Математика 3 - писмени део испита 27.6.2015.

Група 1 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' + y' - 2y = e^{2x}\sin(3x).$$

Решење. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Решења карактеристичне једначине су $k_1 = -2$ и $k_2 = 1$, одакле добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = e^{-2x}$ и $y_2 = e^x$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо методом неодређених коефицијената. Како се њена десна страна може написати у облику

$$e^{2x}\sin(3x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)\right]$$

за $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $P_m(x) = 0$, $Q_l(x) = 1$, и како $\alpha + \beta i = 2 + 3i$ није решење карактеристичне једначине, то партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

где је $k = \max\{m, l\} = 0$. На основу претходног следи

$$y_p = e^{2x}\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right],$$

где су A и B непознате вредности које треба одредити. Лако добијамо

$$y_p' = e^{2x}\left[(2A + 3B)\cos(3x) + (2B - 3A)\sin(3x)\right],$$

$$y_p'' = e^{2x}\left[(-5A+12B)\cos(3x) + (-12A-5B)\sin(3x)\right],$$

а након уврштавања y_p, y_p' и y_p'' у полазну једначину добијамо

$$(-5A+15B)\cos(3x) + (-15A-5B)\sin(3x) = \sin(3x).$$

Претходну једначину задовољавају константе A и B које су решења система

$$-5A+15B=0, \qquad -15A-5B=1,$$

а та решења су

$$A = -\frac{3}{50}, \qquad B = -\frac{1}{50},$$

па је

$$y_p = -\frac{1}{50}e^{2x}\left[3\cos(3x)+\sin(3x)\right].$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_p,$$

односно

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} - \frac{1}{50}e^{2x}\left[3\cos(3x)+\sin(3x)\right].$$

2. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторског поља:

$$\vec{A} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}.$$

<u>Решење</u>. Дивергенција је

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= \nabla \circ \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (y^2, -x^2, x^2+y^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}y^2 + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) = 0+0+0 = 0,
\end{aligned}$$

док је ротор

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-x^2) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial z} y^2 \right) \vec{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^2) - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) \vec{k} \\
&= 2y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + (-2x-2y)\,\vec{k} = 2\left[y\vec{i} - x\vec{j} - (x+y)\vec{k} \right].
\end{aligned}
$$

Векторске линије поља $\vec{A}$ одређујемо из одговарајућег система диференцијалних једначина у симетричном облику

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Из једнакости

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-x^2}$$

имамо

$$x^2 dx = -y^2 dy,$$

одакле након интеграције добијамо

$$c_1 = x^3 + y^3.$$

На основу правила продужених пропорција важи и

$$\frac{dx - dy}{y^2 - (-x^2)} = \frac{dz}{x^2+y^2},$$

одакле је

$$dx - dy - dz = 0,$$

па након интеграције добијамо

$$c_2 = x - y - z.$$

3. Израчунати површину оног дела површи $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ који исеца површ $x^2 + z^2 + z = 0$.
Решење. Тражену површину рачунамо по формули

$$P = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz.$$

Овде је са G означена област која представља унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека сфере $x^2+y^2+z^2 = 4$ и цилиндра $y^2 + z^2 + z = 0$ на Oxz раван и важи

$$G: \ x^2 + z^2 \leq -z.$$

Из једначине сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ је

$$y = \pm\sqrt{4 - (x^2 + z^2)}. \tag{1}$$

Цилиндар на сфери исеца два дела једнаких површина (једном одговара знак "+", другом знак "−"), па можемо изабрати део коме одговара знак "+"и површину коју тако добијамо помножити са 2. Из (1) следи $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - (x^2 + z^2)}}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{z}{\sqrt{4 - (x^2 + z^2)}}$, па даље имамо

$$P = 2\iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - (x^2 + z^2)} + \frac{z^2}{4 - (x^2 + z^2)}} dxdz = 4\iint\limits_G \frac{dxdz}{\sqrt{4 - (x^2 + z^2)}}.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho\cos\varphi, \ z = \rho\sin\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D: \ \rho^2 \leq -\rho\sin\varphi,$$

одакле добијамо $\rho \leq -\sin\varphi$, односно $\rho \,\big|_0^{-\sin\varphi}$. Како је $\rho \geq 0$ мора бити и $-\sin\varphi \geq 0$, па је $\varphi \,\big|_\pi^{2\pi}$. Јакобијан је $J = \rho$. Даље је

$$\begin{aligned}
P &= 4\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}} \cdot \rho d\varphi d\rho = 4\int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^{-\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена } 4-\rho^2 = t^2 \\ \rho d\rho = -tdt \end{array} \right\} = 4\int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_2^{\sqrt{4-\sin^2\varphi}} (-1)dt \\
&= 4\int_\pi^{2\pi} \left(2 - \sqrt{4-\sin^2\varphi}\right) d\varphi = 4\left(2\int_\pi^{2\pi} d\varphi - \int_\pi^{2\pi} \sqrt{4-\sin^2\varphi} d\varphi\right) \\
&= 4 \cdot 2(2\pi - \pi) - 0 = 8\pi.
\end{aligned}$$

4. Израчунати површински интеграл:

$$\iint\limits_\Gamma xdydz + \frac{y^3}{3}dzdx + zx^2dxdy,$$

где je Γ површ омеђена површима $z = x^2 + y^2$ и $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.
Решење. Важи

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_\Gamma xdydz + \frac{y^3}{3}dzdx + zx^2dxdy = \left\{ \begin{array}{c} \text{формула} \\ \text{Гаус-Остроградског} \end{array} \right\} \\
&= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y^3}{3} + \frac{\partial}{\partial z}(zx^2)\right) dxdydz \\
&= \iiint\limits_T (1 + y^2 + x^2) dxdydz,
\end{aligned}$$

где je T тело омеђено површи Γ, прецизније, омеђено параболоидом $z = x^2 + y^2$ "одоздо"и конусом $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ "одозго". Зато je

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_G (1 + x^2 + y^2) dxdy \int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \\
&= \iint\limits_G (1 + x^2 + y^2) \left[z\right]\Big|_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \iint\limits_G (1 + x^2 + y^2) \left(2 - \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right) dxdy,
\end{aligned}$$

где је G пројекција тела T на Oxy раван. Та пројекција је унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека датог параболоида и конуса. Када $z = x^2 + y^2$ (из једначине параболоида) уврстимо у једначину конуса добијамо једначину $z = 2 - \sqrt{z}$, чије је решење $z = 1$. Стога је

$$G: \; x^2 + y^2 \leq z,$$

односно, када уврстимо $z = 1$,

$$G: \; x^2 + y^2 \leq 1.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D: \; \rho^2 \leq 1,$$

при чему добијамо границе $\rho|_0^1$, $\varphi|_0^{2\pi}$, а јакобијан је $J = \rho$. Даље је

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D (1+\rho^2)(2-\rho-\rho^2) \cdot \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(-\rho^5 - \rho^4 + \rho^3 - \rho^2 + 2\rho\right) d\rho \\ &= [\varphi]|_0^{2\pi} \cdot \left[-\frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^5}{5} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} + 2\frac{\rho^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{33}{60} = \frac{33\pi}{30}. \end{aligned}$$