2}{3}$. Дакле, $f(x)=\frac{1/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}$.

(б) Дељење са остатком даје $f(x)=x+4+\frac{12x-16}{x^2-4x+4}$, па како је $x^2-4x+4=(x-2)^2$, за неке константе A,B важи $\frac{12x-16}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$. Свођење на заједнички именилац даје $Ax+(B-2A)=12x-16$, одакле је $A=12$ и $B=8$. Тако је $f(x)=x+4+\frac{12}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$.

(в) Како је $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, имаћемо $f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{x^3-1}$, дакле $A+B=0$, $A-B+C=0$, $A-C=1$. Решење овог система је $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$. Према томе, $f(x)=\frac{1/3}{x-1}-\frac{x/3+2/3}{x^2+x+1}$.

(г) Именилац је $x^5+x^3=x^3(x^2+1)$, па је $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(Ax^2+Bx+C)+x^3(Dx+E)}{x^5+x^3}$. Следи да је $x-2=(x^2+1)(Ax^2+Bx+C)+x^3(Dx+E)=(A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C$. Дакле, $A+D=0$, $B+E=0$, $A+C=0$, $B=1$, $C=-2$. Лако добијамо $A=2$, $D=-2$ и $E=-1$, па је $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{2x+1}{x^2+1}$.

12. Пошто је $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, сменом $\left|{y=x+1 \atop dy=dx}\right|$ добијамо

$$I=\int\frac{y-1}{y^2+2}dy=\frac{1}{2}\ln(y^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}+\text{const}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\text{const}.$$

13. Растављање интегранда на просте сабирке има облик $\frac{x^2+x+1}{x^4-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}$. Свођење на заједнички именилац даје $(A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2-Ax-B=x^2+x+1$. Упоређивањем коефицијената налазимо $A=B=-1$, $C=-\frac{1}{2}$ и $D=\frac{3}{2}$. Најзад,

$$\int\frac{x^2+x+1}{x^4-x^2}\,dx=\int\left(-\frac{x+1}{x^2}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)}\right)dx=-\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln(x-1)+\text{const}.$$

14. Сменом $x=t^3$, $dx=3t^2\,dt$ дати интеграл постаје

$$I=\int\frac{3t\,dt}{t^4-t^2+1}=\left|\begin{matrix}y=t^2-\frac12\\ dy=2t\,dt\end{matrix}\right|=\frac32\int\frac{dy}{y^2-\frac34}=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{y\sqrt3}{2}+\text{const}=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{(2\sqrt[3]{x^2}-1)\sqrt3}{4}+\text{const}.$$

15. $I=\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac79\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\text{const}.$

16. $I=\dfrac12x^2-x+\dfrac14\ln(x+1)-\dfrac98\ln(x^2+3)+\dfrac{3\sqrt3}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt3}+\text{const}.$

17. $I=\dfrac{1}{72}\left(\dfrac{3(x+1)(x^2+2x+6)}{(x^2+2x+4)^2}+\sqrt3\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt3}\right)+\text{const}.$

18. $I=\dfrac{1}{4\sqrt3}\ln\dfrac{x^2-x\sqrt3+1}{x^2+x\sqrt3+1}+\dfrac32\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}+\text{const}.$

19. Користимо смену $t=e^{x/2}$. Тада је $dt=\frac12e^{x/2}dx$ и $e^{2x}+4=t^4+4=(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)$, па је $I=2\int\frac{dt}{t^4+4}$. Интегранд је $\frac{1}{t^4+4}=\frac{At+B}{t^2+2t+2}+\frac{Ct+D}{t^2-2t+2}$ за неке константе A,B,C,D, тј.

$$(At+B)(t^2-2t+2)+(Ct+D)(t^2+2t+2)=1.$$

Ако заменимо $t=1+i$, биће $t^2-2t+2=0$, па горња једнакост постаје $(C+D+Ci)(4+4i)=1$, одакле је $C+D+Ci=\frac18-\frac18i$, тј. $C=-\frac18$ и $D=\frac14$. Слично, заменом $t=-1+i$ добићемо $(B-A+Ai)(4-4i)=1$, одакле је $A=\frac18$ и $B=\frac14$. Према томе, $I=\frac14\int\left(\frac{t+2}{t^2+2t+2}-\frac{t-2}{t^2-2t+2}\right)dt$.

