ИТМ – Дискретна математика

Душан Ђукић

1. Теорија скупова

1.1. Увод

Када кажемо „скуп”, мислимо на колекцију објеката посматрајући је као јединствен ентитет. Иако је појам скупа у употреби од античких времена, тек га је Кантор[1] формализовао у 19. веку.

Скуп је по дефиницији мноштво различитих објеката. Основно својство скупова је припадност - сваки објекат је или у скупу, или ван скупа. Посебан пример скупа је *празан скуп*, који се означава са $\emptyset$: он не садржи ниједан елемент.

Дефиниција 1.1. Пишемо $x \in A$ ако објекат x припада скупу A, односно $x \notin A$ ако то није случај.

Пример 1.1. Скуп слова a, b и c је $\{a, b, c\}$. Тада нпр. $c \in \{a, b, c\}$, али $d \notin \{a, b, c\}$.

Дефиниција 1.2. Скуп A је *подскуп* скупа B, у ознаци $A \subset B$, ако B садржи све елементе скупа A. Другим речима, кад год је $x \in A$, важи и $x \in B$.

Ако је A подскуп скупа B и није $A = B$, онда је A *прави подскуп* скупа B.

Пример 1.2. Нека је A скуп свих аутомобила, B скуп црвених аутомобила, а C скуп точкова аутомобила. Тада је $B \subset A$, али $C \not\subset A$.

Канторова теорија скупова је заснована на наивном схватању да било каква колекција било чега чини скуп. Чине ли и скупови скуп? Може ли скуп да садржи самог себе као елемент?

Тек је доста касније (1918) примећено да с његовом теоријом нешто није у реду.

Раселов[2] парадокс. Ако колекција било чега чини скуп, онда и сви скупови који не садрже саме себе чине неки скуп S. Садржи ли скуп S самог себе?

– Ако скуп S не садржи себе, онда је по дефиницији и он елемент скупа S.
– Ако S садржи себе, откуд онда он у скупу S? То је противно дефиницији.

Наравно да је у прво време овај парадокс изазвао праву катастрофу у круговима теорије скупова, али је, захваљујући њему, у наредном периоду теорија скупова успешно поправљена. Морало је бити прецизно одређено шта јесте скуп, а шта није. Између осталог, уведено је ограничење да скуп не може да буде сам свој елемент. Ипак, нове аксиоме се тешко могу описати лаичким језиком. Зато ћемо овде остати на интуитивном схватању скупова, не упуштајући се у формално заснивање.

1.2. Операције на скуповима

Свакако важна (за неког и једина важна) информација о скупу јесте његова величина.

Дефиниција 1.3. *Кардиналност* коначног скупа A је његов број елемената и означава се са $|A|$.

О кардиналности бесконачног скупа биће речи касније.

Дефиниција 1.4. За дате скупове A и B уводимо основне операције:

- Њихова *унија* $A \cup B$ је скуп свих елемената који припадају бар једном од скупова A и B;
- њихов *пресек* $A \cap B$ је скуп свих елемената који припадају и скупу A и скупу B.

[1] *Georg Cantor* (1845-1918), немачки математичар
[2] *Bertrand Russell* (1872-1970), британски филозоф и математичар

Другим речима,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Унија $A \cup B$ нема више елемената него скупови A и B заједно. Штавише, елементи из пресека $A \cap B$ су при томе бројани двапут, па у ствари важи једнакост:

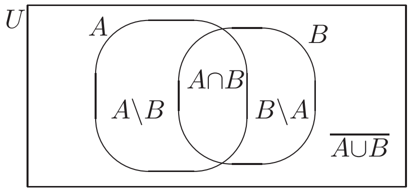
Тврђење 1.1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Кажемо да су скупови A и B *дисјунктни* ако је њихов пресек празан, тј. $A \cap B = \emptyset$. Тада је $|A \cup B| = |A| + |B|$. За унију дисјунктних скупова понекад се користи ознака $\sqcup$ уместо $\cup$.

Дефиниција 1.5. Уводимо и следеће операције на скуповима A и B:

- *Разлика* $A \setminus B$ је скуп свих елемената који припадају скупу A, али не и скупу B;
- *Симетрична разлика* $A \triangle B$ као скуп свих елемената који тачно једном од скупова A и B.

