2 Матрице и детерминанте - теорија

2.1 Матрице

Матрица формата $m \times n$ је правоугаона табела бројева са m врста и n колона. Записујемо је у облику

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Елемент a_{ij} се налази у i-тој врсти и j-тој колони дате матрице.

Ако је $m = n$, матрицу зовемо *квадратном.*

Квадратна матрица димензије n је а) дијагонална, б) горње-троугаона или в) доње-троугаона, ако је облика

$$\text{а)} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{б)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \text{в)} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Сабирање матрица

Можемо сабирати матрице истих формата тако што сабирамо елементе на одговарајућим позицијама, тј. ако су дате матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, тада је $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

За матрице A, B, C и нула матрицу O истих формата важи: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + O = O + A = A$, $B + A = A + B$.

Множење матрице бројем

Матрица се множи бројем тако што се сви елементи матрице помноже тим бројем, тј. $\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

За матрице A и B иситх формата и константе α и β важи: $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$, $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$, $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Множење матрица

Матрице A и B се тим редом могу множити, ако је $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$. Тада је $A \cdot B = C_{m\times p}$. Ако је $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$, тада је $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, тј. матрице се множе тако што се за сваку позицију скаларно помноже врста из прве матрице са колоном из друге матрице.

Јединична матрица E или I је квадратна матрица облика

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ако је A произвољна квадратна матрица исте димензије као E, тада је $AE{=}EA{=}A$.

За матрице A, B, C и D одговарајућих формата и константу α важи: $(AB)C = A(BC)$, $(A+D)B = AB + DB$, $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Приметимо да у општем случају множење матрица није комутативно, тј. $AB{\neq}BA$. Штавише, ако је AB дефинисано, онда то не мора бити и BA.

Степеновање матрице

За квадратну матрицу A и број $n \in \mathbb{N}$ матрицу A^n дефинишемо индуктивно: $A^1 = A$, $A^{n+1} = A^n A$.

Пример 2.1. Наћи A^3, ако је $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

Прво рачунамо $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, а затим $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.2 Детерминанте

Детерминанта је број који придружујемо квадратној матрици. Знамо да рачунамо детерминанте до трећег реда:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Нека је дата квадратна матрица $A = [a_{ij}]$ димензије n.

Дефиниција 2.1. (*i*) Минор M_{ij} елемента a_{ij} је детерминанта реда $n-1$ која се добија изостављањем i-те врсте и j-те колоне из матрице A.

(*ii*) Алгебарски кофактор (комплемент) A_{ij} елемента a_{ij} је број $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Важи наредна теорема.

Теорема 2.1. (Лапласов развој детерминанте)

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$ (развој по i-тој врсти);

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ (развој по j-тој колони).

Правила за рад са детерминантама.

1. Ако су у детерминанти D две врсте (колоне) пропорционалне, тада је $D = 0$.
2. Заменом места две врсте (колоне) детерминанта мења знак.
3. Детерминанта се множи бројем α тако што се елементи једне врсте (колоне) помноже са α.
4. Детерминанта се не мења ако елементима једне врсте (колоне) додамо елементе неке друге врсте (колоне) помножене бројем α.
5. Вредност детерминанте горње троугаоне матрице једнака је производу елемената на главној дијагонали.

За детерминанте важе једнакости $\det A = \det A^T$ и $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Пример 2.2. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Означимо i-ту врсту (колону) матрице са V_i (K_i), замену места i-те и j-те врсте са $V_i \leftrightarrow V_j$, множење са k i-те врсте са kV_i и операцију додавања j-те врсте помножене са k i-тој врсти са $V_i + kV_j$. Тада детерминанту можемо израчунати на следећи начин:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{V_4+V_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal[K_3-K_1]{K_2-K_1} - \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

2.3 Инверзна матрица

Дефиниција 2.2. Транспонована матрица матрице A, у ознаци A^T настаје када у матрици A врсте замене места са одговарајућим колонама.

Важи $(AB)^T = B^T A^T$.

Нека је A_{ij} алгебарски кофактор елемента a_{ij} у квадратној матрици A.

Дефиниција 2.3. Адјунгована матрица $\operatorname{adj} A$ матрице A је матрица

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \qquad \text{(транспонована матрица кофактора).}$$

Дефиниција 2.4. Инверзна матрица A^{-1} матрице A (ако постоји) је матрица за коју важи $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Ако инверзна матрица постоји, матрицу зовемо *регуларном.* Иначе је матрица *сингуларна.*

Теорема 2.2. Инверзна матрица постоји ако и само ако детерминанта матрице није нула.

Када инверзна матрица постоји, налазимо је по формули

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Важи $(A^{-1})^{-1} = E$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Матричне једначине облика $AX = B$ и $XA = B$, где су A и B познате матрице, а X непозната матрица, решавамо множењем са A^{-1} са леве, односно са десне стране редом. Тада је решење облика $X = A^{-1}B$, односно $X = BA^{-1}$.

Пример 2.3. Наћи A^{-1}, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(A) = 2, \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{па је} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Ранг матрице

Подматрица матрице A је матрица која настаје изостављањем неких врста или колона из матрице A.

Дефиниција 2.5. Ранг матрице је димензија њене највеће квадратне регуларне подматрице.

Ранг матрице је заправо димензија простора који генеришу њене колоне. То одговара максималном броју њених линеарно независних колона, за шта се испоставља да је исто што и маскималан број њених линеарно независних врста.

Ранг матрице рачунамо коришћењем *елементарних трансформација* матрице:

1. замена места две врсте (колоне);
2. множење елемената једне врсте (колоне) ненула бројем;
3. множење елемената једне врсте (колоне) ненула бројем и додавање на одговарајуће елементе неке друге врсте (колоне).

Применом елементарних трансформација добијају се *еквиваленте* матрице - оне које имају исти ранг. Приликом налажења ранга матрицу сводимо на квази-троугаону матрицу облика $\left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & O \end{array}\right]$, где је P (регуларна) горње троугаона матрица и O нула матрица. Тада је ранг матрице једнак димензији матрице P.

Пример 2.4. У зависности од параметра a наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$.

Прво рачунамо $\det A = a^2 + 7a - 8 = (a-1)(a+8)$. Следи да је за $a \neq -8$ и $a \neq 1$ матрица A регуларна, па је њен ранг $r(A) = 3$. Иначе посматрамо (водећу) подматрицу $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ која је регуларна (њена детерминанта је 5), па је $r(A) = 2$.

2.5 Сопствене вредности и сопствени вектори матрице

Дефиниција 2.6. Карактеристични полином или карактеристична једначина квадратне матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Дефиниција 2.7. Сопствене вредности матрице A су нуле њеног карактеристичног полинома.

Сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ је било која колона матрица v (која није нула матрица) за коју важи $Av = \lambda v$.

Пример 2.5. Наћи сопствене вредности и један сопствени вектор матрице $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Сопствене вредности су решења једначине $\det(A - \lambda E) = 0$, тј.

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

одакле добијамо једначину $\lambda^2 + \lambda - 42 = 0$. Дакле, сопствене вредности су -7 и 6.

Нађимо сада сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda = 6$. Нека је $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Треба да важи

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{тј.} \begin{bmatrix} -12x + 3y \\ 4x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обе једначине се своде на $y = 4x$, па је сопствени вектор било који вектора облика $c \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $(c \neq 0)$.