Како је $\int\frac{t+2}{t^2+2t+2}\,dt=\left|\begin{matrix}u=t+1\\ du=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{u+1}{u^2+1}\,du=\frac12\ln(u^2+1)+\operatorname{arctg}u+\text{const}=\frac12\ln(t^2+2t+2)+\operatorname{arctg}(t+1)+\text{const}$ и, слично, $\int\frac{t-2}{t^2-2t+2}\,dt=\frac12\ln(t^2-2t+2)-\operatorname{arctg}(t-1)+\text{const}$, коначно добијамо

$$I=\frac18\ln(e^x+2e^{\frac x2}+2)-\frac18\ln(e^x-2e^{\frac x2}+2)+\frac14\operatorname{arctg}(e^{\frac x2}+1)+\frac14\operatorname{arctg}(e^{\frac x2}-1)+\text{const}.$$

20. Смена $t=2^x$, $dt=2^x\ln2\,dx$: тада је $I=\frac{1}{\ln2}\int\frac{dt}{t^2(t-1)}$. Ако запишемо $\frac{1}{t^2(t-1)}=\frac At+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1}$, добићемо $A=B=-1$, $C=1$, па је

$$I=\frac{1}{\ln2}\Big(\ln|t-1|-\ln|t|+\frac1t\Big)+\text{const}=-x+\frac{1}{\ln2}\Big(\ln|2^x-1|+\frac{1}{2^x}\Big)+\text{const}.$$

21. Сменом $t=\operatorname{tg}\frac x2$ дати интеграл постаје

$$I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2\,dt}{3t^2+2t+3}=\left|\begin{matrix}u=t+\frac13\\ du=dt\end{matrix}\right|=\frac23\int\frac{du}{u^2+\frac89}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{3u}{2\sqrt2}+\text{const}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac x2+1}{2\sqrt2}+\text{const}.$$

22. $I=-\dfrac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}(x\sqrt2)-\operatorname{ctg}x+\text{const}.$

23. Како је $\cos x=2\cos^2\frac x2-1=1-2\sin^2\frac x2$, узимајући смену $\left|\begin{matrix}t=\sin\frac x2\\ dt=\frac12\cos\frac x2\,dx\end{matrix}\right|$ добијамо

$$I=2\int\sqrt{1-2t^2}\,dt=\left|\begin{matrix}z=t\sqrt2\\ dz=dt\sqrt2\end{matrix}\right|=\sqrt2\int\sqrt{1-z^2}\,dz=\frac{1}{\sqrt2}\arcsin z+\frac{1}{\sqrt2}z\sqrt{1-z^2}+\text{const}.$$

При томе је $z=\sqrt2\sin\frac x2$, па је $I=\dfrac{1}{\sqrt2}\arcsin\left(\sqrt2\sin\dfrac x2\right)+\sin\dfrac x2\sqrt{\cos x}+\text{const}.$

24. Уводимо Ојлерову смену $t=x+\sqrt{x^2+4}$. Тада је $(t-x)^2=x^2+4$, тј. $x=\frac{t^2-4}{2t}$ и $dx=\frac{t^2+4}{2t^2}dt$, те дати интеграл сређивањем (приметимо да је $t^{-1}=\frac14(\sqrt{x^2+4}-x)$) постаје

$$I=\int\frac{\frac{t^2-4}{2t}\cdot\frac{t^2+4}{2t^2}\,dt}{t}=\int\Big(\frac14-\frac{4}{t^4}\Big)dt=\frac t4+\frac{4}{3t^3}+\text{const}=\frac{(x^2+4)^{3/2}-x^3}{12}+\text{const}.$$

25. Нека је $\sqrt{x^2+x+3}=x+t$. Квадрирањем добијамо $x^2+x+3=x^2+2tx+t^2$, одакле је $2tx-x=3-t^2$, тј. $x=\frac{3-t^2}{2t-1}$. Даље је $\sqrt{x^2+x+3}=\frac{t^2-t+3}{2t-1}$, $dx=\frac{-2(t^2-t+3)dt}{(2t-1)^2}$, и најзад $I=-\int\frac{2(t^2-3)^2dt}{(2t-1)(t^2-t+3)^2}$.

За радознале: $I=\dfrac{6-10x}{11\sqrt{x^2+x+3}}+\ln\left(2x+1+\sqrt{x^2+x+3}\right)+\text{const}.$

26. Смена $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$: тада је $x = \frac{2t^3-1}{1-t^3}$, $dx = \frac{3t^2dt}{(1-t^3)^2}$, $I = \int \frac{3t^3(2t^3-1)}{(1-t^3)^3}dt$.