Под претпоставком да је A подскуп неког *универзалног скупа* U, његов *комплемент* је $\bar{A} = U \setminus A$.



Разлика и симетрична разлика се могу изразити преко уније, пресека и комплемента.

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\},$$
$$A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\},$$
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Пример 1.3. Нека је $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ је парно}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ и $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ је дељиво са } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$, у универзалном скупу $U = \mathbb{N}$. Тада је

- $A \cap B = \{6, 12, 18, \dots\}$ (бројеви дељиви са 6);
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$ (бројеви дељиви са 2 или са 3);
- $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ (непарни бројеви);
- $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$ (парни који нису дељиви са 6).

Следи неколико једноставних својстава ових операција.

Тврђење 1.2. За произвољне скупове A, B и C важи:

- $A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$, $\quad A \cup A = A \cap A = A$. $\quad A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
- Де Морганова[3] правила: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ и $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Операције $\cap$ и $\cup$ су комутативне, асоцијативне и дистрибутивне:

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Под *фамилијом* скупова подразумевамо колекцију скупова A_α, где α пролази кроз неки скуп индекса I. Природно дефинишемо унију и пресек скупова из дате фамилије као

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ за бар једно } \alpha \in I\} \quad \text{и} \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ за свако } \alpha \in I\}.$$

Пример 1.4. Шта је пресек свих интервала $A_n = (\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n})$ за $n \in \mathbb{N}$?

Решење. Како је $1 \in (\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n})$, пресек садржи број 1.

С друге стране, ако се број c налази у пресеку, онда је $c > \frac{n}{n+1}$ за свако n, па је $c \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Такође је $c < \frac{n+1}{n}$ за све n, па је $c \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Дакле, мора бити $c = 1$. Тражени пресек је једночлани скуп $\{1\}$.

[3] *Augustus De Morgan* (1806-1871), британски математичар

Посматрајмо неки скуп X. Ако је скуп X коначан, рецимо $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, колико он има подскупова? За сваки од његових n елемената имамо две могућности: да га ставимо у подскуп A или да га не ставимо. Све у свему, подскуп A можемо да саставимо на $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$ начина.

Дефиниција 1.6. Партитивни скуп скупа X је фамилија свих његових подскупова.

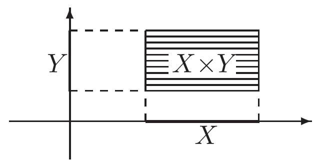
Означавајући са $|X|$ број елемената скупа X, показали смо следеће:

Тврђење 1.3. Коначан скуп X има $2^{|X|}$ различитих подскупова, тј. $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. $\square$

Пример 1.5. Партитивни скуп скупа $X = \{1, 2, 3\}$ је фамилија $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

1.3. Релације и пресликавања

Дефиниција 1.7. Декартов[4] *производ* скупова X и Y је скуп $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.



Другим речима, Декартов производ је скуп парова елемената, од којих је први из X и други из Y.

Декартов производ је асоцијативан, тј. $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}$, али није комутативан. Декартове производе $X \times X$, $X \times X \times X$ итд. често означавамо просто као X^2, X^3, итд.

Ако су скупови X и Y коначни, онда је $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Било који подскуп R Декартовог производа $X \times Y$ одређује неку *релацију* између елемената скупова X и Y.

Дефиниција 1.8. Релација $\sim$ одређена подскупом $R \subset X \times Y$ је дефинисана условом

$$x \sim y \quad \text{ако је} \quad (x, y) \in R.$$

За релацију кажемо да је на скупу X ако је $Y = X$.

Другим речима, сваки елемент скупа X је у релацији $\sim$ са некима од елемената скупа Y (можда ни са једним, можда и са свима). Знамо много примера релација: $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $=$, $|$, $\in$, $\subset \ldots$

Дефиниција 1.9. Релација $\sim$ на скупу X је

- *рефлексивна* ако је $x \sim x$ за све $x \in X$
- *симетрична* ако из $x \sim y$ следи $y \sim x$, за све $x, y \in X$;
- *транзитивна* ако из $x \sim y$ и $y \sim z$ следи $x \sim z$, за све $x, y, z \in X$;
- *релација еквиваленције* ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример 1.6. (а) Релација $\leqslant$ на скупу $\mathbb{R}$ је рефлексивна (јер је $x \leqslant x$) и транзитивна (ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, онда је и $x \leqslant z$), али није симетрична (нпр. $1 \leqslant 2$, али није $2 \leqslant 1$).

