

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, I grupa

1. Koristeći Weierstreissov kriterijum uniformne konvergenije pokazati da je funkcionalni red

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + \cos^2 kx}{1 + k^2},$$

uniformno konvergentan za $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Kako je

$$\left| \frac{1 + \cos^2 kx}{1 + k^2} \right| \leq \frac{1 + |\cos^2 kx|}{1 + k^2} \leq \frac{2}{1 + k^2},$$

iz konvergenije brojnog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + k^2}$$

sledi uniformna konvergenija funkcionalnog reda.

Kako je

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 2,$$

zaključujemo da je brojni red konvergentan, pa je funkcionalni red uniformno konvergentan

2. Ispitati konvergenciju iterativnog procesa

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & .4 \\ .4 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

U slučaju da je proces konvergentan, oceniti povećanje broja značajnih cifara u iteraciji.

Rešenje. Metod ima formu

$$x_{k+1} = Bx_k + b, \quad B = \begin{bmatrix} .5 & .4 \\ .4 & .5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}.$$

Norma $\|\cdot\|_{+\infty}$ ima vrednost

$$\|B\|_{+\infty} = \max\{.5 + .4, .4 + .5\} = .9.$$

Kako je $\|B\|_{+\infty} = .9 < 1$, zaključujemo da je iterativni proces konvergentan.

Niz vektora x_k , $k \in \mathbb{N}_0$, je konvergentan i konvergira ka vektoru recimo x . Onda je $x = Bx + b$. Dobijamo

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x &= Bx_k + b - Bx - b = B(x_k - x), \Rightarrow \|x_{k+1} - x\|_{+\infty} \leq \|B\|_{+\infty} \|x_k - x\|_{+\infty}, \\ \Rightarrow r_{k+1} &= \frac{\|x_{k+1} - x\|_{+\infty}}{\|x_k - x\|_{+\infty}} \leq \|B\|_{+\infty} \frac{\|x_k - x\|_{+\infty}}{\|x_k - x\|_{+\infty}} = \|B\|_{+\infty} r_k. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da važi

$$z_{k+1} = -\log_{10} r_{k+1} \geq -\log_{10} \|B\|_{+\infty} - \log_{10} r_k = -\log_{10} \|B\|_{+\infty} + z_k.$$

Dakle važi

$$z_{k+1} - z_k \geq -\log_{10} \|B\|_{+\infty} \approx .046$$

Ako pretpostavimo da x_0 ima jednu značajnu cifru, 16 značajnih cifara, preciznost formata `double`, se postiže u

$$\frac{16 - 1}{.046} \approx 326$$

iteracija.

3. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.0	1.2	2.2	3.1
$f(x_k)$	2.3	2.1	1.4	1.8

Određiti približno vrednost $f(1.5)$.

Rešenje. Potrebno je prvo konstruisati Lagrangeov bazis. Nalazimo

$$\ell_0(x) = \frac{(x - 1.2)(x - 2.2)(x - 3.1)}{(1.0 - 1.2)(1.0 - 2.2)(1.0 - 3.1)} \approx -1.98413(x - 1.2)(x - 2.2)(x - 3.1),$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - 1.0)(x - 2.2)(x - 3.1)}{(1.2 - 1.0)(1.2 - 2.2)(1.2 - 3.1)} \approx 2.63158(x - 1.0)(x - 2.2)(x - 3.1),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - 1.0)(x - 1.2)(x - 3.1)}{(2.2 - 1.0)(2.2 - 1.2)(2.2 - 3.1)} \approx -.925926(x - 1.0)(x - 2.2)(x - 3.1),$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x - 1.0)(x - 1.2)(x - 3.1)}{(2.2 - 1.0)(2.2 - 1.2)(2.2 - 3.1)} \approx .278474(x - 1.0)(x - 2.2)(x - 3.1).$$

Lagrangeov interpolacioni polinom je

$$P_4(x) = \ell_0(x)f(x_0) + \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \ell_3(x)f(x_3).$$

Vrednost Lagrangeovog interpolacionog polinoma u tački 1.5 iznosi

$$P_4(1.5) = 2.3\ell_0(1.5) + 2.1\ell_1(1.5) + 1.4\ell_2(1.5) + 1.8\ell_3(1.5) \approx 1.82$$

4.a Koristeći metod proste iteracije rešiti jednačinu $x = e^{-x}$, sa tačnošću od dve značajne cifre.

Rešenje. Ako nacrtamo funkcije $y = x$ i $y = e^{-x}$, možemo približno oceniti da se rešenje nalazi u intervalu $[0, 1]$. Ako izaberemo $\phi(x) = e^{-x}$, jednostavno zaključujemo da važi $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, jer je e^{-x} opadajuća funkcija i važi $e^{-0} = 1$ i $e^{-1} \approx .37$. Takodje, važi $\phi(.2) = e^{-.2} \approx .8187$

i $\phi(1) \approx .37$, što znači da se interval $[0.2, 1]$ slika u interval $[\phi(1), 1] \subset [0.2, 1]$. Dalje je

$$|\phi'(x)| = e^{-x} \leq e^{-.2} \approx .8187 < 1.$$

Zaključujemo da metod proste iteracije

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k \in \mathbb{N}_0,$$

konverira ako izaberemo $x_0 \in [0.2, 1]$.

