Математика 3 - домаћи

1. Одредити опште решење ДЈ $\quad y''' = \dfrac{1}{x}$.
$\left(y = \dfrac{x^2}{2}\ln|x| + c_1x^2 + c_2x + c_3\right)$

2. Одредити опште решење ДЈ $\quad xy'' - y' - x = 0$.
$\left(y = \dfrac{x^2}{2}\ln|x| + c_1x^2 + c_2\right)$

3. Одредити опште решење ДЈ $\quad 1 + y'^2 = 2yy''$.
$\left(x = \pm\dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_1y - 1} + c_2\right)$

4. Одредити оно решење ДЈ $\quad xy'' + xy'^2 - y' = 0$ које задовољава услове $y(2) = 2,\ y'(2) = 1$.
$\left(y = \ln\dfrac{x^2}{4} + 2\right)$

5. Одредити опште решење ДЈ $\quad y'' - y'(1 + y') = 0$.
$(y = -\ln|1 - c_1e^x| + c_2)$

6. Одредити опште решење ДЈ $\quad xy'' + 2(x+1)y' + 2y = 0$, ако је једно њено партикуларно решење облика $y_1 = x^p$, $p \in \mathbb{R}$:
(а) снижавањем реда ДЈ;
(б) помоћу Лиувилове формуле.
$\left(y = c_1\dfrac{1}{x} + c_2\dfrac{1}{x}e^{-2x}\right)$

7. Одредити опште решење ДЈ $\quad y'' + y' - 2y = 0$.
$(y = c_1e^x + c_2e^{-2x})$

8. Одредити опште решење ДЈ $\quad y'' + 10y' + 25y = 0$.
$(y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x})$

9. Одредити опште решење ДЈ $\quad y'' - y' + y = 0$.
$\left(y = c_1e^{x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

10. Одредити опште решење ДЈ $\quad y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.
$(y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3x\cos 2x + c_4x\sin 2x)$

11. Одредити опште решење ДЈ $\quad y^{(5)}+2y^{(4)}+4y'''+6y''+3y'=0$.
$\big(y=c_1+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4\cos\sqrt{3}x+c_5\sin\sqrt{3}x\big)$

12. Одредити опште решење ДЈ $\quad y'''+2y''-y'-2y=e^x+x^2$.
$\left(y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+c_3e^x+\frac{1}{6}xe^x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)$

13. Одредити опште решење ДЈ $\quad y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^x}$.
$\left(y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-x}-(e^{-2x}+e^{-3x})\ln(1+e^x)\right)$

14. Одредити опште решење ДЈ $\quad x^3y'''+2xy'-2y=0$.
$(y=x(c_1+c_2\cos(\ln|x|))+c_3\sin(\ln|x|))$

15. Одредити опште решење ДЈ $\quad x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$.
$(y=c_1x+c_2x^2+|x|\ln|x|+|x|^3)$

16. Одредити оно решење система ДЈ

$$\begin{array}{rcrcrcr}\dfrac{dx}{dt} & + & 3x & + & 4y & = & 2t\\ \dfrac{dy}{dt} & - & x & - & y & = & t\end{array}$$

које задовољава услове $x(0)=0, y(0)=0$.

$$\left(\begin{array}{l}x=-2(4t+7)e^{-t}-6t+14\\ y=(4t+9)e^{-t}+5t-9\end{array}\right)$$

17. Одредити опште решење система ДЈ

$$\begin{array}{rcrcrcr}\dfrac{dx}{dt} & = & 2x & + & y & & \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x & + & 3y & - & z\\ \dfrac{dz}{dt} & = & -x & + & 2y & + & 3z\end{array}.$$

$$\left(\begin{array}{l}x=c_1e^{2t}+(c_2\cos t+c_3\sin t)e^{3t}\\ y=((c_2+c_3)\cos t-(c_2-c_3)\sin t)e^{3t}\\ z=c_1e^{2t}+((2c_2-c_3)\cos t+(c_2+2c_3)\sin t)e^{3t}\end{array}\right)$$

18. Одредити опште решење система ДЈ

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{z^3 - 2x^2} = \frac{dz}{2z^3}.$$

$$\left(c_1 = \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{x},\ c_2 = 2x + y - \frac{1}{2}z\right)$$

19. Одредити опште решење система ДЈ

$$\frac{dx}{4y - 3z} = \frac{dy}{4x - 2z} = \frac{dz}{2y - 3x}.$$

$(c_1 = 2x - 3y - 4z,\ c_2 = x^2 - y^2 - z^2)$

20. Одредити опште решење система ДЈ

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

$$\left(c_1 = \frac{x}{y},\ c_2 = xy + z^2\right)$$

21. Израчунати угао између градијената скаларног поља

$$f(x, y, z) = e^{xyz}$$

у тачкама $A(1, 1, 2)$ и $B(2, 1, 1)$.

$$\left(\arccos\frac{8}{9}\right)$$

22. Израчунати извод функције $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$ у тачки $A(-1, 1, 1)$ у правцу вектора $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\left(\frac{7}{3}\right)$$

23. Наћи векторске линије векторског поља

$$\vec{A} = x^3\vec{i} + (y^3 + 2x^2y)\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\left(c_1 = \frac{1}{2x^2} + z,\ c_2 = \frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

24. Одредити дивергенцију и ротор векторског поља

$$\vec{A} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + (3x^2 + 4yz^3)\vec{k}$$

у тачки $M(1, 0, 1)$.
$\Big(\mathrm{div}\vec{A}(M) = 2,\ \mathrm{rot}\vec{A}(M) = 3\vec{i} - 6\vec{j}\Big)$