(б) Посматрајмо релацију $\sim$ на непразним скуповима: $X \sim Y$ ако је $X \cap Y \neq \emptyset$. Ова релација је рефлексивна и симетрична, али није транзитивна, јер нпр. $\{1\} \sim \{1, 2\}$ и $\{1, 2\} \sim \{2\}$, али није $\{1\} \sim \{2\}$.

(в) Релација $\sim$ на скупу $\mathbb{R}$ дата условом $x = \pm y$ је релација еквиваленције.

Ако је $\sim$ релација еквиваленције, онда из $y \sim x$ и $z \sim x$ следи и $y \sim z$. Другим речима, сви елементи који су у релацији са x такође су у релацији између себе.

Дефиниција 1.10. Класа еквиваленције елемента $x \in X$ у односу на релацију еквивленције $\sim$ је скуп свих елемената $y \in X$ за које је $y \sim x$.

На овај начин, скуп X је унија међусобно дисјунктних класа еквиваленције.

Пример 1.7. Релација $\sim$ на тачкама $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ је дата условом: $(x, y) \sim (x', y')$ ако је $x - x' = 2(y - y')$. Да ли је то класа еквиваленције? Које су класе еквиваленције?

[4] *René Descartes* (1596-1650), француски филозоф и математичар

Решење. Услов релације се може записати као $x-2y=x'-2y'$, одакле се лако види да је у питању релација еквиваленције, а класе су праве $x-2y=c$, где је c реална константа.

Нека је $\sim$ релација између скупова X и Y. Ако за свако $x\in X$ постоји тачно једно $y\in Y$ за које је $x\sim y$, ова релација одређује *функцију* или *пресликавање* $f:X\to Y$ дато условом $f(x)=y$. Другим речима, функција из X у Y сваком елементу $x\in X$ додељује тачно један елемент скупа Y.

Дефиниција 1.11. Функција $f:X\to Y$ је

- *инјекција* или „1-1" из $x_1\neq x_2$ $(x_1,x_2\in X)$ следи $f(x_1)\neq f(x_2)$;
- *сурјекција* или „на" ако за свако $y\in Y$ постоји $x\in X$ такво да је $f(x)=y$;
- *бијекција* ако је „1-1" и „на".

Дакле, инјекција слика различите елементе у различите, сурјекција покрива цео скуп Y, а бијекција представља потпуно упаривање елемената скупова X и Y.

Посматрајмо функције $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$. Јасно је да, ако су f и g инјекције, односно сурјекције, онда је и $g\circ f:X\to Z$ инјекција (сурјекција).

Такође, ако су $f:X\to Y$ и $g:Y\to X$ пресликавања таква да је $g(f(x))=x$, онда је g очигледно сурјекција, а f инјекција.

Пример 1.8. Функције $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ су дате условима $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^3+x$ и $h(x)=x^3-x$. Које су од ових функција „1-1", „на" или бијекције?

Решење. Функција f није „на" јер је $f(x)=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$. С друге стране, функције g и h су „на" јер је $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=\pm\infty$.

Функције f и h нису „1-1" јер је $f(0)=f(-1)=h(0)=h(-1)=0$. С друге стране, $g'(x)=3x^2+1$, па је функција g строго растућа и самим тим „1-1".

Према томе, g је бијекција, h је само „на", а f није ни „1-1" ни „на".

1.4. Кардиналност бесконачног скупа

Кардиналност $|X|$ датог скупа X је његов број елемената. То има смисла ако је X коначан скуп, али шта је кардиналност бесконачног скупа? Можда ∞, али да ли су све бесконачности исте?

Кардиналности, укључујући и бесконачне, бисмо упоређивали као што је природно.

Дефиниција 1.12. За дате скупове X и Y кажемо да је:

- $|X|\leqslant|Y|$ ако постоји инјекција $f:X\to Y$, или сурјекција $g:Y\to X$.
- $|X|=|Y|$ ако постоји бијекција $f:X\to Y$.