Prvih osam iteracija je prikazano u tabeli 1. pa zaključujemo da je rešenje

k	x_k
0	.5
1	.606530659712633
2	.545239211892605
3	.579703094878068
4	.560064627938902
5	.571172148977215
6	.564862946980323
7	.568438047570066
8	.566409452746921

Table 1: Metod proste iteracije za rešenje jednačine $x = e^{-x}$.

sa dve značajne cifre dato sa

$$x \approx .57$$

- 4.b Koristeći Newtonov metod rešiti jednačinu $x = e^{-x}$, sa tačnošću od pet značajnih cifara.

Rešenje. Ako nacrtamo funkcije $y = x$ i $y = e^{-x}$ nalazimo da je rešenje približno u intervalu $[0, 1]$. Newtonov iterativni proces izgleda ovako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + e^{-x_k}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kako je rešenje na intervalu $[0, 1]$ jedinstveno u slučaju konvergencije, niz $x_k, k \in \mathbb{N}_0$ konvergira ka rešenju. Izaberemo li $x_0 = .5$ dobijamo rezultate kao u tabeli 1. Odakle zaključujemo da je rešenje sa 5 značajnih cifara dato sa

$$x \approx .56714$$

5. Koristeći Eulerov metod, sa korakom $h = .5$ naći približno vrednost $y(2.5)$, ako je y rešenje Cauchyevog problema

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

k	x_k
0	.5
1	.566311003197218
2	.567143165034862
3	.567143290409781
4	.567143290409784

Table 2: Newtonov metod za rešenje jednačine $x = e^{-x}$.

Koristeći tačno rešenje odrediti apsolutnu i relativnu grešku aproksimacije.

Rešenje. Jednostavno nalazimo da važi

$$y_{k+1} = y_k + hy_k = (1 + h)y_k = (1 + h)^{k+1}y_0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Oдавde nalazimo rezultate prikazane u tabeli 3. Vidimo da važi

k	x_k	y_k
0	0	1.
1	.5	1.5
2	1.0	2.25
3	1.5	3.375
4	2.0	5.0625
5	2.5	7.59375

Table 3: Eulerov metod

$$y(2.5) \approx y_5 = 7.59375.$$

Egzaktno rešenje je $y = e^x$. Odakle nalazimo

$$\Delta = |e^{2.5} - y_5| \approx 4.59 \quad r = \frac{\Delta}{e^{2.5}} \approx .38$$

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, II grupa

1. Koristeći Weierstreissov kriterijum uniformne konvergenije pokazati da je funkcionalni red

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + \sin^2 kx}{1 + k^2},$$

uniformno konvergentan za $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje Kako je

$$\left| \frac{1 + \sin^2 kx}{1 + k^2} \right| \leq \frac{1 + |\sin^2 kx|}{1 + k^2} \leq \frac{2}{1 + k^2},$$

iz konvergenije brojnog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + k^2}$$

sledi uniformna konvergenija funkcionalnog reda.

Kako je

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 2,$$

zaključujemo da je brojni red konvergentan, pa je funkcionalni red uniformno konvergentan

2. Ispitati konvergenciju iterativnog procesa

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .4 & .5 \\ .5 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

U slučaju da je proces konvergentan, oceniti povećanje broja značajnih cifara u iteraciji.

Rešenje. Metod ima formu

$$x_{k+1} = Bx_k + b, \quad B = \begin{bmatrix} .4 & .5 \\ .5 & .4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}.$$

Norma $\|\cdot\|_{+\infty}$ ima vrednost

$$\|B\|_{+\infty} = \max\{.4 + .5, .5 + .4\} = .9.$$

Kako je $\|B\|_{+\infty} = .9 < 1$, zaključujemo da je iterativni proces konvergentan.

Niz vektora x_k , $k \in \mathbb{N}_0$, je konvergentan i konvergira ka vektoru recimo x . Onda je $x = Bx + b$. Dobijamo

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x &= Bx_k + b - Bx - b = B(x_k - x), \Rightarrow \|x_{k+1} - x\|_{+\infty} \leq \|B\|_{+\infty} \|x_k - x\|_{+\infty}, \\ \Rightarrow r_{k+1} &= \frac{\|x_{k+1} - x\|_{+\infty}}{\|x\|_{+\infty}} \leq \|B\|_{+\infty} \frac{\|x_k - x\|_{+\infty}}{\|x\|_{+\infty}} = \|B\|_{+\infty} r_k. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da važi

$$z_{k+1} = -\log_{10} r_{k+1} \geq -\log_{10} \|B\|_{+\infty} - \log_{10} r_k = -\log_{10} \|B\|_{+\infty} + z_k.$$

Dakle važi

$$z_{k+1} - z_k \geq -\log_{10} \|B\|_{+\infty} \approx .046$$

Ako pretpostavimo da x_0 ima jednu značajnu cifru, 16 značajnih cifara, preciznost formata `double`, se postiže u

$$\frac{16 - 1}{.046} \approx 326$$

iteracija.

