Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

# Математика 3 - јулски рок

27.6.2021. – група А

Душан Ђукић

1. Наћи опште решење система диференцијалних једначину $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=-2x \end{cases}$, где су $x=x(t)$, $y=y(t)$.
2. Наћи извод скаларног поља $U(x,y,z)=\frac{x}{y-z}$ у тачки $P(2,1,0)$ у правцу његовог градијента у тој тачки.
3. Израчунати интеграл $\int_\gamma x(dx+dy+dz)$, где је крива $\gamma$ дата условима $(x,y,z)=(\sin t,\cos t,\sin^2 t)$ за $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
4. Израчунати $\iiint_V e^{-x-2y-z}dxdydz$, где је $V$ први октант простора (тј. $x,y,z\geqslant 0$).
5. Израчунати интеграл $\iint_\Pi z\,d\Pi$, где је $\Pi$ део равни $z=x+y+1$ дат условима $1\leqslant x,y\leqslant 2$.
6. Функција $y(x)$ задовољава диференцијалну једначину $yy''=-2$ на целом интервалу $[0,+\infty)$. Ако је $y(0)=1$, колико најмање може да буде $y'(0)$?

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

# Математика 3 - јулски рок

27.6.2021. – група Б

Душан Ђукић

1. Наћи опште решење система диференцијалних једначину $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=2x \end{cases}$, где су $x=x(t)$, $y=y(t)$.
2. Наћи извод скаларног поља $U(x,y,z)=\frac{z}{y-x}$ у тачки $P(0,1,2)$ у правцу његовог градијента у тој тачки.
3. Израчунати интеграл $\int_\gamma y(dx+dy+dz)$, где је крива $\gamma$ дата условима $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,\sin^2 t)$ за $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
4. Израчунати $\iiint_V e^{-3x-y-z}dxdydz$, где је $V$ први октант простора (тј. $x,y,z\geqslant 0$).
5. Израчунати интеграл $\iint_\Pi z\,d\Pi$, где је $\Pi$ део равни $z=x+y-1$ дат условима $2\leqslant x,y\leqslant 3$.
6. Функција $y(x)$ задовољава диференцијалну једначину $yy''=-3$ на целом интервалу $[0,+\infty)$. Ако је $y(0)=1$, колико најмање може да буде $y'(0)$?

## Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. *Група Б.* Из прве једначине је $y=x'-x$ и $y'=x''-x'$, што заменом у другу једначину даје $x''-x'-2x=0$. Кара-полином је $\lambda^2-\lambda-2$, а његове нуле $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-1$, па је $x=Ae^{2t}+Be^{-t}$ и $y=x'-x=Ae^{2t}-2Be^{-t}$.
2. *Група А.* Градијент поља $U$ је $(\frac{1}{y-z},\frac{-x}{(y-z)^2},\frac{x}{(y-z)^2})$. У тачки $P$ је $\operatorname{grad}U(P)=(1,-2,2)$. Извод у смеру вектора $\vec{v}$ у тачки $P$ је $\frac{\partial U}{\partial\vec{v}}(P)=\operatorname{grad}U(P)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Ако је $v=\operatorname{grad}U(P)$, добијамо $\frac{\partial U}{\partial\vec{v}}(P)=|\operatorname{grad}U(P)|=3$.
3. *Група Б.* Како је $dx=-\sin t\,dt$, $dy=\cos t$ и $dz=2\sin t\cos t\,dt$, тражени интеграл је $I=\int_0^{2\pi}\sin t(-\sin t+\cos t+2\sin t\cos t)=-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt+2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=-\pi+0+2\cdot 0=-\pi$.
4. *Група А.* Тражени интеграл је $I=\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty e^{-2y}dy\int_0^\infty e^{-z}dz$. Како је $\int_0^\infty e^{-at}dt=-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{a}e^{-at}|_{t=0}^r=\frac{1}{a}$ за свако $a>0$, следи да је $I=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.
5. *Група Б.* Како је $d\Pi=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$, тражени интеграл је $I=\iint_D(x+y-1)\sqrt{3}\,dxdy$, где је $D$ област $2\leqslant x,y\leqslant 3$. Дакле, $I=\sqrt{3}\int_2^3dx\int_2^3(x+y-1)dy=\sqrt{3}\int_2^3(x+\frac{5}{2}-1)dx=4\sqrt{3}$.
6. *Група А.* Увођењем смене $y'=z(y)$ и $y''=zz'$ добијамо једначину $zz'=-\frac{2}{y}$, тј. $zdz=-\frac{2dy}{y}$ и одатле $y'=z=\pm\sqrt{A-4\ln y}$ за неку константу $A\geqslant 0$. Доказаћемо да је $y(x)=0$ за неко $x$. То ће значити да $y''$ није свуда дефинисано, те функција $y$ из задатка у ствари не постоји, ма колико било $y'(0)=\sqrt{A}$.

   Због дефинисаности $y'$ мора да важи $y\leqslant e^{A/4}$ на целом интервалу, па је свуда $y''=-\frac{2}{y}\leqslant -2e^{-A/4}$. То даље значи да је $y'(x)=y'(0)+\int_0^x y''(t)dt\leqslant\sqrt{A}-2xe^{-A/4}$, а одатле и $y(x)=y(0)+\int_0^x y'(t)dt\leqslant y(0)+\int_0^x(\sqrt{A}-2te^{-A/4})dt=1+\sqrt{A}x-e^{-A/4}x^2$. Следи да је $y<0$ за довољно велико $x$, па за неко $x>0$ важи и $y=0$.