Пример 1.9. Иако је скуп $2\mathbb{N}=\{2,4,6,\dots\}$ прави подскуп скупа $\mathbb{N}$, пресликавање $f:\mathbb{N}\to2\mathbb{N}$ дато условом $f(n)=2n$ је бијекција. Зато скупови $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$ имају исту кардиналност.

Овде је важно приметити да је први услов у дефиницији 1.12 конзистентан.

Тврђење 1.4. Инјекција $f:X\to Y$ постоји ако и само ако постоји сурјекција $g:Y\to X$.

Доказ. Ако је дата инјекција $f:X\to Y$, можемо да направимо сурјекцију $g:Y\to X$ условом

$$g(y)=\begin{cases}x,\ \text{ако је } y=f(x) \text{ за неко } x\in X;\\ \text{у супротном, било који елемент скупа } X.\end{cases}$$

С друге стране, ако је дата сурјекција $g:Y\to X$, инјекцију $f:X\to Y$ можемо да дефинишемо условом $f(x)=$ (произвољно $y\in Y$ такво да је $g(y)=x$). $\square$

Ако скуп A има n елемената, онда свакако постоји бијекција између њега и скупа $\{1,2,\dots,n\}$. С друге стране, ако је A бесконачан скуп, ређајући његове елементе у низ $x_1,x_2,x_3,\dots$ никад га нећемо испразнити. Другим речима,

Тврђење 1.5. Скуп A је бесконачан ако и само ако постоји инјекција $f:\mathbb{N}\to A$ (дата условом $f(n)=x_n$). $\square$

Пример 1.9. Конструисати бијекцију f из интервала $(0,1)$ у интервале:
(а) $(0,2)$, (б) $(0,\infty)$ и (в) $[0,1]$.

Решење. (а) Ово је лако: $f(x) = 2x$;

(б) Овде можемо узети узети нпр. $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.

(в) Ово је мање очигледно, јер ниједна непрекидна функција не пролази. Уместо тога, издвојићемо бројеве $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Тражену бијекцију добићемо „шифтујући” само бројеве које смо издвојили, не мењајући остале. Наиме, функција

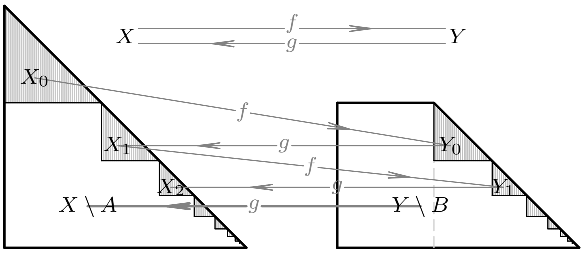
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{n-2} & \text{ако је } x = \frac{1}{n},\ n = 3, 4, \ldots, \\ x & \text{у свим осталим случајевима,} \end{cases}$$

из $(0, 1)$ на $[0, 1]$ је очигледно бијекција.

Следеће тврђење најзад показује оно што бисмо и очекивали од релације поретка: ако је $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, онда је $|X| = |Y|$. Ову теорему је први формулисао Кантор (1887), а исте године доказао Дедекинд[5] (који је тајио доказ). Названа је по двојици математичара који су неколико година касније први објавили доказе, мада је Шредеров био погрешан.

Тврђење 1.6 (Теорема Шредера[6] и Бернштајна[7]). Ако постоје инјективна пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, онда постоји и бијекција $h : X \to Y$.

Доказ. Ако је g бијекција, готови смо; зато ћемо сматрати да није, тј. да је скуп $X_0 = X \setminus g(Y)$ непразан. Означимо $f(X_0) = Y_0$, $g(Y_0) = X_1$, $f(X_1) = Y_1$, $g(Y_1) = X_2$ итд. Посматраћемо скупове $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ и $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ - на слици су ови скупови осенчени.



Видимо да је $f(A) = B$. С друге стране, пошто је $g(B) = A \setminus X_0$, имамо и $g(Y \setminus B) = X \setminus A$, тј. $g^{-1}(X \setminus A) = Y \setminus B$. Све у свему, f даје бијекцију $A \to B$, док g^{-1} даје бијекцију $X \setminus A \to Y \setminus B$. Према томе, функција

$$h : X \to Y, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{за } x \in A, \\ g^{-1}(x) & \text{за } x \in X \setminus A \end{cases}$$

је бијекција какву смо тражили. □

1.5. Пребројивост скупа

Дефиниција 1.13. Скуп A је *пребројиво бесконачан* ако је $|A| = |\mathbb{N}|$. То значи да постоји бијекција из скупа A у $\mathbb{N}$, тј. сви елементи скупа A се могу поређати у низ.