3. Naći Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.1	1.3	2.1	3.4
$f(x_k)$	2.3	2.1	1.4	1.8

Određiti približno vrednost $f(1.5)$.

Rešenje. Nalazimo

k	x_k	$[x_k; f]$	$[x_k, x_{k+1}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}; f]$
0	1.1	<u>2.3</u>	$\frac{2.1 - 2.3}{1.3 - 1.1} = \underline{-1.}$	$\frac{-.875 - (-1.)}{2.1 - 1.1} = \underline{.125}$	$\frac{.59134 - .125}{3.4 - 1.1} = \underline{.19052}$
1	1.3	2.1	$\frac{1.4 - 2.1}{2.1 - 1.3} = \underline{-.875}$	$\frac{.30769 - (-.875)}{3.4 - 1.3} = \underline{.56319}$	
2	2.1	1.4	$\frac{1.8 - 1.4}{3.4 - 2.1} = \underline{.30769}$		
3	3.4	1.8			

Odavde dobijamo

$$P_3(x) = 2.3 + (-1.)(x - 1.1) + .125(x - 1.1)(x - 1.3) + .19052(x - 1.1)(x - 1.3)(x - 2.1)$$

pa je

$$P_3(1.05) = 1.90086$$

- 4.a Koristeći metod proste iteracije rešiti jednačinu $x = \cos x$, sa tačnošću od dve značajne cifre.

Rešenje. Jednostavno nalazimo da se rešenje nalazi u intervalu $[0, \pi/2]$. Ako izaberemo $\phi(x) = \cos x$. Onda važi $\phi : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$. Kako je

funkcija ϕ opadajuća na intervalu $[0, \pi/2]$, jednostavno zaključujemo i da važi $\phi : [0, 1] \rightarrow [\cos 1, \cos 0] = [.54, 1] \subset [0, 1]$. Znači da možemo izabrati interval $[0, 1]$. Takodje je

$$|\phi'(x)| = |\sin(x)| \leq \sin 1 \approx .84 < 1.$$

Znači da je metod proste iteracije konvergentan. Ako izaberemo $x_0 = .5$ dobijamo rezultate kao u tabli 4. Odavde možemo zaključiti da je rešenje

k	x_k
0	.5
1	.877582561890373
2	.639012494165259
3	.802685100682335
4	.694778026788006
5	.768195831282016
6	.719165445942419
7	.752355759421527
8	.730081063137823
9	.745120341351440
10	.735006309014843
11	.741826522643246

Table 4: Metod proste iteracije za rešenje jednačine $x = \cos x$.

sa dve značajne cifre zadato sa

$$x \approx .74$$

- 4.b Koristeći Newtonov metod rešiti jednačinu $x = \cos x$, sa tačnošću od pet značajnih cifara.

Rešenje. Ako nacrtamo funkcije $y = x$ i $y = \cos x$ nalazimo da je rešenje približno u intervalu $[0, 1]$. Newtonov iterativni proces izgleda ovako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kako je rešenje na intervalu $[0, 1]$ jedinstveno u slučaju konvergencije, niz $x_k, k \in \mathbb{N}_0$ konvergira ka rešenju. Izaberemo li $x_0 = .5$ dobijamo rezultate kao u tabeli 5.

Odakle zaključujemo da je rešenje sa 5 značajnih cifara dato sa

$$x \approx .73909$$

5. Koristeći Eulerov metod, sa korakom $h = .5$ naći približno vrednost $y(2.5)$, ako je y rešenje Cauchyevog problema

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

k	x_k
0	.5
1	.755222417105636
2	.739141666149879
3	.739085133920807
4	.739085133215161

Table 5: Newtonov metod za rešenje jednačine $x = \cos x$.

Koristeći tačno rešenje odrediti apsolutnu i relativnu grešku aproksimacije.

Rešenje. Jednostavno nalazimo da važi

$$y_{k+1} = y_k - hy_k = (1 - h)y_k = (1 - h)^{k+1}y_0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Oдавde nalazimo rezultate prikazane u tabeli 3. Vidimo da važi

k	x_k	y_k
0	0	1.
1	.5	.5
2	1.0	.25
3	1.5	.125
4	2.0	.0625
5	2.5	.03125

Table 6: Eulerov metod

$$y(2.5) \approx y_5 = .03125.$$

Egzaktno rešenje je $y = e^{-x}$. Odakle nalazimo

$$\Delta = |e^{-2.5} - y_5| \approx .051 \quad r = \frac{\Delta}{e^{-2.5}} \approx .62$$