rmutavdzic@mas.bg.ac.rs

Математика 2 - вежбање за испит

1. Израчунати $I_1 = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Израчунати $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-\sqrt{x})}$.
3. Израчунати $I_3 = \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2} \cos x\,\mathrm{d}x$.
4. Израчунати $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
5. Наћи први диференцијал фукнције $u(x,y,z) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
6. Површ $z = z(x,y)$ је дата имплицитно функцијом $F(x,y,z) = 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8 = 0$. Наћи једначину тангентне равни на површ z у тачки $M(2,2,1)$.
7. Наћи локалне екстремне вредности функције $f(x,y) = (y^2-x^2)e^{2x+y}$.
8. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = \frac{x}{x^2+y^2}$.
9. Наћи опште решење диференцијалне једначине $2x\sqrt{y^2-x^2}dx - (1+2y\sqrt{y^2-x^2})dy = 0$.
10. Одредити изогоналну трајекторију под углом $\alpha = 45^\circ$ за фамилију кривих $y = C/x$ која пролази кроз тачку $(1,3)$.

Решења.

1. $$I_1 = \int \frac{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)}{a^4\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{x}{a} = t \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \Rightarrow A = C = 0,\ B = D = \frac{1}{2},$$

$$I_1 = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) + C = -\frac{1}{a}\frac{t}{t^2-1} + C = -\frac{x}{x^2-a^2} + C.$$

2. $$I_2 = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2-t)} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t-1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg} t + C = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

3. $$I_3 = \int_0^{\pi/4} (1-2\sin^2 x)^{3/2}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^{3/2}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2u + \frac{1+\cos 4u}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

4. Полазећи од интеграла

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^n, & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^b\right) + nI_{n-1} = nI_{n-1},$$

при чему је $I_0 = 1$, добијамо да је $I_n = n!$. Дакле, $I_{10} = 10!$.

5. $u'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}\right) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}}\dfrac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}$,

$u'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right) = \dfrac{-xy}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}$,

$u'_z = \dfrac{-xz}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}$ (по симетрији).

Први диференцијал је

$$\mathrm{d}u = \frac{(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}z}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

6. Нормала на површ у тачки M је $\vec{n} = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$. Потребни парцијални изводи су

$$F'_x = 2^{x/z}\ln 2\cdot\frac{1}{z},\quad F'_y = 2^{y/z}\ln 2\cdot\frac{1}{z}\quad \text{и}\quad F'_z = 2^{x/z}\ln 2\left(-\frac{x}{z^2}\right) + 2^{y/z}\ln 2\left(-\frac{y}{z^2}\right),$$

па је $\vec{n} = 4\ln 2(1,1,-4)$ и можемо узети да је вектор нормале на раван $(1,1,-4)$. Једначина тражене равни је $x-2+y-2-4(z-1)=0$, тј. $x+y-4z=0$.

7. Парцијални изводи су

$$f'_x = (-2x+2y^2-2x^2)e^{2x+y},\qquad f'_y = (2y+y^2-x^2)e^{2x+y},$$
$$f''_{xx} = -2(2x^2-2y^2+4x+1)e^{2x+y},\quad f''_{xy} = 2(-x^2+y^2-x+2y)e^{2x+y},\quad f''_{yy} = (-x^2+y^2+4y+2)e^{2x+y}.$$

Решавањем система $f'_x = f'_y = 0$ добијамо стационарне тачке $M_1(0,0)$ и $M_2(-\frac{4}{3},\frac{2}{3})$. У тачки M_1 је $A = f''_{xx} = -2$, $B = f''_{xy} = 0$, $C = f''_{yy} = 2$ и $\Delta = B^2-4AC = 4$, па тачка M_1 није тачка локалне екстремне вредности; у тачки M_2 је $A = \frac{10}{3e^2}$, $B = \frac{8}{3e^2}$, $C = \frac{10}{3e^2}$ и $\Delta = -\frac{4}{e^4}$, па је тачка M_2 локални минимум функције, $z_{\min} = -\frac{4}{3e^2}$.

8. Дата једначина је еквивалентна једначини $x' = \frac{x^2+y^2}{x}$, тј. $x'-x = \frac{y^2}{x}$, што је Бернулијева једначина, $x = x(y)$. Множењем те једначине са x и увођењем смене $x^2 = z$, $2xx' = z'$ сводимо је на линеарну једначину $z'-2z = 2y^2$. Опште решење је

$$z = e^{\int 2\,\mathrm{d}y}\left(C + \int 2y^2 e^{-\int 2\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = e^{2y}\left(C + \int 2y^2e^{-2y}\,\mathrm{d}y\right),$$

$$\begin{aligned}\int 2y^2e^{-2y}\,\mathrm{d}y &= \begin{bmatrix} u = 2y^2, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 4y\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} = -y^2e^{-2y} + \int 2ye^{-2y}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} u = 2y, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} \\ &= -y^2e^{-2y} - ye^{-2y} - e^{-2y}/2 + C.\end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2}\left(2y^2+2y+1\right).$$

9. Нека је $M = 2x\sqrt{y^2-x^2}$ и $N = -1-2y\sqrt{y^2-x^2}$. Како је $M'_y = N'_x = \frac{2xy}{\sqrt{y^2-x^2}}$, дата једначина је са тоталним диференцијалом. Опште решење је

$$u = \int 2x\sqrt{y^2-x^2}\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y),$$

где је $u'_y = N$, тј. $-1-2y\sqrt{y^2-x^2} = -2y\sqrt{y^2-x^2} + \varphi'(y)$. Дакле, $\varphi'(y) = -1$ и $\varphi(y) = -y + C$, па је опште решење

$$u = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - y + C.$$

10. Диференцијалну једначину дате фамилије добијамо диференцирајући једначину $xy = C$: $y + xy' = 0$. Диференцијална једначина изогоналних трајеторија које секу дату фамилију под углом 45° добијамо заменом y' са $\frac{y'-\operatorname{tg}45^\circ}{1+y'\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{y'-1}{y'+1}$:

$$y + x\frac{y'-1}{y'+1} = 0,\quad \text{тј.}\quad y' = \frac{y-x}{y+x},$$

што је хомогена диференцијална једначина. Решавамо је сменом $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$ и добијамо једначину са раздвојеним промењивим

$$\frac{z+1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \text{чије је опште решње}\quad \ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\ln x + C.$$

Ако заменимо $(x,y) = (1,3)$ у претходну једначину добијамо $C = \ln\sqrt{10} + \operatorname{arctg}3$ - па се тражена изогонална трајекторија добија за ту вредности константе C из општег решења.