Скуп је *пребројив* ако је коначан или пребројиво бесконачан.

По тврђењу 1.5, пребројива бесконачност је „најмања” бесконачност, тј. ниједан бесконачан скуп нема строго мању кардиналност од $\mathbb{N}$.

Пример 1.10. Скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ је пребројив, јер све његове елементе можемо поређати у низ:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$$

Скуп позитивних рационалних бројева $\mathbb{Q}^+$ је такође пребројив, јер и његове елементе можемо поређати у низ сортиран по збиру бројиоца и имениоца, притом бришући сувишне разломке:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \quad \frac{1}{5}, \cancel{\frac{2}{4}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{4}{2}}, \frac{5}{1}, \quad \ldots$$

Скуп $\mathbb{Q}$ је пребројив као унија три пребројива скупа: $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ и једночланог скупа $\{0\}$.

Последња реченица у примеру 1.10 добија објашњење кроз следеће тврђење.

Тврђење 1.7. Пребројива унија пребројивих скупова је такође пребројив скуп.

[5] *Richard Dedekind* (1831-1916), немачки математичар
[6] *Ernst Schröder* (1841-1902), немачки математичар
[7] *Felix Bernstein* (1878-1956), немачки математичар

Доказ. Посматрајмо (коначан или бесконачан) низ пребројивих скупова $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, итд. Елементи уније се могу поређати у низ на следећи начин:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

притом изостављајући елементе којих нема. Упоредите поступак са примером 1.10.

Декартов производ двају пребројивих скупова A и B је унија пребројиво много копија скупа A, те је он пребројив. Између осталог, $A \times A = A^2$ је пребројив скуп, а такви су и $A^2 \times A = A^3$, $A^3 \times A = A^4$, итд. Дакле, $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ је пребројив скуп за свако $n \in \mathbb{N}$.

Постоје и скупови који нису пребројиви, чак ни пребројиво бесконачни.

Пример 1.13. Покушајмо да поређамо све реалне бројеве из интервала $[0, 1)$ у низ $x_1, x_2, x_3, \dots$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0,\boxed{x_{11}}x_{12}x_{13}x_{14}\dots \\ x_2 & = & 0,x_{21}\boxed{x_{22}}x_{23}x_{24}\dots \\ x_3 & = & 0,x_{31}x_{32}\boxed{x_{33}}x_{34}\dots \\ x_4 & = & 0,x_{41}x_{42}x_{43}\boxed{x_{44}}\dots \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Можемо да одаберемо реалан број $y = 0, y_1y_2y_3y_4\dots$ који се, за свако i, од члана x_i разликује у i-тој децимали (овде је пожељно побринути се и да немамо бесконачан низ деветки у децималном запису y). Овакав број y није једнак ниједном члану низа x_i, контрадикција.

У претходном примеру *принципом дијагонализације* смо конструисали елемент којег нема у низу. Дакле, пошто из $\mathbb{N}$ у $\mathbb{R}$ постоји инјекција, али не и бијекција, закључујемо да је бесконачност $|\mathbb{R}|$ *непребројива.* Ова нова бесконачност, већа од $|\mathbb{N}|$, зове се *континуум.*

Следеће тврђење показује да и од континуума постоји већа бесконачност и, уопште, да различитих бесконачних кардиналности има бесконачно много.

Тврђење 1.8 (Канторова теорема). Не постоји бијекција између скупа X и његовог партитивног скупа $\mathcal{P}(X)$. Како инјекција постоји, следи да је $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

Доказ. Идеја је иста као у Раселовом парадоксу. Претпоставимо да је $f : X \to \mathcal{P}(X)$ сурјекција, тј. сваки скуп $S \subset X$ се јавља као слика неког елемента скупа X. Посматрајмо онда скуп

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Нека је $f(s) = S$. Да ли s припада скупу S?

- Ако $s \notin f(s)$, онда s задовољава услов припадности скупу S, па $s \in S$;
- Ако $s \in f(s)$, онда s не треба да буде елемент скупа S.