За радознале: $I = \dfrac{3x-7}{6}\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^2} - \dfrac{5}{6}\ln\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+1}\right) + \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}+1}{\sqrt{3}} + \text{const}.$

27. Запишимо дати интеграл као $I = \int x\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}\,dx$ и означимо $1-\frac{1}{x} = t^5$. Тада је $x = \frac{1}{1-t^5}$ и $dx = \frac{5t^4dt}{(1-t^5)^2}$, па је $I = 5\displaystyle\int \frac{t^5dt}{(1-t^5)^3}$.

28. Наместићемо парцијалну интеграцију. Ако узмемо $v = \frac{-1}{x\sin x+\cos x}$, биће $dv = \frac{x\cos x\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$, што нам намеће $u = \frac{x}{\cos x}$ и $du = \frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\,dx$. Сада је

$$I = uv - \int v\,du = \frac{-x/\cos x}{x\sin x+\cos x} + \int\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{-x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \operatorname{tg} x + \text{const} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x} + \text{const}.$$

29. Смена $\left|\begin{smallmatrix} x=1/y \\ dx=-dy/y^2\end{smallmatrix}\right|$ даје

$$I = -\int\frac{dy}{y\sqrt[4]{y^4+1}} = -\int\frac{y^3dy}{y^4\sqrt[4]{y^4+1}} = \left|\begin{smallmatrix} t=y^4+1 \\ dt=4y^3dy\end{smallmatrix}\right| = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)\sqrt[4]{t}} = \left|\begin{smallmatrix} t=z^4 \\ dt=4z^3dz\end{smallmatrix}\right| = -\int\frac{z^2dz}{z^4-1}, \quad z = \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}.$$

Како је $\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{1/4}{z-1} - \frac{1/4}{z+1} + \frac{1/2}{z^2+1}$, добијамо

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \text{const} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-x}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} + \text{const}.$$

30. Користимо двапут парцијалну интеграцију:

$$I = \left|\begin{smallmatrix} u=\arcsin x & du=dx/\sqrt{1-x^2} \\ v=x(\ln x-1) & dv=\ln x\,dx\end{smallmatrix}\right| = x(\ln x-1)\arcsin x - \int(\ln x-1)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int(\ln x-1)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{smallmatrix} u=\ln x-1 & du=dx/x \\ v=-\sqrt{1-x^2} & dv=xdx/\sqrt{1-x^2}\end{smallmatrix}\right| = -(\ln x-1)\sqrt{1-x^2} + \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \left|\begin{smallmatrix} y^2=1-x^2 \\ ydy=-xdx\end{smallmatrix}\right| = \int\frac{-y^2\,dy}{1-y^2} = y + \frac{1}{2}\ln\frac{1-y}{1+y} = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const}.$$

Све у свему, $I = x(\ln x-1)\arcsin x + (\ln x-2)\sqrt{1-x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const}.$

31. Применићемо парцијалну интеграцију $\left|\begin{smallmatrix} u=\ln(x-1)\ln(x+1) & du=\left(\frac{\ln(x-1)}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x-1}\right)dx \\ v=\frac{x^2-1}{2} & dv=x\,dx\end{smallmatrix}\right|$:

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\big((x-1)\ln(x-1) + (x+1)\ln(x+1)\big)\,dx,$$

где је, опет парцијалном интеграцијом,

$$\int(x+1)\ln(x+1)\,dx = \left|\begin{smallmatrix} u=\ln(x+1) & du=\frac{dx}{x+1} \\ v=\frac{(x+1)^2}{2} & dv=(x+1)dx\end{smallmatrix}\right| = \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} + \text{const}$$

и, слично, $\int(x-1)\ln(x-1)\,dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4} + \text{const}$. Све у свему,

$$I = \frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)\ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4}\ln(x+1) - \frac{(x-1)^2}{4}\ln(x-1) + \frac{x^2}{4} + \text{const}.$$

32. $I = -\frac{1}{8}\ln\big((x^6+15x^4-80x^3+27x^2-528x+781)\sqrt{x^4+10x^2-96x-71} - (x^8+20x^6-128x^5+54x^4 -1408x^3+3124x^2+10001)\big) + \text{const}\ldots$ Мало сам се шалио. Решење је тачно, али немам појма како бисте га наболи.