25. Одредити дивергенцију и ротор векторског поља

$$\vec{A} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times \vec{r},$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја произвољне тачке у простору.
$\Big(\mathrm{div}\vec{A} = 0,\ \mathrm{rot}\vec{A} = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\Big)$

26. Одредити дивергенцију и ротор векторске функције $r\vec{a}$, где је r интензитет вектора положаја $\vec{r}$ произвољне тачке у простору, а $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ константан вектор.
$\left(\mathrm{div}(r\vec{a}) = \dfrac{\vec{r} \circ \vec{a}}{r},\ \mathrm{rot}(r\vec{a}) = \dfrac{\vec{r} \times \vec{a}}{r}\right)$

27. Класификовати векторско поље

$$\vec{A} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z\vec{k},$$

и ако постоји одредити његов потенцијал.
$\left(\text{потенцијално},\ xy^2 + \dfrac{z^2}{2} + c\right)$

28. Израчунати

$$\int_L xye^z ds,$$

где је L одсечак праве између тачака $O(0, 0, 0)$ и $A(1, 1, 1)$.
$\big((e - 2)\sqrt{3}\big)$

29. Израчунати

$$\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2},$$

где је L лук кружне завојнице $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, од тачке $A = (a, 0, 0)$ до тачке $B(a, 0, 2b\pi)$.
$\left(\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}\mathrm{arctg}\dfrac{ab\pi}{a}\right)$

30. Израчунати
$$\int_L y^2 ds,$$
где је L лук криве $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.
$(a^3\pi)$

31. Израчунати
$$\int_L x^2 y dy - xy^2 dx,$$
где је L лук криве $x = \sqrt{\cos t},\ y = \sqrt{\sin t}$, од тачке $A = (1,0)$ до тачке $B(0,1)$.
$\left(\frac{\pi}{4}\right)$

32. Израчунати
$$\int_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy,$$
где је L троугао са теменима $O(0,0),\ A(2,0),\ B(4,2)$, који је позитивно орјентисан.
(16)

33. Израчунати
$$\int_L y dx - x dy,$$
где је L лук циклоиде $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, од тачке $O(0,0)$ до тачке $A(2a\pi, 0)$.
$(6a^2\pi)$

34. Израчунати површину оног дела површи $x^2 + y^2 - x = 0$, који се налази унутар површи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(4)

35. Израчунати рад векторског поља
$$\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$
дуж лука криве $L : y = x^2,\ z = x^3$, од тачке $O(0,0,0)$ до тачке $A(1,1,1)$.
(1)

36. Израчунати
$$\iint_G (x^2+y^2)dxdy,$$
где је G област омеђана троуглом са теменима $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.
$\left(\dfrac{1}{3}\right)$

37. Израчунати
$$\iint_G \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2},$$
где је G област омеђана кружницама $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, и правама $y=x$, $y=2x$.
$\left(\dfrac{3}{128}\right)$

38. Израчунати
$$\iint_G \frac{(x+y)\mathrm{arctg}\frac{2y}{x}}{\sqrt{x^2+4y^2}}dxdy,$$
где је
$$G=\left\{(x,y):\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ x\geq 0\right\}.$$
(1)

39. Израчунати запремину тела омеђаног параболоидом $z=1-x^2-y^2$ и равни $z=0$.
$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

40. Израчунати површину оног дела сфере $x^2+y^2+z^2=4$ коју исеца цилиндар $x^2+y^2-2x=0$.
$(8\pi-16)$

41. Израчунати
$$\iiint_T 2xdxdydz,$$
где је T тело омеђано параболоидом $z=x^2+y^2$ и равнима $x=0$, $y=0$, $z=4$, које се налази у првом октанту.
$\left(\dfrac{128}{15}\right)$

42. Израчунати

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

где је T тело омеђано конусом $z^2 = 4(x^2+y^2)$ и равни $z = 2$.

$\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

43. Израчунати

$$\iiint_T (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

где је

$T = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x^2+y^2+z^2 \leq 16,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x \geq y\right\}.$

$\left(\dfrac{341\pi}{10}\right)$

44. Израчунати запремину тела омеђаног параболоидом $2z - x^2 - y^2 = 0$ и равни $z - y = 0$.

$\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

45. Израчунати

$$\iint_\Gamma (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,dS,$$

где је Γ део конусне површи $z = (x^2+y^2)^{1/2}$ који исеца цилиндар $x^2+y^2-2x = 0$.

$\left(\dfrac{29\pi\sqrt{2}}{8}\right)$

46. Израчунати

$$\iint_\Gamma xy^2dydz + x^2ydzdx + zdxdy,$$

где је Γ спољашња страна затворене површи коју чине делови површи $z = 1 + x^2 + y^2$ и $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$.

$\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

47. Применом Гринове формуле израчунати

$$\int_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$$

где је L троугао са теменима $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.
$\left(-\frac{4}{3}\right)$

48. Израчунати

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y(xy + \log(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy,$$

где је L део круга који се налази у првом квадранту од тачке $A(2,0)$ до тачке $O(0,0)$.
$\left(\frac{\pi}{8}-2\right)$

49. Применом Стоксове формуле израчунати циркулацију векторског поља
$$\vec{A} = 2yz\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j} + (2y+z)\vec{k},$$
дуж линије пресека површи $x^2+z^2 = 2-y$ и $y = 2x$ у позитивном смеру посматрано са позитивног дела y-осе.
(24π)

50. Применом формуле Гаус-Остроградског израчунати проток (флукс) векторског поља

$$\vec{A} = \mathrm{grad}(x^2z^2 + y^2z^2 + z^4),$$

кроз спољашњу страну сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$.
$\left(\frac{16\pi}{3}\right)$