Ова контрадикција завршава доказ. □

Канторова теорема, заједно са Шредер-Бернштајновом, даје нам још једно објашњење зашто је скуп $\mathbb{R}$ непребројив.

Тврђење 1.9. Постоји бијекција између скупова $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и $\mathbb{R}$, тј. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Доказ. Доделимо сваком подскупу $A \subset \mathbb{N}$ реалан број

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{10^n} \in [0, 1).$$

Број $f(A)$ има у децималном запису само нуле и јединице, и то јединице управо на позицијама из скупа A. Ово пресликавање $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ је очигледно инјективно.

С друге стране, сваком реалном броју x доделићемо подскуп

$$g(x) = \{[z], [10z], [10^2 z], \dots\}, \quad \text{где је} \quad z = e^x + 1 \in (1, +\infty).$$

Пресликавање $x \to z$ је инјективно, а такво је и пресликавање $z \to g(x)$, јер скуп $g(x)$ једнозначно одређује децимални запис броја z. Дакле, и $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ је инјекција.

Пошто између скупова $\mathbb{R}$ и $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ имамо обостране инјекције, по Шредер-Бернштајновој теореми постоји и бијекција. □

Између осталог, $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots$.

Постоје ли кардиналности строго између пребројиве бесконачности и континуума, тј. да ли постоји скуп A такав да је $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$? Ово је тзв. *континуум-хипотеза* и нема одговор. Наиме, испоставило се да у математици постоје тврђења која се не могу ни доказати, ни оборити. Континуум-хипотеза је једно од њих. На њу одговор може бити и потврдан и одречан, јер ни једно ни друго не би довело науку до парадокса.

1.6. Задаци

1. Скупови A, B и C имају сваки по 25 елемената, свака два у пресеку по 10, а сва три у пресеку 4. Колико елемената има унија $A \cup B \cup C$?

2. Колико има подскупова скупа $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ који нису подскупови скупа $B = \{1,3,4,6,8\}$?

3. Означимо $A_n = \{2n, 2n+1, 2n+2, \dots\}$. Одредити пресек $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$.

4. Ако је $A \triangle B = B$, колико је A?

5. Дати су скупови A и B. Колико има скупова X за које важи $A \cap X = B \cap X = A \cap B$ и $A \cup B \cup X = A \cup B$?

6. Може ли подскуп неког скупа да буде уједно и његов елемент?

7. Дат је скуп $X = \{\{\}, 2, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{\{1\}, 2\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$. Колико је $|X \cap \mathcal{P}(X)|$?

8. Може ли се скуп $\mathbb{R}$ записати као унија ограничених интервала?

9. Да ли су следеће релације на скупу $\mathbb{N}$ релације еквиваленције?

   (а) $a \sim b$ ако је $a \leqslant b$; (б) $a \sim b$ ако је $a = \pm b$; (в) $a \sim b$ ако је $a = 2b$ или $b = 2a$.

10. Испитати за сваку од следећих релација на интервалу $(0, +\infty)$ да ли је релација рефлексивна, симетрична или транзитивна:

    (а) $x \clubsuit y$ ако је $y < 2x$; (б) $x \heartsuit y$ ако је $y > 1$; (в) $x \spadesuit y$ ако је $\frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$.

11. Релацију $\diamondsuit$ на скупу $\mathbb{R}$ дефинишемо на следећи начин:

    $$x \diamondsuit y \quad \text{ако и само ако је} \quad |x-1| + |y-2| \leqslant 1.$$

    Ако је $x \diamondsuit (y-x)$ и $x \diamondsuit (y+x)$, одредити y.

12. За које вредности константе c је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дата условом $f(x) = (x^2 - x, x^3 - cx^2)$ инјективна? А да ли је сурјективна?

13. Доказати да је скуп A бесконачан ако и само ако постоји бијекција $f : A \to A \setminus \{a\}$, где је a ма који елемент скупа A.

14. Дати експлицитан пример бијекције између скупа $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и скупа $\mathbb{N}$.

15. Постоји ли бијекција између скупа $\mathbb{R}$ свих реалних бројева и скупа $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ свих ирационалних?

16. Доказати да је скуп $\mathbb{Q}[x]$ свих полинома са рационалним коефицијентима пребројив.

17. Да ли је скуп свих (а) коначних; (б) бесконачних низова нула и јединица пребројив или непребројив?

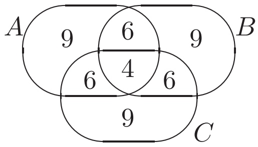
18. Да ли је број могућих релација еквиваленције на скупу целих бројева коначан, пребројиво бесконачан или непребројив? Образложити.

19. Нека је S скуп свих нерастућих низова природних бројева. (Такав је нпр. низ $5, 3, 3, 2, 2, 2, 2, \dots$). Да ли је скуп S коначан, пребројив или непребројив? Објаснити.

1.7. Решења

1. Одговор је 49. Сетимо се Венових[8] дијаграма. Ипак је то задатак за 5. разред основне школе:

[8] *John Venn* (1834-1923), енглески математичар



2. Скуп A има $2^7 = 128$ подскупова. Подскупови скупа A који су уједно и подскупови скупа B су подскупови скупа $A \cap B = \{1, 3, 4, 6\}$, а њих има 16. Одговор је $128 - 16 = 112$.

3. Сви елементи скупова A_n су природни бројеви. Ниједан природан број није садржан у свим скуповима A_n. Дакле, пресек је празан скуп.

4. Имамо $B = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, па је $A \setminus B \subset B$, али $A \setminus B$ је дисјунктан са B, па је то могуће само ако је $A \setminus B = \emptyset$ тј. $A \subset B$.

   Сада је $B = A \triangle B = B \setminus A$, што значи да је $A = \emptyset$.

5. Из услова задатка добијамо $(A \cup B) \cap X = (A \cap X) \cup (B \cap X) = A \cap B$. С друге стране, $(A \cup B) \cap X = (A \cup B \cup X) \cap X = X$. Дакле, $X = A \cap B$.

6. Може. На пример, $\emptyset$ је подскуп, а уједно и елемент скупа $\{\emptyset\}$.

7. Елементи скупа $\mathcal{P}(X)$ су подскупови скупа X. Једини елементи скупа X који су и његови подскупови су $\{\}$, $\{2\}$, $\{\{1\}, 2\}$ и $\{\{1\}, \{2\}\}\}$, па је $|X \cap \mathcal{P}(X)| = 4$.

8. Може, нпр. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$.

9. Релација (а) није симетрична: нпр. $1 \sim 2$, али није $2 \sim 1$.

   У релацији (б) је $x \sim y$ ако је $|x| = |y|$, што је релација еквиваленције: она је рефлексивна ($|x| = |x|$), симетрична ($|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|$) и транзитивна ($|x| = |y|, |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|$).

   Релација (в) није рефлексивна: нпр. $1 \not\sim 1$.

10. (а) Пошто је $x < 2x$, релација је рефлексивна. Она није симетрична (нпр. $3 \sim 1$, али $1 \not\sim 3$), нити транзитивна (нпр. $2 \sim 3$ и $3 \sim 5$, али $2 \not\sim 5$).

    (б) Није ни рефлексивна ($\frac{1}{2} \not\sim \frac{1}{2}$), ни симетрична ($\frac{1}{2} \sim 2$, али $2 \not\sim \frac{1}{2}$). Транзитивна јесте, јер ако је ($x \sim y$ и) $y \sim z$, онда то значи да је $z > 1$, па је и $x \sim z$.

    (в) То је релација еквиваленције: рефлексивна је ($\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$), симетрична (ако је $\frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$, онда је и $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$) и транзитивна ($\frac{y}{x}, \frac{z}{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{z}{x} \in \mathbb{Q}$).

11. За почетак, из $x \diamondsuit (y - x)$ одмах следи $|x - 1| \leqslant 1$, па мора бити $x \geqslant 0$.

    Означимо $|x - 1| = d \geqslant 0$. Тада је $x = 1 \pm d$, али из услова $x \diamondsuit (y - x)$ добијамо и $d + |(y - x) - 2| \leqslant 1$, тј. $|(y - x) - 2| \leqslant 1 - d$. Одавде следи $d \leqslant 1$ и $1 + d \leqslant y - x \leqslant 3 - d$.

    На исти начин, из услова $x \diamondsuit (y + x)$ добијамо $1 + d \leqslant y + x \leqslant 3 - d$.

    Међутим, сада из $y + x \leqslant 3 - d$ и $y - x \geqslant 1 + d$ следи $2x = (y + x) - (y - x) \leqslant (3 - d) - (1 + d) = 2 - 2d$, тј. $x \leqslant 1 - d$. Према томе, $x = 1 - d$, $y - x = 1 + d$ и $y + x = 3 - d$, одакле добијамо $y = 2$.

12. Испитајмо може ли да важи $f(x) = f(y)$ за $x = y$, тј.

    $$x^2 - x = y^2 - y \quad \text{и} \quad x^3 - cx^2 = y^3 - cy^2.$$

    Из прве једначине следи $0 = x^2 - y^2 - x + y = (x - y)(x + y - 1)$, па је $y = 1 - x$. С друге стране, из друге једначине следи $0 = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - cx - cy)$, па је $0 = x^2 + xy + y^2 - cx - cy = x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 - c = x^2 - x + 1 - c$. Ова квадратна једначина има два различита решења ако јој је дискриминанта $4c - 3$ позитивна, тј. $c > \frac{3}{4}$.

    Пресликавање f никад није сурјективно, нпр. зато што је $x^2 - x \geqslant -\frac{1}{4}$ за све x.

13. По тврђењу 1.5 постоји бесконачан низ $a_1 = a, a_2, a_3, \ldots$ елемената скупа A. Дефинишимо

    $$f(x) = \begin{cases} a_{n+1} & \text{ако је } x = a_n \text{ за неко } n; \\ x & \text{у супротном.} \end{cases}$$

    Јасно је да је f инјекција из X у X, а његова слика садржи све елементе осим члана $a_1 = a$.

14. Сваки природан број n се може на јединствен начин представити у облику $2^k \cdot m$, где је $k \geqslant 0$ цео број, а m непаран број. То значи да пресликавање $(k,m) \to 2^k m$ даје бијекцију. Заменом $x = k+1$ и $y = \frac{m+1}{2}$ $(x, y \in \mathbb{N})$ долазимо до бијекције $f(x,y) = 2^{x-1}(2y-1)$ из скупа $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ у $\mathbb{N}$.

Напомена. Има разних примера. Нпр. уверите се да је пресликавање $f(m,n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$ такође бијекција из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ у $\mathbb{N}$.

15. Сви рационални бројеви се могу поређати у низ $q_1, q_2, q_3, \ldots$. Одаберимо још један низ ирационалних бројева $r_1, r_2, r_3, \ldots$.

    Сада конструишемо бијекцију која чланове низа $q_1, r_1, q_2, r_2, q_3, r_3, \ldots$ слика редом у чланове низа $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, \ldots$, а све остале реалне бројеве слика у себе. Ово пресликавање бијективно слика $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

16. Између скупа P_n полинома степена n са рационалним коефицијентима и скупа $\mathbb{Q}^{n+1}$ постоји очигледна бијекција: $$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \to (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

    Према томе, скуп P_n је пребројив. Најзад, скуп $\mathbb{Q}[x] = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ је пребројив, као пребројива унија пребројивих скупова.

17. (а) Скуп U_n коначних низова дужине n једнак је 2^n. Скуп свих коначних низова је пребројива унија коначних скупова U_n $(n \in \mathbb{N})$ и као таква је пребројиво бесконачна.

    (б) Сваки бесконачан низ $\epsilon = (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \ldots)$ нула и јединица једнозначно одговара подскупу $A(\epsilon) = \{n \mid \epsilon_n = 1\}$ скупа $\mathbb{N}$, а тих подскупова има непребројиво много (континуум).

18. Непребројив је. Класа еквиваленције у којој је број 1 може бити било који подскуп скупа $\mathbb{Z}$ који садржи јединицу, а таквих подскупова има непребројиво много.

19. Сваки такав низ је константан почев од неког члана. Скуп $U_{a,n}$ низова који почињу елементом a и константни су почев од n-тог је коначан, јер за првих n елемената има коначан број могућности.

    Скуп свих посматраних низова је унија скупова $U_{a,n}$ по свим вредностима a и n. Дакле, то је пребројива унија коначних скупова и као таква је коначна.